



Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



18. Jahrgang. 1. Heft.

Mit 1 lithographirten Tafel.

Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1873.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1872. Juli — December.

Bachmann, Dr. **P.,** a. o. Prof. an der Univ. Breslau, die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Akadem. Vorlesungen. [XII u. 300 S. mit Holzschn. im Text u. 1 lith. Taf.] gr. 8. geh. n. 2 Thlr. 10 Ngr.

Bardey, Dr. **E.,** methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 7000 Aufgaben enthaltend, über alle Theile der Elementar-Arithmetik, für Gymnasien, Realschulen und polytechn. Lehranstalten. Zweite Aufl. [XII u. 306 S.] gr. 8. Geh. 27 Ngr.

Fort, O., und **O. Schlömilch,** Professoren an d. polytechn. Schule zu Dresden, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zweiter Theil: Analytische Geometrie des Raumes von O. Schlömilch. Dritte Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VIII u. 286 S.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 20 Ngr.

Frischauf, J., Prof. an der Univ. Graz, absolute Raumlehre nach Joh. Bolyai bearbeitet. [LX u. 96 S.] gr. 8. geh. n. 20 Ngr.

Hesse, Otto, ordentl. Professor an dem k. Polytechnikum zu München, die Determinanten elementar behandelt. Zweite Auflage. [IV u. 48. S.] gr. 8. geh. n. 12 Ngr.

Hippauf, Dr. **H.,** Rector der mittleren Bürgerschule zu Halberstadt, Lösung des Problems der Trisection mittelst der Conchoide auf circularer Basis. Mit zwei lithogr. Tafeln. [42 S.] gr. 8. geh. n. 12 Ngr.

Joachimsthal, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. (Herausgegeben von A. Liersemann.) Mit 4 Figurentafeln. [VIII u. 174 S.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 20 Ngr.

Klein, Prof. Dr. **Hermann,** Lehrer der Mathematik und Physik am Vitzthum'schen Gymnasium zu Dresden, die Principien der Mechanik historisch und kritisch dargestellt. Eine von der philosophischen Honoren-Facultät zu Göttingen gekrönte Preisschrift. [VIII u. 120 S.] gr. 8. geh. n. 24 Ngr.

Schlegel, Victor, Mathematiker am Gymnasium zu Waren, System der Raumlehre. Nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe dargestellt. I Theil: Geometrie. Die Gebiete des Punktes, der Geraden und der Ebene. [XVI u. 156 S. mit vielen Holzschnitten im Text.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 10 Ngr.

Sonderhof, A., ein Beitrag zur höheren Geodäsie. Separatabdruck aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik. [VIII u. 95 S.] gr. 8. geh. n. 20 Ngr.

Wüllner, Dr. **Adolph,** Prof. der Physik an der Kgl. polytechn. Schule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. IV. Band. Die Lehre vom Magnetismus und der Elektricität. [Dritte Ausgabe.] Zweite vielfach umgearbeitete u. verbesserte Aufl. [XII u. 1006 S.] gr. 8. geh. n. 4 Thlr. 10 Ngr.

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



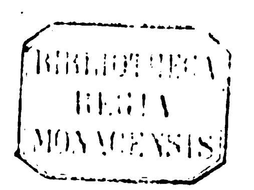
Achtzehnter Jahrgang.

Mit 7 lithographirten Tafeln.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1873.



Inhalt.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Arithmetik und Analysis.

Synthetische und analytische Geometrie.





I.

Zur allgemeinen Theorie der Kegelschnitte.

Von

C. Mittelacher,

Gymnasiallehrer zu Petersburg.

---

§ 1.

Das anharmonische Verhältniss von vier Punkten einer Geraden ist identisch mit dem ihrer Polaren in Bezug auf einen Kegelschnitt. Dieser Satz lässt sich auflösen in einen andern, durch welchen die Länge des geradlinigen Weges, den ein Punkt beschreibt, zum Sinus des Drehungswinkels seiner Polare in Relation gesetzt wird. Bedeuten nämlich A, B zwei Punkte in der Ebene eines Kegelschnittes, a, b ihre Polaren, und nennen wir die Entfernung der gegebenen Punkte c, den Durchschnittspunkt der Polaren C, ihren Winkel φ, die Normalen aus den Punkten A, B, C auf die zugehörigen Polaren a, b, c bis zum Durchschnitte mit der Hauptaxe des Kegelschnitts ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, endlich den Hauptparameter der Curve p, dann ist immer

a)
$$\frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c \cdot \sin \varphi}{c} = \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Wenn ein Punkt in einer geraden Linie fortschreitet, während seine Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt sich um den Pol der Geraden dreht, so ist das Verhältniss aus dem Sinus des Drehungswinkels zur Länge jenes geradlinigen Weges, multiplicirt mit dem Producte der Normalen der drei Hauptpunkte des Systems, constant gleich dem Quadrat des halben Hauptparameters der Curve.

Denken wir uns also $2n$ Punkte in der Ebene durch einen stetigen Zug mit einander verbunden und das entstandene $2N$-Eck mittels irgend eines Kegelschnittes polarisirt, bezeichnen die aufeinanderfolgenden Seiten des einen, sowie die entsprechenden Winkel der Polarfigur mit I, II, III...,

und sowohl die Winkel der ersten, als auch die entsprechenden Seiten der andern Figur in derselben Reihenfolge mit 1, 2, 3 ... (12=I), so ist nach diesem Satze z. B. für $n=3$

$$\varrho_1\varrho_2\frac{\varrho_{\rm I}\sin{\rm I}}{\rm I}=\varrho_1\varrho_3\frac{\varrho_{\rm II}\sin{\rm II}}{\rm II},$$

$$\varrho_3\varrho_4\frac{\varrho_{\rm III}\sin{\rm III}}{\rm III}=\varrho_4\varrho_5\frac{\varrho_{\rm IV}\sin{\rm IV}}{\rm IV},$$

$$\varrho_5\varrho_6\frac{\varrho_{\rm V}\sin{\rm V}}{\rm V}=\varrho_6\varrho_1\frac{\varrho_{\rm VI}\sin{\rm VI}}{\rm VI}.$$

Indem wir aber die einzelnen Gleichungen mit einander multipliciren und die gemeinschaftlichen Factoren auf beiden Seiten unterdrücken, ergiebt sich als resultirende Gleichung

$$\text{b)}\qquad \frac{\rm I\,.\,III\,.\,V}{\rm II\,.\,IV\,.\,VI}:\frac{\sin{\rm I}\,.\,\sin{\rm III}\,.\,\sin{\rm V}}{\sin{\rm II}\,.\,\sin{\rm IV}\,.\,\sin{\rm VI}}=\frac{\varrho_{\rm I}\cdot\varrho_{\rm III}\cdot\varrho_{\rm V}}{\varrho_{\rm II}\cdot\varrho_{\rm IV}\cdot\varrho_{\rm VI}}.$$

Nennen wir zur Abkürzung den Quotienten aus dem Producte von je n in irgend einer Ordnung nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden Strecken, dividirt durch das Product der anderen, das involutorische Verhältniss dieser Strecken, ebenso den Quotienten aus dem Producte der Sinus von je n in irgend einer Ordnung nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden Winkeln, dividirt durch das Product der anderen, ein involutorisches Verhältniss der Sinus dieser Winkel, so drückt die vorstehende Gleichung den Satz aus:

Das involutorische Verhältniss der Seiten eines $2N$-Ecks, dividirt durch das involutorische Verhältniss aus den Sinus der entsprechenden Winkel der Polarfigur, ist gleich dem involutorischen Verhältnisse der zugehörigen Normalen.

Fallen die durch einen stetigen Zug verbunden gedachten $2n$ Punkte in ein und dieselbe Gerade, so gehen ihre Polaren durch denselben Punkt, alle Normalen werden einander gleich, und daher ist

$$\text{c)}\qquad \frac{\rm I\,.\,III\,.\,V}{\rm II\,.\,IV\,.\,VI}=\frac{\sin{\rm I}\,.\,\sin{\rm III}\,.\,\sin{\rm V}}{\sin{\rm II}\,.\,\sin{\rm IV}\,.\,\sin{\rm VI}}.$$

Das involutorische Verhältniss von $2n$ Punkten einer Geraden ist gleich dem ihrer Polaren.

Das Theorem, worin sich diese Identität auflösen lässt und wonach ganz allgemein zu jedem Satze von den Kegelschnitten, in welchem Strecken oder Sinus von Winkeln auftreten, ein reciproker zu finden ist, kann in eine erweiterte Form gebracht werden. Es steht im Zusammenhang mit zwei anderen Lehrsätzen, die zu einander reciprok sind und zwischen denen jener den vermittelnden Uebergang bildet. Diese Sätze sind zwar durch einige ihrer besonderen Fälle wohlbekannt, aber bisher nie in allgemeiner Bedeutung, sondern nur als Aufgaben ohne Anwendung behan-

delt worden, während doch ihre theoretischen Consequenzen wichtige und mannichfaltige sind.

Das vollständige, der vorstehenden Erklärung zufolge nach Art des Chasles'schen Satzes dreitheilige Theorem lässt sich am Uebersichtlichsten unter Einführung folgender Abkürzungen darstellen. Es bezeichne:

$\varkappa$

I. das Verhältniss des Sinus irgend eines Winkels zur gegenüberliegenden Seite in einem Sehnendreiecke eines Kegelschnittes;

II. das Verhältniss aus dem Sinus des Winkels zweier beliebigen Geraden zur Entfernung ihrer Pole, also insbesondere, für ein in Bezug auf die Polarisationscurve sich selbst conjugirtes Dreieck, das Verhältniss des Sinus eines seiner Winkel zur gegenüberliegenden Seite;

III. das Verhältniss des Sinus irgend eines Winkels zur gegenüberliegenden Seite in einem Tangentendreieck eines Kegelschnittes;

λ

entweder das Product aus den Centrallinien der drei Hauptpunkte vordefinirter Liniensysteme, dividirt durch das Product der parallelen Halbmesser der Curve, oder das Product aus den Normalen der drei Hauptpunkte, dividirt durch das Product der Normalen in den Durchschnittspunkten ihrer Centrallinien mit der Curve;

r_a, r_b, r_c

1. die mittleren Proportionalen (Reductionsproportionalen) der Abschnitte, welche von der Curve auf drei durch einen willkürlich gewählten Punkt (Reductionspunkt) den Hauptrichtungen $a\,b\,c$ der Liniensysteme I, II, III parallel geführten Sehnen bestimmt werden;
2. die Normalen in den Berührungspunkten der drei den Hauptrichtungen $a\,b\,c$ der Liniensysteme I, II, III parallelen Tangenten;
3. die dritten Wurzeln aus denjenigen Parametern der Curve, welche den drei Hauptrichtungen $a\,b\,c$ der Liniensysteme I, II, III entsprechen.

Unter Einführung dieser Symbole lässt sich das ganze Theorem in die Fassung bringen:

A) $$(K)\, r_a r_b r_c \,.\, k = (K_1)\, r_{a_1} r_{b_1} r_{c_1} \,.\, k_1,$$

wo die mit Indices versehenen Symbole die gleiche Bedeutung haben für irgend ein anderes nach I, II, III construirtes Liniensystem. Der Coeffi-

cient K erscheint darum in Klammern eingeschlossen, weil derselbe für alle Kegelschnitte in Bezug auf das System I und auch in Bezug auf die Systeme II und III für den Grenzfall der Parabel constant $=1$ wird.

Haben die Symbole r_a, r_b, r_c die Bedeutung 1, 2, und verlegen wir im ersten Falle den allgemeinen Reductionspunkt in den Brennpunkt des Kegelschnittes, so sind die constanten Werthe jener geometrischen Aggregate, wenn p den Hauptparameter der Curve bezeichnet:

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \frac{p^2}{8}, & \frac{p^2}{4}, & \frac{p^2}{2}. \end{matrix}$$

Haben aber die Symbole r_a, r_b, r_c die Bedeutung 3, so nehmen die Constanten der Gleichung die Werthe an:

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 1, & 2, & 4. \end{matrix}$$

Ist insbesondere der Kegelschnitt eine Mittelpunktscurve und sind r_a, r_b, r_c Halbmesser derselben, so werden die Constanten, wenn a, b die halben Hauptaxen der Curve bezeichnen:

$$\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ \frac{ab}{2}, & ab, & 2ab. \end{matrix}$$

Die im Eingange gegebene Formel a. ist ein specieller Fall der II. Form des Theorems A. Eine Anzahl Fundamentalsätze der neueren Geometrie lassen sich auf dieses Theorem nicht nur zurückführen, sondern auch sammt ihren reciproken in derselben Art, wie an dem Beispiele des anharmonischen Verhältnisses von vier Punkten einer Geraden gezeigt wurde, einerseits darin auflösen, andererseits dadurch erweitern. Wählen wir zur Erklärung den Chasles'schen Satz. Dieser besteht, vollständig zerlegt, aus drei Theilen:

1. das anharmonische Verhältniss von vier Punkten eines Kegelschnittes ist constant;
2. das anharmonische Verhältniss dieser vier Punkte ist identisch mit dem ihrer Tangenten;
3. das anharmonische Verhältniss von vier Tangenten eines Kegelschnittes ist constant.

In derselben Reihenfolge sind nun diese Gesetze erstens in die resp. Formen I, II, III des Theorems aufzulösen, wie oben (b), zweitens dahin zu erweitern, dass an Stelle des anharmonischen Verhältnisses von vier das involutorische von $2n$ Elementen tritt. Gleichzeitig liefert dasselbe Theorem die Werthe der Constanten je nach der Bedeutung der Symbole r_a, r_b, r^c in dreifacher geometrischer Interpretation.

Ein Gleiches leisten die Formen I, III für die Sätze von Pappus und Carnot und deren reciproke. Auch der erweiterte Satz des Mene-

laus, dass nämlich das involutorische Verhältniss der Abschnitte, welche von einer Geraden auf den Seiten eines N-Ecks bestimmt werden, constant $=1$ ist, lässt sich nebst anderen verwandten durch die Form II auf eine elementare trigonometrische Betrachtung zurückführen. Dadurch treten aber die Sätze von Pascal und Brianchon mit dem Carnot'schen in Verbindung und lassen sich dahin erweitern, dass n Durchschnittspunkte gewisser Geraden eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen $2N$-Ecks wiederum auf einem Kegelschnitte liegen, und n Verbindungslinien gewisser Punkte eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen $2N$-Ecks wieder einen Kegelschnitt berühren.

Endlich ist auch das ganze System von Sätzen, welche sich um den für alle Kegelschnitte erweiterten ptolemäischen Lehrsatz als Mittelpunkt gruppiren lassen, aus demselben Theorem abzuleiten, zu dessen Beweis ich nach dieser kurzen Orientirung in Bezug auf den Zweck desselben nunmehr übergehe.

§ 2.

Das Theorem A) hat seinen Ursprung in der Unveränderlichkeit der Discriminante einer Gleichung zweiten Grades jeder linearen Transformation gegenüber, also wenn die Gleichung eines Kegelschnittes in einem Systeme cartesischer Coordinaten, deren Anfangspunkt auf der Curve liegt, in der Form

$$Ay^2 + 2\,Bxy + Cx^2 + 2\,Dy + 2\,Ex = 0$$

gegeben ist, und w den Coordinatenwinkel bezeichnet, in dem Gesetze, dass jede Coordinaten-Transformation das Aggregat

$$\frac{AE^2 - 2\,BDE + CD^2}{\sin^2 w}$$

ungestört lässt, vorausgesetzt, dass der Anfangspunkt der Coordinaten auf der Curve bleibt. Ich wiederhole zunächst den geometrischen Beweis dieses Gesetzes, weil ich die dabei auftretenden Relationen in der Folge gebrauche und mich auf irgend eine Form derselben berufen muss.

Erstens lässt jede Parallelverschiebung mittels der Transformationsformeln

$$x = x_1 + u, \quad y = y_1 + v$$

die Coefficienten A, B, C der allgemeinen Gleichung unverändert und ertheilt den anderen die Werthe

$$1)\qquad \begin{cases} D_1 = Ay_1 + Bx_1 + D, \\ E_1 = By_1 + Cx_1 + E. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$AE_1^2 - 2\,BD_1E_1 + CD_1^2 = (AE^2 - 2\,BDE + CD^2) + (AC - B^2)\,F_1,$$

wo

$$F_1 = Ay_1^2 + 2\,Bx_1y_1 + Cx_1^2 + 2\,Dy_1 + 2\,Ex_1.$$

Ist $AC - B^2 = 0$, so bleibt das Aggregat $AE^2 - 2\,BD_1 - CD_2$ ungeändert für jede Parallelverschiebung, aber im Allgemeinen, wenn $AC - B^2$

nicht $=0$ ist, so lange $F_1=0$, d. h. der Anfangspunkt der Coordinaten $x_1 y_1$ auf der Curve bleibt.

Zweitens ertheilt eine Winkelverschiebung der Coordinatenaxen mittels der Transformationsformeln

$$x=\alpha_1 u+\alpha_{11} v, \quad y=\beta_1 u+\beta_{11} v,$$

wo α_1, β_1 die Richtungscomponenten der Längeneinheit der neuen U-Axe, α_{11}, β_{11} die Richtungscomponenten der neuen V-Axe bezeichnen, den Coefficienten der allgemeinen Gleichung die Werthe

$$2)\quad \left\{\begin{array}{c} A_1=A\beta^2_{11}+2\,B\alpha_{11}\beta_{11}+C\alpha^2_{11}, \quad C_1=A\beta_1^2+2\,B\alpha_1\beta_1+C\alpha_1^2, \\ B_1=A\beta_1\beta_{11}+B\,(\alpha_1\beta_{11}+\beta_1\alpha_{11})+C\alpha_1\alpha_{11}, \\ D_1=D\beta_{11}+E\alpha_{11}, \quad E_1=D\alpha_1+E\alpha_1. \end{array}\right.$$

Also ist

$$A_1 E_1^2-2\,B_1 D_1 E_1+C_1 D_1^2=(AE^2-2\,BDE+CD^2)\,(\alpha_1\beta_{11}-\beta_1\alpha_{11})^2.$$

Bringen wir damit die andere Gleichheit in Verbindung:

$$(\alpha_1\beta_{11}-\beta_1\alpha_{11})\,\sin w=p=\sin w_1,$$

wo p die Entfernung des Punktes $\alpha_{11}\beta_{11}$ von der Geraden

$$\alpha_1 y-\beta_1 x=0$$

oder der Sinus des Winkels der Richtungen $(\alpha_1\beta_1)\,(\alpha_{11}\beta_{11})$, d. h. des neuen Coordinatenwinkels w_1 ist, so ergiebt sich

$$\frac{A_1 E_1^2-2\,B_1 D_1 E_1+C_1 D_1^2}{\sin^2 w_1}=\frac{AE^2-2\,BDE+CD^2}{\sin^2 w}.$$

Interpretiren wir dieses Gesetz geometrisch. Bekanntlich findet man die Länge der Abschnitte, welche von einer Linie zweiten Grades auf irgend einer durch den Punkt xy gezogenen Secante mit den Richtungscomponenten $\alpha\beta$ bestimmt werden, unter Einführung der Abkürzungen

$$P=A\beta^2+2\,B\alpha\beta+C\alpha^2,$$
$$Q=(Ay+Bx+D)\,\beta+(By+Cx+E)\,\alpha,$$
$$R=Ay^2+2\,Bxy+Cx^2+2\,Dy+2\,Ex+F$$

aus der Gleichung

$$P\varrho^2+2\,Q\varrho+R=0.$$

Das Quadrat der mittleren Proportionalen ϱ_0 zu diesen Abschnitten ist

$$3)\quad \varrho_0^2=\frac{R}{P},$$

und wir bemerken, dass das Aggregat $AE^2-2\,BDE+CD^2$ die Form P hat.

Denken wir uns also einen Kegelschnitt, welcher durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, und die Axen des Coordinatensystems zusammenfallend mit den Seiten ac eines der Curve eingeschriebenen Dreiecks abc, so ist für die Richtung der X-Axe (a): $\alpha=1$, $\beta=0$, und für die Richtung der Y-Axe (c): $\alpha=0$, $\beta=1$. Folglich sind die Quadrate der mittleren Proportionalen zu den Abschnitten, welche von der Curve auf zwei durch einen beliebigen Punkt xy parallel zu ac gezogenen Sehnen bestimmt werden:

$$a_0^2 = \frac{R}{C}, \quad c_0^2 = \frac{R}{A}.$$

Die Richtungscomponenten der Seite b, welche dem Coordinatenwinkel w gegenüberliegt, sind aber

$$\alpha = -\frac{a}{b}, \quad \beta = \frac{c}{b},$$

wo a und c die in Coefficienten der allgemeinen Gleichung ausgedrückten Werthe haben:

$$a = -2\frac{E}{C}, \quad c = -2\frac{D}{A}.$$

Also ist das Quadrat der in Bezug auf denselben Punkt xy genommenen mittleren Proportionale zu den Abschnitten einer der Seite b parallelen Sehne

$$b_0^2 = \frac{AC \,.\, R}{4(AE^2 - 2BDE + CD^2)} \,.\, b^2.$$

Hieraus schliessen wir

$$\alpha) \qquad 4 \,.\, \frac{AE^2 - 2BDE + CD^2}{\sin^2 w} = \frac{b^2}{a_0^2\, b_0^2\, c_0^2 \sin^2 w} \,.\, R^3,$$

und wenn $a_{0_1}\, b_{0_1}\, c_{0_1}\, R_1$ die wie oben definirten analogen Elemente für ein zweites dem Kegelschnitt eingeschriebenes Dreieck $a_1 b_1 c_1$ in Bezug auf einen andern Punkt $x_1 y_1$ bezeichnen:

$$\frac{b}{a_0 b_0 c_0 \sin w} \,.\, R^{3/2} = 2\frac{(AE^2 - 2BDE + CD^2)^{1/2}}{\sin w} = \frac{b_1}{a_{0_1} b_{0_1} c_{0_1} \sin w_1} R_1^{3/2}.$$

Ziehen wir also durch ein und denselben festen Punkt $x_0 y_0$ parallele Sehnen zu den Seiten abc, $a_1 b_1 c_1$ irgend zweier dem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke, nennen die mittleren Proportionalen $a_0 b_0 c_0$, $a_{0_1} b_{0_1} c_{0_1}$ der Abschnitte dieser Sehnen die Reductionsproportionalen der Seiten jener Dreiecke und bezeichnen die für jedes Dreieck festen Verhältnisse der Sinus eines seiner Winkel zur gegenüberliegenden Seite mit $\frac{\sin\alpha}{a} = k$, $\frac{\sin\alpha_1}{a_1} = k_1$, so resultirt der Satz:

$$\text{A I 1)} \qquad a_0 b_0 c_0 \,.\, k = a_{0_1} b_{0_1} c_{0_1} \,.\, k_1.$$

> Das Verhältniss aus dem Sinus des Winkels irgend eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks zur gegenüberliegenden Seite, multiplicirt mit dem Product aus den Reductionsproportionalen der Seiten des Dreiecks, ist in Bezug auf denselben festen Reductionspunkt eine constante Grösse.

Der Satz bleibt unverändert, wenn eine der Seiten des Dreiecks unendlich klein wird, also das Liniensystem in eine Sehne der Curve und die Tangente in einen ihrer Endpunkte übergeht. Nennen wir in diesem Falle die der Sehne s und einer zugehörigen Tangente t entsprechenden Reduc-

tionsproportionalen $s_0 t_0$, den Winkel, welchen die Tangente mit der Sehne bildet, φ, und setzen wieder $\frac{\sin\varphi}{s} = k$, so ist

AI1a) $$s_0^2 t_0 \,.\, k = s^2_{0_1} \,.\, t_{0_1} \,.\, k_1.$$

Je nachdem man im einen oder andern Falle die Liniensysteme wählt — es können ein Paar Seiten (Sehnen) einander gleich sein oder ein Paar Peripherie- (Tangenten-) Winkel in ihren Sinus übereinstimmen u. s. w. —, dem entsprechend nimmt der Satz natürlich einfachere Formen an, welche ich aber hier anzuzeigen unterlasse, da sie mit Leichtigkeit aus den allgemeinen Gleichungen aufgefunden werden können.

Ich wiederhole, dass dieser erste Fall des allgemeinen Theorems A), auf welchen aber alle anderen zurückzuführen sind, der Relation α) zufolge nichts Anderes ist, als eine geometrische Interpretation des Gesetzes

$$\frac{AE^2 - 2BDE + CD^2}{\sin^2 w} = Const.$$

Solche Sätze, wie die von Carnot, Pappus über die Chasles'sche Transformation des letzteren stehen dazu in secundärer Beziehung, denn sie lösen sich darin auf. Wenn z. B. I, II, III, IV die Seiten eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks sind, die Ecken desselben in gleicher Reihenfolge mit irgend einem Punkte der Curve durch die Strahlen a, b, c, d (a nach I, II) verbunden werden, und 1, 2, 3, 4 die den resp. Seiten I, II, III, IV gegenüberliegenden Winkel dieser Strahlen bedeuten, so ist

$$a_0 d_0 \frac{\mathrm{I}_0 \sin 1}{\mathrm{I}} = a_0 b_0 \frac{\mathrm{II}_0 \sin 2}{\mathrm{II}},$$

$$b_0 c_0 \frac{\mathrm{III}_0 \sin 3}{\mathrm{III}} = c_0 d_0 \frac{\mathrm{IV}_0 \sin 4}{\mathrm{IV}},$$

also durch Multiplication und Unterdrückung der gemeinschaftlichen Factoren auf beiden Seiten

$$\frac{\sin 1 \,.\, \sin 3}{\sin 2 \,.\, \sin 4} = \frac{\mathrm{I} \,.\, \mathrm{III}}{\mathrm{I}_0 \,.\, \mathrm{III}_0} : \frac{\mathrm{II} \,.\, \mathrm{IV}}{\mathrm{II}_0 \,.\, \mathrm{IV}_0}.$$

Dies ist der erste Theil des Chasles'schen Satzes, und zwar mit Erklärung der geometrischen Bedeutung seiner Constante.

Ich werde später alle hierher gehörigen Sätze im Zusammenhang darstellen. Vorläufig halte ich in der weiteren Entwickelung des Fundamentaltheorems, welches ohne eine andere Voraussetzung am Eingange zur Lehre von den Kegelschnitten steht, einen Augenblick an, um die Verwendung desselben auf einem andern Gebiete zu zeigen.

§ 3.

Wenn drei feste Punkte A, B, C eines Kegelschnittes mit zwei beliebig gewählten anderen Punkten im Umfange der Curve verbunden werden, und wir denken uns zwei Dreiecke construirt, deren Seiten je drei zusam-

mengehörigen Strahlen dieser projectivischen Strahlenbüschel parallel sind, dann sollen solche Dreiecke zwei projectivische Dreiecke in Bezug auf den gegebenen Kegelschnitt, und das diesem eingeschriebene, von den Durchschnittspunkten je zweier entsprechenden Strahlen der projectivischen Strahlenbüschel gebildete Dreieck ABC soll ein jenen complementäres Dreieck genannt werden.

Satz 1. In projectivischen oder complementären Dreiecken sind die Verhältnisse je zweier entsprechenden reducirten Seiten einander gleich.

Beweis. Werden die Seiten zweier projectivischen Dreiecke mit $a_1 b_1 c_1$, $a_{11} b_{11} c_{11}$, die Seiten des ihnen complementären Dreiecks mit abc und die resp. gegenüberliegenden Winkel mit $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_{11} \beta_{11} \gamma_{11}$, $\alpha\beta\gamma$ bezeichnet, und zwar so, dass die je zwei entsprechenden Seiten a_1, a_{11} der projectivischen Dreiecke parallen Strahlen sich in der der Seite a des complementären Dreiecks gegenüberliegenden Ecke durchschneiden, dann ist nach A I 1)

$$b_{0_1} c_{0_1} \sin\alpha_1 = b_0 c_0 \sin\alpha = b_{0_{11}} c_{0_{11}} \sin\alpha_{11},$$
$$a_{0_1} c_{0_1} \sin\beta_1 = a_0 c_0 \sin\beta = a_{0_{11}} c_{0_{11}} \sin\beta_{11},$$
$$a_{0_1} b_{0_1} \sin\gamma_1 = a_0 b_0 \sin\gamma = a_{0_{11}} b_{0_{11}} \sin\gamma_{11},$$

also indem wir je zwei dieser Gleichungen durch einander dividiren und an Stelle des Sinusverhältnisses der Winkel das Verhältniss der gegenüberliegenden Seiten setzen:

$$1)\qquad \frac{a_1}{a_{0_1}} : \frac{b_1}{b_{0_1}} : \frac{c_1}{c_{0_1}} = \frac{a}{a_0} : \frac{b}{b_0} : \frac{c}{c_0} = \frac{a_{11}}{a_{0_{11}}} : \frac{b_{11}}{b_{0_{11}}} : \frac{c_{11}}{c_{0_{11}}}.$$

Daraus ziehen wir auch den Schluss, dass die Flächen projectivischer oder complementärer Dreiecke sich zu einander verhalten wie die reducirten Quadrate irgend zweier entsprechenden Seiten. Natürlich können nach der oben angegebenen Definition zwei ganz beliebige Dreiecke stets zu projectivischen oder complementären in Bezug auf einen Kegelschnitt gemacht werden. Denn wenn die Seiten zweier Dreiecke in irgend einer Reihenfolge mit $a_1 b_1 c_1$, $a_{11} b_{11} c_{11}$ bezeichnet werden, und man zieht durch zwei willkürlich gewählte Punkte $M_1 M_{11}$ parallele Strahlen $s_{a_1} s_{b_1} s_{c_1}$, $s_{a_{11}} s_{b_{11}} s_{c_{11}}$ zu den Seiten dieser Dreiecke, so bestimmen die Durchschnittspunkte ABC je zweier entsprechenden Strahlen $s_{a_1} s_{a_{11}}$, $s_{b_1} s_{b_{11}}$, $s_{c_1} s_{c_{11}}$ mit den Mittelpunktnn $M_1 M_{11}$ der beiden Strahlenbüschel einen Kegelschnitt, in Bezug auf welchen die gegebenen Dreiecke projectivisch sind.

Der Satz 1 bleibt ungeändert, falls irgend zwei Strahlen projectivischer Strahlenbüschel parallel werden oder ein Strahl mit der Tangente im Mittelpunkte des betreffenden Büschels zusammenfällt, oder ein Strahlenbündel die Ecke des complementären Dreiecks zum Mittelpunkte hat, d. h. zwei Strahlen mit den in dieser Ecke sich durchschneidenden Seiten zusammenfallen, während der dritte zur Tangente an der Curve in derselben Ecke wird. Jedes einem Kegelschnitte eingeschriebene Dreieck ist also

insbesondere complementär zu allen Dreiecken, deren Seiten je zwei Seiten des gegebenen Dreiecks und der Tangente in der zugehörigen Ecke parallel sind. Letztere Dreiecke sind dann unter sich projectivisch. In einem gewöhnlichen rechtwinkligen Dreieck sind nach dieser Definition die durch die Höhe abgeschnittenen Dreiecke unter sich projectivisch in Bezug auf den umschriebenen Kreis, aber jedes complementär dem Ganzen.

Satz 2. Die algebraische Summe der reducirten Producte aus den Strahlen eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen Strahlenbüschels in die entsprechenden Seiten eines zugeordneten oder diesem projectivischen oder complementären Dreiecks ist constant gleich Null.

Beweis. Man verbinde die Ecken eines Sehnendreiecks ABC mit zwei willkürlichen Punkten $M_1 M_{11}$ im Umfange der Curve durch die resp. zusammengehörigen Strahlen $s_{a_1} s_{b_1} s_{c_1}$, $s_{a_{11}} s_{b_{11}} s_{c_{11}}$ und construire zwei Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_{11} B_{11} C_{11}$, deren Seiten diesen Strahlen parallel sind, so ist irgend eines der Dreiecke, z. B. $a_1 b_1 c_1$, dem parallelen Strahlenbüschel $s_{a_1} s_{b_1} s_{c_1}$ zugeordnet, dem andern Dreieck $a_{11} b_{11} c_{11}$ projectivisch, und das gegebene, dessen Ecken auf der Curve liegen und dessen Seiten abc sein sollen, beiden complementär. Ziehen wir nun durch eine Ecke A_1 des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ zur Mittelpunktstangente des conjugirten Strahlenbüschels $s_{a_1} s_b s_{c_1}$ eine Parallele, welche die gegenüberliegende Seite a_1 im Punkte D_1 entweder innerlich oder äusserlich in die Abschnitte $B_1 D_1$ und $C_1 D_1$ theilt, so ist

$$\triangle A M_1 C \text{ compl. } \triangle A_1 B_1 D_1, \quad \triangle A M_1 B \text{ compl. } \triangle A_1 C_1 D_1,$$

$$\frac{B_1 D_1 \cdot s_{a_1}}{a_{0_1}^2} = \frac{c_1 \cdot s_{c_1}}{c_{0_1}^2}, \quad \frac{C_1 D_1 \cdot s_{a_1}}{a_{0_1}^2} = \frac{b_1 \cdot s_{b_1}}{b_{0_1}^2}.$$

Diese Gleichungen sind zu addiren oder zu subtrahiren, je nachdem die Theilung eine innerliche oder äusserliche war, und dann ergiebt sich

$$\text{a)} \qquad \frac{a_1 \cdot s_{a_1}}{a_{0_1}^2} + \frac{b_1 \cdot s_{b_1}}{b_{0_1}^2} = \frac{c_1 \cdot s_{c_1}}{c_{0_1}^2}.$$

Die Vorzeichen der einzelnen Producte sind ganz allgemein dadurch zu bestimmen, dass wir uns die Seiten des Dreiecks in irgend einem stetigen Zuge und die Strahlen des parallelen Büschels jeden in der Richtung vom Mittelpunkte bis zum Durchschnitte mit der Curve durchlaufen denken. Alsdann ist denjenigen Producten, deren so definirte Factoren gleichgerichtet sind, ein positives, den mit entgegengesetzt gerichteten Factoren ein negatives Vorzeichen zu ertheilen und die entstandene algebraische Summe $=0$ zu setzen.

Weiter ist das Dreieck $a_1 b_1 c_1$ dem Dreieck $a_{11} b_{11} c_{11}$ projectivisch, daher verhält sich nach Satz 1



$$\frac{a_1}{a_{0_1}}:\frac{b_1}{b_{0_1}}:\frac{c_1}{c_{0_1}}=\frac{a_{11}}{a_{0_{11}}}:\frac{b_{11}}{b_{0_{11}}}:\frac{c_{11}}{c_{0_{11}}},$$

und wenn wir nun in a) die Verhältnisse mit dem Index (1) durch die mit dem Index (11) ersetzen, so geht jene Gleichung über in

$$\text{b)}\qquad \frac{a_{11}\,.\,s_{a_1}}{a_{0_{11}}\,.\,a_{0_1}}+\frac{b_{11}\,.\,s_{b_1}}{b_{0_{11}}\,.\,b_{0_1}}=\frac{c_{11}\,.\,s_{c_1}}{c_{0_{11}}\,.\,c_{0_1}}.$$

Drittens ist auch das Dreieck abc complementär dem Dreieck $a_1 b_1 c_1$, daher verhält sich

$$\frac{a_1}{a_{0_1}}:\frac{b_1}{b_{0_1}}:\frac{c_1}{c_{0_1}}=\frac{a}{a_0}:\frac{b}{b_0}:\frac{c}{c_0},$$

und dem entsprechend transformirt, wird die Gleichung a)

$$\text{c)}\qquad \frac{a\,.\,s_{a_1}}{a_0\,.\,a_{0_1}}+\frac{b\,.\,s_{b_1}}{b_0\,.\,b_{0_1}}=\frac{c\,.\,s_{c_1}}{c_0\,.\,c_{0_1}}.$$

Dies ist der für alle Kegelschnitte erweiterte ptolemäische Lehrsatz, welcher aber auch in dieser Gestalt wiederum einer Verallgemeinerung fähig ist.

Es seien zwei beliebige Systeme cartesischer Coordinaten XY, UV und ein Kegelschnitt gegeben. Das den Coordinaten xy, uv eines Punktes P parallele Strahlenbüschel M, $s_x s_y s_u s_v$ bestimmt im Umfange der Curve ein Viereck $XYUV$ mit den Seiten $XV=a$, $YV=b$, $XU=d$, $YU=e$ und den Diagonalen $UV=c$, $XY=f$. Je drei aus irgend einer Ecke dieses Vierecks, z. B. V, nach den anderen Ecken XYU gezogenen Strahlen sollen die den resp. Coordinaten xyu entsprechenden Strahlen des complementären Vierecks genannt werden. Dann gilt der Satz:

Satz 3. Die algebraische Summe der reducirten Producte aus je drei Coordinaten eines Punktes in Bezug auf zwei beliebige Coordinatensysteme, multiplicirt mit den entsprechenden Strahlen des complementären Vierecks ist constant gleich Null.

Beweis. Nennen wir den gemeinsamen Anfangspunkt beider Coordinatensysteme A, die Durchschnittspunkte der Coordinate y mit den Axen XU resp. BE, die Durchschnittspunkte der v Coordinate mit denselben Axen resp. DC, dann finden, indem wir zur Abkürzung jede Reduction einer Strecke durch den Index (r) andeuten, die Proportionen statt:

$$\triangle ACD \text{ compl. } \triangle XUV,\qquad \triangle BDP \text{ compl. } \triangle XYV,$$

$$\frac{AD_r}{c_r}=\frac{u_r}{a_r}=\frac{CD_r}{d_r},\qquad \frac{BD_r}{b_r}=\frac{y_r}{a_r}=\frac{DP_r}{f_r};$$

$$\triangle ABE \text{ compl. } \triangle XYV,\qquad \triangle CEP \text{ compl. } \triangle YUV,$$

$$\frac{AE_r}{f_r}=\frac{x_r}{c_r}=\frac{BE_r}{d_r},\qquad \frac{CE_r}{b_r}=\frac{v_r}{e_r}=\frac{EP_r}{c_r}.$$

Durch passende Combination dieser Proportionen ergeben sich die Gleichungen

$$3)\quad \begin{aligned} &\frac{a}{a_0}\cdot\frac{x}{x_0}+\frac{b}{b_0}\cdot\frac{y}{y_0}=\frac{c}{c_0}\cdot\frac{u}{u_0}, \quad \frac{d}{d_0}\cdot\frac{u}{u_0}+\frac{a}{a_0}\cdot\frac{v}{v_0}=\frac{f}{f_0}\cdot\frac{y}{y_0},\\ -&\frac{d}{d_0}\cdot\frac{x}{x_0}+\frac{c}{c_0}\cdot\frac{y}{y_0}=\frac{c}{c_0}\cdot\frac{v}{v_0}, \quad \frac{e}{e_0}\cdot\frac{u}{u_0}-\frac{b}{b_0}\cdot\frac{v}{v_0}=\frac{f}{f_0}\cdot\frac{x}{x_0}, \end{aligned}$$

und darin liegt der Satz. Die Bestimmung der Vorzeichen ist wie oben. Man durchläuft das Dreieck der drei betreffenden Coordinatenrichtungen in einem stetigen Zuge, vergleicht mit der Richtung der parallelen Strahlen und überträgt deren Vorzeichen auf die entsprechenden Strahlen des complementären Vierecks.

Je nachdem der Punkt P auf einer der Axen $UVXY$ gewählt wird, gehen die Gleichungen 3) einzeln in 2c) über.

Nimmt man zum Mittelpunkte M des irgend drei Coordinaten xyv parallelen Strahlenbüschels $s_x\, s_y\, s_u$ den Berührungspunkt einer der vierten Coordinate v parallelen Tangente an die Curve, so fallen die entsprechenden Strahlen des complementären Vierecks abc mit $s_x s_y s_a$ zusammen und es ist

$$\frac{ax}{x_0^2}+\frac{by}{y_0^2}=\frac{cu}{u_0^2}.$$

Wenn also die Coordinaten $x_1 y_1$ irgend eines Punktes einer Geraden in einem beliebigen Coordinatensysteme XY oder dessen Entfernung p vom Anfangspunkte dieser Coordinaten bekannt sind, und man zieht durch einen Punkt M im Umfange eines Kegelschnittes sowohl zu den Coordinatenaxen XY, wie zu p und der Richtung der Geraden parallele Strahlen, so entsprechen den drei ersten Richtungen die von der vierten Ecke V des complementären Vierecks auslaufenden Strahlen abc und es erfüllen die zusammengehörigen Coordinaten xy aller Punkte der gegebenen Geraden die Gleichung

$$\frac{a}{a_0}\cdot\frac{x}{x_0}+\frac{b}{b_0}\cdot\frac{y}{y_0}=\frac{c}{c_0}\cdot\frac{p}{p_0},$$

falls der Punkt M beliebig im Umfange der Curve gewählt wurde. Aber sie erfüllen die Gleichung

$$\frac{ax}{x_0^2}+\frac{by}{y_0^2}=\frac{cp}{p_0^2},$$

wenn jener Punkt in den Berührungspunkt einer der gegebenen Geradenparallelen Tangente fällt.

Auch die Formen a) und b) des Satzes 2 lassen sich erweitern, nur in anderer Weise. Definiren wir nämlich projectivische N-Ecke als solche N-Ecke, welche sich von einem Punkte aus in projectivische Dreiecke zerlegen lassen, dann ist leicht zu erweisen, dass für projectivische N-Ecke die den obigen durchaus analogen Sätze gelten.

Satz 4. In projectivischen N-Ecken sind die Verhältnisse je zweier entsprechenden reducirten Seiten einander gleich.

Satz 5. Die Flächen projectivischer N-Ecke verhalten sich zu einander wie die reducirten Quadrate irgend zweier entsprechenden reducirten Seiten.

Satz 6. Die algebraische Summe der reducirten Producte aus den Strahlen eines einem Kegelschnitte eingeschriebenen n-strahligen Büschels in die entsprechenden Seiten eines zugeordneten oder diesem projectivischen N-Ecks ist constant gleich Null.

In diesem Falle sind die Vorzeichen der einzelnen Producte wieder in der mehrfach definirten Art zu bestimmen, dass die Seiten des N-Ecks in einem stetigen Zuge durchlaufen und ihre Richtungen mit den Richtungen der parallelen Strahlen des zugeordneten Büschels verglichen werden. Die allgemeinste Form des betreffenden Satzes ist hiernach

$$\text{a)} \qquad \frac{a\,.\,s_a}{a_0^2}+\frac{b\,.\,s_b}{b_0^2}+\frac{c\,.\,s_c}{c_0^2}+\ldots\frac{n\,.\,s_n}{n_0^2}=0.$$

Und wenn n Punkte eines Kegelschnittes $ABCD\ldots N$ mit einem beliebigen $(n+1)^{\text{ten}}$ S verbunden werden, und man construirt ein diesem Strahlenbüschel $s_a s_b s_c \ldots s_n$ zugeordnetes N-Eck $abc\ldots n$, so erfüllen die durch dieselben Punkte $ABC\ldots N$ bestimmten Strahlen $x_a x_b x_c \ldots x_n$ eines beliebigen andern Punktes X auf der Curve stets die Gleichung

$$\text{b)} \qquad \frac{a}{a_0}\,.\,\frac{x_a}{x_{a_0}}+\frac{b}{b_0}\,.\,\frac{x_b}{x_{b_0}}+\frac{c}{c_0}\,.\,\frac{x_c}{x_{c_0}}+\ldots\frac{n}{n_0}\,.\,\frac{x_n}{x_{n_0}}=0.$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung ein Dreieck, dessen Hypotenuse c die Richtung eines Durchmessers einer Ellipse, resp. Hyperbel hat und dessen Katheten a, b irgend zwei Sehnen parallel sind, welche einen Punkt im Umfange der Curve mit den Endpunkten jenes Durchmessers verbinden, als ein elliptisches, resp. hyperbolisches Dreieck, hingegen ein Dreieck, dessen Hypotenuse c die Richtung des Durchmessers einer Parabel hat, während seine Katheten a, b ganz beliebig gerichtet sind, als ein parabolisches Dreieck. Dann lässt sich ebenso, wie für das rechtwinklige Dreieck mittels ähnlichen, so für das elliptische, resp. hyperbolische durch complementäre Dreiecke der dem pythagoräischen analoge Satz erweisen:

$$\frac{a^2}{a_0^2}\pm\frac{b^2}{b_0^2}=\frac{c^2}{c_0^2},$$

welcher für das parabolische Dreieck in die weiter unten erklärte Gleichung

$$\frac{a}{a_0}=\frac{b}{b_0}$$

übergeht. Construiren wir also über den Seiten eines elliptischen, hyperbolischen oder parabolischen Dreiecks projectivische N-Ecke in entsprechender Lage (in Bezug auf die Parabel als Reductionscurve verschwindet das N-Eck über der Hypotenuse), so ist nach Satz 5:



α) für das elliptische Dreieck: die Summe der N-Ecke über den Katheten gleich dem N-Eck über der Hypotenuse:

$$N_a + N_b = N_c;$$

β) für das hyperbolische Dreieck: die Differenz der N-Ecke über den Katheten gleich dem N-Eck über der Hypotenuse:

$$N_a - N_b = N_c;$$

γ) für das parabolische Dreieck: das N-Eck über der einen Kathete gleich dem N-Eck über der andern:

$$N_a = N_b.$$

Endlich will ich noch bemerken, dass alle in diesem Paragraphen vorgenommenen Reductionen von Strecken auch durch Normalen, oder die dritten Wurzeln aus den betreffenden Parametern bewerkstelligt werden können, worauf ich später zurückkomme.

§ 4.

Ich gehe nach dieser Abschweifung in der Entwickelung des Haupttheorems A) weiter und unterwerfe zu dem Zwecke die Grundgleichung α) des § 2 einer ausführlichen Discussion. Um festzustellen, welche Bedeutung die Grösse

$$\alpha)\qquad a_0 \,.\, b_0 \,.\, c_0 \,.\, k = \frac{R^{3/2} \,.\, \sin w}{2\,(AE^2 - 2\,BDE + CD^2)},$$

welche nur von der Lage des Reductionspunktes abhängt, für den betreffenden Kegelschnitt hat, führe man an Stelle von R seinen Werth nach 3), § 2, ein und setze das Aggregat

$$\beta)\qquad 2\,\frac{(AE^2 - 2\,BDE + CD^2)^{1/2}}{(A\beta^2 + 2\,B\alpha\beta + C\alpha^2)^{3/2}\sin w} = p_\varrho,$$

so ist in Bezug auf eine ganz beliebige Hilfsrichtung $\varrho(\alpha\beta)$ immer

$$1)\qquad a_0 \,.\, b_0 \,.\, c_0 \,.\, k = \frac{\varrho_0^{\,3}}{p_\varrho}.$$

Wenn nun insbesondere eine Seite a des dem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks der gegebenen Hilfsrichtung ϱ parallel wird, und wir verlegen den Reductionspunkt in den Mittelpunkt einer der anderen Seiten b, so geht diese Gleichung, indem wir den Winkel der dritten Seite c mit der Hilfsrichtung φ nennen, über in

$$\gamma)\qquad p_\varrho = 2\,\frac{\varrho_0^{\,2}}{c_0 \sin\varphi}.$$

Diese Relation bleibt unverändert, wenn die der Richtung ϱ parallele Sehne zur Tangente wird und wir den Reductionspunkt in den Mittelpunkt einer beliebigen, durch deren Berührungspunkt gezogenen Sehne c verlegen, welche mit der Tangente den Winkel φ bildet. Nennen wir p_ϱ den einer



bestimmten Richtung $\varrho(\alpha\beta)$ entsprechenden Parameter des Kegelschnittes, so kann ein solcher Parameter nach γ) geometrisch construirt werden. Wählen wir also den allgemeinen Reductionspunkt im Mittelpunkte einer Sehne der Curve von dieser Grösse und Richtung, so wird $2\varrho_0 = p_\varrho$ und die Gleichung 1) geht über in

$$2)\qquad a_0 \,.\, b_0 \,.\, c_0 \,.\, k = \frac{p^2_\varrho}{8}.$$

Zur Auffindung der so definirten Reductionspunkte aber müssen wir die Mittelpunktscurven von denen, deren Mittelpunkt im Unendlichen liegt, scheiden.

Wird im ersten Falle die beliebige Sehne, in deren Halbirungspunkt wir den Reductionspunkt verlegten, ein Durchmesser, so gehen die Reductionsproportionalen der Seiten jedes über ihm beschriebenen Dreiecks, insbesondere desjenigen, dessen Seite das unendlich kleine geradlinige Element ist, welches die Tangente im Endpunkte des Durchmessers mit der Curve gemein hat, in conjugirte Halbmesser des Kegelschnittes über. Nennen wir also den Winkel, welchen ϱ_0 mit seinem conjugirten Halbmesser σ_0 bildet, ε, so ist

$$\delta)\qquad p_\varrho = 2\,\frac{\varrho_0^{\;2}}{\sigma_0 \sin\varepsilon}.$$

Nun muss aber der Mittelpunkt der dem Halbmesser ϱ_0 parallelen Parametersehne p_ϱ auf σ_0 liegen, folglich haben wir auch nach 3), § 2, die Gleichung

$$\frac{(p_\varrho/_2)^2}{\varrho_0^{\;2}} = \frac{\sigma_1\sigma_{11}}{\sigma_0^{\;2}},$$

wenn $\sigma_1\sigma_{11}$ die Abschnitte bezeichnen, in welche der Durchmesser $2\sigma_0$ durch die Parametersehne getheilt wird. Zur Bestimmung der Lage des Mittelpunktes dieser Sehne auf ihrem conjugirten Durchmesser ergiebt sich also durch Combination beider Gleichungen die Constructionsformel

$$a)\qquad \sigma_1\sigma_{11} = \frac{\varrho_0^{\;2}}{\sin^2\varepsilon},$$

während die Einzelwerthe derselben Abschnitte für die

Ellipse: $\qquad$ Hyperbel:

$$\sigma = \sigma_0 \pm \sqrt{\sigma_0^{\;2} - \frac{\varrho_0^{\;2}}{\sin^2\varepsilon}}, \qquad \sigma = \sqrt{\sigma_0^{\;2} \pm \frac{\varrho_0^{\;2}}{\sin^2\varepsilon}} + \sigma_0$$

sind. Darnach können die in 2) geforderten Reductionspunkte für eine beliebige Richtung ϱ geometrisch gefunden werden.

Der für den Parameter p_ϱ in conjugirten Halbmessern der Curve und dem Sinus ihres Winkels gegebene Ausdruck δ) ist einer Umformung fähig. Verlegen wir nämlich den Reductionspunkt in den Mittelpunkt der Seite a eines beliebigen, einem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreiecks abc, so ist

$$b_0 c_0 \sin\alpha = 2\,\frac{\varrho_0^{\;3}}{p_\varrho}$$

eine für dieselbe Sehne a constante Grösse, wo man den Scheitel des gegenüberliegenden Peripheriewinkels α im Umfange der Curve auch wählen mag. Geht aber die Sehne in einen Durchmesser über, so ist für den Mittelpunkt als Reductionspunkt dasselbe Product eine absolut constante Grösse, weil jeder Durchmesser in diesem Mittelpunkte halbirt wird, und man kann sie gleich dem Producte der beiden, auf einander senkrechten conjugirten Halbaxen der Curve setzen:

$$b_0 c_0 \sin\alpha = a b.$$

Darnach ist

$$\delta)\qquad 2\frac{\varrho_0^2}{\sigma_0 \sin\varepsilon} = p_\varrho = 2\frac{\varrho_0^3}{a b}.$$

Wenn wir also den allgemeinen Reductionspunkt in den Mittelpunkt des Kegelschnittes verlegen, so ist nach 2) immer

$$3)\qquad a_0 b_0 c_0 \,.\, k = \frac{a b}{2}.$$

Ferner wird, je nachdem ϱ_0 den Werth b oder den Werth a annimmt:

$$p_b = 2\frac{b^2}{a},\quad p_a = 2\frac{a^2}{b}.$$

Der dem sogenannten Hauptparameter $p_b = p$ entsprechende, in 2) geforderte Reductionspunkt ist einer der Brennpunkte der Curve, und man findet die Grösse des einer beliebigen andern Richtung ϱ entsprechenden Parameters aus dem Hauptparameter durch die Gleichung

$$\varepsilon)\qquad p_\varrho = \frac{a^3}{\sigma_0^3 \sin^3\varepsilon}\cdot p,$$

wo σ_0 wieder den zur Richtung ϱ conjugirten Halbmesser und ε den Conjugationswinkel bezeichnet.

Für die Ellipse geben p_a und p_b gleichzeitig den grössten und kleinsten Werth des Parameters p_ϱ an; dagegen wird bei der Hyperbel $p_\varrho = \infty$, wenn ϱ die Richtung einer Asymptote hat, also seine Componenten $\alpha\beta$ der Bedingung $A\beta^2 + 2B\alpha\beta + C\alpha^2 = 0$ Genüge leisten. In diesem Falle sind die unendlich entfernten Punkte der Curve die geforderten Reductionspunkte Andererseits werden für die Ellipse diese Reductionspunkte imaginär, wenn $\sigma_0 < \frac{\varrho_0}{\sin\varepsilon}$ ist und dem Parameter der Richtung ϱ auch keine reelle Parametersehne entspricht. Alsdann müssen aber immer die der conjugirten Richtung σ entsprechenden Reductionspunkte reell sein.

Bei der Hyperbel sind natürlich die den imaginären Durchmessern der Hauptcurve entsprechenden Parametersehnen, also auch die zugehörigen Reductionspunkte in der conjugirten Curve zu suchen. Für diese giebt es auch ausser dem Mittelpunkte noch vier andere Reductionspunkte, in Bezug auf welche die Gleichung gilt:

$$a_0 b_0 c_0 \,.\, k = \frac{a b}{2}.$$

Wenn nämlich $\sigma_0 = \frac{\varrho_0}{\sin\varepsilon}$ wird, so muss auch

$$\frac{p_\varrho}{2} = \sqrt{ab} = \varrho_0$$

sein. In Bezug auf die Ellipse liefert dies kein neues Resultat, weil alsdann $\sigma_1 = \sigma_0 = \sigma_{11}$ ist, d. h. der Reductionspunkt in den Mittelpunkt der Curve fällt. Aber für die Hyperbel ergiebt sich

$$\sigma_1 = (\sqrt{2}+1)\,\sigma_0, \quad \sigma_{11} = (\sqrt{2}-1)\,\sigma_0.$$

Beschreiben wir also mit der mittleren Proportionale der beiden Halbaxen aus dem Centrum der Hyperbel einen Kreis, so geben die den Durchschnittspunkten mit der Curve entsprechenden Radien des Kreises gleichzeitig die Grösse der ihren Richtungen entsprechenden halben Parameter an, und die vier gesuchten Reductionspunkte liegen auf den conjugirten Durchmessern dieser Radien so, dass sie dieselben äusserlich im Verhältniss von $(\sqrt{2}+1):(\sqrt{2}-1)$ theilen. Wird die Hauptcurve von der mittleren Proportionale nicht geschnitten, so gilt dasselbe für die conjugirte Curve. Bei der Ellipse trennen die wie oben gefundenen Halbmesser die Richtungen mit reellen von denen mit imaginären Reductionspunkten. Wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht, so muss für jede Richtung von ϱ $p_\varrho = \varrho_0$ sein, und wenn die Hyperbel eine gleichseitige wird, so fallen die vier charakteristischen Reductionspunkte zu je zweien entweder mit den Brennpunkten der conjugirten oder der Hauptcurve zusammen.

Ich will noch hinzufügen, dass die Bedingung $\frac{p_\varrho}{2} = \varrho_0$, weil für den Mittelpunkt als Reductionspunkt

$$R = \frac{AE^2 - 2BDE + CD^2}{AC - B^2}$$

ist, nach 3), § 2, und δ), § 4, dann erfüllt wird, wenn

$$(A\beta^2 + 2B\alpha\beta + C\alpha^2)^2 = \frac{AC - B^2}{\sin^2 w},$$

also das Quadrat des Polynoms der Componenten von ϱ gleich der Invariante der allgemeinen Gleichung ist.

Im Grenzfalle, wenn der Mittelpunkt des Kegelschnitts ins Unendliche rückt, können wir allerdings diesen Mittelpunkt nicht als Reductionspunkt benutzen; jedoch bleibt die Bestimmung von p_ϱ eine durchaus analoge. Denken wir uns dann die Gleichung der Curve auf ein Coordinatensystem transformirt, dessen X-Axe ein Durchmesser ist, so muss in der transformirten Gleichung der Coefficient von x^2 und wegen $AC - B^2 = 0$ auch B verschwinden. Bezeichnen wir also wieder die in Bezug auf irgend einen Punkt genommene Reductionsproportionale einer beliebigen Richtung ϱ mit ϱ_0 und den endlichen Abschnitt, welcher von der Curve auf einem durch

denselben Reductionspunkt gezogenen Durchmesser bestimmt wird, mit σ, so wird für ein derartiges Coordinatensystem

b) $$\varrho_0^2 = \frac{R}{A\beta^2}, \quad \sigma = -\frac{R}{2E},$$

und wenn ε den Winkel bezeichnet, welchen ϱ mit σ bildet, wegen $\beta = \frac{\sin\varepsilon}{\sin w}$:

ζ) $$p_\varrho = 2\frac{(AE^2)^{1/2}}{(A\beta^2)^{3/2}\sin w} = 2\frac{E\sin^2 w}{A\sin^3\varepsilon} = \frac{\varrho_0^2}{\sigma\sin\varepsilon}.$$

Bringen wir mit dieser Gleichung, welche den einer beliebigen Hilfsrichtung ϱ entsprechenden Parameter p_ϱ geometrisch bestimmen lehrt, nach b) die andere:

$$\frac{(p_\varrho 2)^2}{\varrho_0^2} = \frac{\sigma_1}{\sigma}$$

in Verbindung, wo σ_1 den endlichen Abschnitt eines durch den Mittelpunkt der Parametersehne p_ϱ gezogenen Durchmessers bezeichnet, so resultirt zur geometrischen Construction dieses Mittelpunktes die Formel

c) $$4\sigma\sigma_1 = \frac{\sigma_0^2}{\sin^2\varepsilon}.$$

Aus derselben Gleichung ζ) erkennen wir auch, dass

d) $$\frac{\varrho_a^2\sin^2\varepsilon}{\sigma} = 2\frac{E^2\sin^2 w}{A}$$

für jeden Reductionspunkt R und jede Richtung ϱ einen absolut constanten Werth hat, weil zufolge der Relationen 1, 2, § 2, bei jeder Coordinatentransformation, welche die Richtung der X-Axe ungeändert lässt, auch E und $\frac{A}{\sin^2 w}$ unverändert bleiben. Die geometrische Bedeutung dieser Constanten ergiebt sich aus derselben Gleichung. Sie ist der einer Senkrechten zur Hauptrichtung entsprechende Parameter der Curve, weil für eine solche Sichtung $\sin\varepsilon = 1$ wird. Bezeichnen wir wieder diesen Hauptparameter mit p und nennen die Reductionsproportionale einer Senkrechten zur Hauptaxe in Bezug auf den allgemeinen Reductionspunkt p_0, so ist

e) $$\varrho_0\sin\varepsilon = p_0 = \sqrt{p.\sigma} = \varrho_{0_1}\sin\varepsilon_1$$

eine für denselben Reductionspunkt constante Grösse. Wenn man also in diesem Punkte auf beliebigen Richtungen Senkrechte von der Grösse ihrer Reductionsproportionalen errichtet, so liegen die Endpunkte aller dieser Reductionsproportionalen auf einer Senkrechten zur Hauptaxe, welche vom Reductionspunkte den angegebenen Abstand hat. Darin liegt nun auch der in § 3 benutzte Satz vom parabolischen Dreieck. Denn wenn ϱ, ϱ_1 die Seiten eines Dreiecks sind, dessen Grundlinie die Richtung des Durchmessers einer Parabel hat, und ε, ε_1 deren resp. Winkel mit dieser Richtung bedeuten, so gelten die Gleichungen



$$\varrho \sin \varepsilon = \varrho_1 \sin \varepsilon_1,$$
$$\varrho_0 \sin \varepsilon = \varrho_{0_1} \sin \varepsilon_1,$$

woraus folgt

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \frac{\varrho_1}{\varrho_{0_1}}.$$

Die Formel, durch welche man den einer beliebigen Richtung ϱ entsprechenden Parameter p_ϱ aus dem Hauptparameter findet:

g) $$p_\varrho = \frac{p}{\sin^3 \varepsilon},$$

weicht darum von der bekannten ab, weil man bisher mit $\frac{\varrho_0^2}{\sigma} = p_\varrho \sin \varepsilon$ den Parameter desjenigen Durchmessers σ bezeichnete, welcher mit seiner conjugirten Richtung den Winkel ε bildet. Ich glaube aber, es ist durch die allgemeine Bedeutung des Aggregats β) hinreichend begründet, wenn wir diese Bezeichnung fallen lassen und vielmehr

$$\frac{\varrho_0^2}{\sigma \sin \varepsilon} = p_\varrho$$

den einer gegebenen Richtung $\varrho(\alpha\beta)$ entsprechenden Parameter nennen.

Der Werth, welchen ein so definirter Parameter der Parabel mit den Richtungscomponenten α, β in einem ganz beliebigen Coordinatensystem annimmt, ist, indem $\sqrt{A} = a$, $\sqrt{C} = c$ gesetzt wird, nach β)

$$p_\varrho = 2 \frac{aE - cD}{(a\beta + c\alpha)^3 \sin w}.$$

Ich verfolge diesen Gegenstand hier nicht weiter, sondern wende mich nun zur Ableitung der anderen Formen desselben Theoremes A).

§ 5.

Aus der ersten Form des Theorems A I 1) ergiebt sich, dass die Sinus irgend zweier Peripheriewinkel über derselben Sehne eines Kegelschnittes sich umgekehrt zu einander verhalten, wie die Producte aus den Reductionsproportionalen ihrer Schenkel:

a) $$b_0 c_0 \sin \alpha = b_{0_1} c_{0_1} \sin \alpha_1.$$

Hieraus schliessen wir weiter, dass, wenn man den Mittelpunkt der Curve als Reductionspunkt wählt und durch diesen Punkt zu zwei Paar conjugirten Richtungen des Kegelschnittes parallele Halbmesser zieht, so ist das Dreieck, welches durch irgend zwei dieser Halbmesser bestimmt wird, gleich dem Dreieck unter den beiden anderen. Wenn also $a_0 b_0$ und $c_0 d_0$ irgend zwei Paar conjugirte Halbmesser einer Centralcurve sind, so ist nicht nur

$$a_0 b_0 \sin \varepsilon = c_0 d_0 \sin \varepsilon_1,$$

wo ε, ε_1 die resp. Conjugationswinkel bedeuten, sondern auch

b) $$\begin{cases} b_0 c_0 \sin\varphi = a_0 d_0 \sin\varphi_1, \\ a_0 c_0 \sin\psi = b_0 d_0 \sin\psi_1, \end{cases}$$

wo φ, φ_1, ψ, ψ_1 immer die von den betreffenden Halbmessern, mit deren Product ihre Sinus multiplicirt erscheinen, eingeschlossenen Winkel bezeichnen.

Hiernach findet man die Länge der Normale ϱ_c irgend eines Punktes C in der Ebene einer Mittelpunktscurve auf seine Polare c, wenn r die Centrallinie des Punktes, ψ, ψ_1 die Winkel von r und ϱ_c resp. mit der Haupt- und Nebenaxe und a, b die Längen dieser halben Axen bedeuten, aus der Gleichung

$$a r_0 \sin\psi = b c_0 \sin\psi_1,$$

indem man an Stelle von $\frac{\sin\psi}{\sin\psi_1}$ das Verhältniss $\frac{\varrho_c}{r}$ einführt:

c) $$\varrho_c = \frac{b}{a} \cdot \frac{r}{r_0} \cdot c_0.$$

Liegt der Punct C auf der Curve, so wird $\frac{r}{r_0} = 1$ und demgemäss

$$\varrho_{c_0} = \frac{b}{a} \cdot c_0.$$

Wenn nach dieser Formel die den Halbmessern a_0, b_0, c_0 entsprechenden Normalen ϱ_{a_0}, ϱ_{b_0}, ϱ_{c_0} in die Gleichung 3), § 4, substituirt werden, so resultirt die zweite Form des Theorems A I):

A I 2) $$\varrho_{a_0} \varrho_{b_0} \varrho_{c_0} \cdot k = \frac{p^2}{8},$$

wo die Constante p den Hauptparameter des Kegelschnitts bezeichnet, so dass dieselbe Gleichung auch für den Grenzfall der Parabel ihre Giltigkeit beibehalten muss.

Führt man aber an Stelle von a_0, b_0, c_0 ihre nach ε), § 4:

$$\varrho_0 = \left(\frac{a b}{2}\right)^{1/3} \cdot p_\varrho^{1/3},$$

in Parametern ausgedrückten Werthe ein, so heben sich die Producte der Halbaxen fort und die Gleichung 3), § 4, geht, wenn p_a, p_b, p_c die den Seiten abc entsprechenden Parameter bezeichnen, über in

A I 3) $$p_a^{1/3} p_b^{1/3} p_c^{1/3} \cdot k = 1.$$

Dieselbe Relation kann unmittelbar aus β, § 4, gefunden werden, indem darnach, wenn der Abkürzung halber das Aggregat

$$A E^2 - 2 B D E + C D^2 = R_0$$

gesetzt wird:

$$p_a = 2 \frac{R_0^{1/2}}{C^{3/2} \sin w}, \quad p_c = 2 \frac{R_0^{1/2}}{A^{3/2} \sin w},$$

$$p_b = \frac{A^{3/2} C^{3/2} R_0^{1/2}}{4 R_0^{3/2} \cdot \sin w} \cdot b^3$$

ist. Das Product der dritten Wurzeln dieser Parameter, multiplicirt mit $\frac{\sin w}{b} = k$, ist constant $= 1$.

Die vollständige Form I des Theorems A) lässt sich darnach in die Fassung bringen:

A I) $$r_a r_b r_c \,.\, k = r_{a_1} r_{b_1} r_{c_1} \,.\, k_1,$$

wo die mit Indices versehenen Factoren (r) entweder Reductionsportionalen in Bezug auf einen beliebigen Punkt oder Normalen an den Berührungspunkten der den Seiten parallelen Tangenten oder die dritten Wurzeln aus den diesen Seiten entsprechenden Parametern der Curve bedeuten.

Um den zweiten Theil desselben Theorems zu erweisen, denke man sich durch einen willkürlich gewählten Punkt C in der Ebene einer Centralcurve unter irgend einem Winkel φ zwei beliebige Secanten gezogen und construire deren Pole A, B. Ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes M, der Durchschnittspunkt von AB mit CM: E, und setzen wir zur Abkürzung

$$AB = c, \quad CM = r, \quad BM = s, \quad AM = t, \quad EM = r_1,$$

nennen die resp. parallelen Halbmesser der Curve c_0, r_0, s_0, t_0, die den gegebenen Secanten parallelen Halbmesser a_0, b_0, die halben Hauptaxen ab und die Winkel bei $E_1 M$ resp. $\varepsilon_1 \psi$, so lässt sich in diesem Polarsystem der Inhalt des Dreiecks AMB auf doppelte Weise ausdrücken durch die Gleichung

$$c r_1 \sin\varepsilon = s t \sin\varphi.$$

Wenn wir aber mit dieser Gleichung die anderen in Verbindung bringen:

$$a_0 b_0 \sin\varphi = s_0 t_0 \sin\varphi, \quad c_0 r_0 \sin\varepsilon = a b,$$
$$r r_1 = r_0^2,$$

von denen die letztere eine Anwendung der Formeln b) auf ein elliptisches (hyperbolisches) Dreieck ist, so ergiebt sich

1) $$\frac{r s t}{r_0 s_0 t_0} \cdot \frac{a_0 b_0 c_0 \sin\varphi}{c} = a b.$$

Setzen wir wieder das Verhältniss $\frac{\sin\varphi}{c} = k$, den Coefficienten $\frac{rst}{r_0 s_0 t_0} = \lambda$ und gehen nun rückwärts von den Halbmessern $a_0 b_0 c_0$ des Kegelschnittes auf Reductionsproportionalen derselben Richtungen in Bezug auf einen beliebigen festen Punkt über, behalten aber dafür die gleiche Bezeichnung $a_0 b_0 c_0$ bei, so ist nach 3), § 2, und δ), § 4:

A II 1) $$(K)\; a_0 b_0 c_0 \,.\, k = 2\,\frac{\varrho_0^3}{p_\varrho},$$

wo ϱ_0 die Reductionsproportionale einer beliebigen Hilfsrichtung ϱ und p_ϱ den entsprechenden Parameter der Curve bedeutet.

Für den Grenzfall der Parabel verschwindet der Coefficient λ, weil sein Werth constant gleich 1 wird, und die ganze Gleichung kann nach e) und ζ) oder y), § 4, auch geschrieben werden:

2) $$a_0 b_0 c_0 \,.\, k = 2 p^{1/2} \,.\, \sigma^{3/2},$$

wenn p der Hauptparameter und σ der endliche Abschnitt ist, welcher von dem gegebenen Reductionspunkte auf dem durch ihn gezogenen Durchmesser bestimmt wird. Wählt man den Reductionspunkt am Mittelpunkte einer Parametersehne, z. B. im Brennpunkte, so ist für alle Kegelschnitte übereinstimmend

3) $$(\lambda)\, a_0 b_0 c_0 \,.\, k = \frac{p^2}{4}.$$

Führen wir in der Gleichung 1) an Stelle der Halbmesser $a_0 b_0 c_0$ ihre nach c) ausgedrückten Werthe in Normalen ein, so nimmt sie die Form an:

A II 2) $$\varrho_a \varrho_b \varrho_c \,.\, k = \frac{p^2}{4},$$

und dies ist der im Eingange gegebene Satz a) des § 1. Wird aber die analoge Substitution mittels Parametern nach δ), § 4, ausgeführt, so ist

A II 3) $$(\lambda)\,.\, p_a^{1/3} p_b^{1/3} p_c^{1/3} \,.\, k = 2.$$

Darnach lässt sich das ganze Theorem A II in die Fassung bringen:

A II) $$(\lambda)\, r_a r_b r_c \,.\, k = (K_1)\, r_{a_1} r_{b_1} r_{c_1} \,.\, k_1,$$

wo $r_a\, r_b\, r_c$ die dreifache Bedeutung von Reductionsproportionalen, Normalen oder dritten Wurzeln aus Parametern haben können und der Coefficient λ für den Grenzfall der Parabel $= 1$ wird.

Wenn insbesondere von den drei Punkten A, B, C jeder der Pol der Verbindungslinie der beiden anderen, also das Dreieck ABC ein in Bezug auf den Kegelschnitt sich selbst conjugirtes ist, so kann man auch

$$\frac{\sin\varphi}{c} = k = 2\,\frac{\Sigma}{abc}$$

setzen, wo Σ den Gehalt des Dreiecks und a, b, c seine Seiten bezeichnen. Dasselbe gilt für ein Dreieck, welches von zwei Tangenten eines Kegelschnittes und ihrer Berührungssehne gebildet wird; nur reducirt sich in diesem Falle der Coefficient $\lambda = \frac{r s t}{r_0 s_0 t_0}$ auf $\frac{r}{r_0}$ und die Normalen $\varrho_a\, \varrho_b$ werden zu $\varrho_{a_0} \varrho_{b_0} \varrho_{c_0}$, d. h. ihr Fusspunkt liegt auf der Curve.

Fällt einer der Punkte A, B, C, z. B. C, in die Hauptaxe, so geht die ihm entsprechende Normale in die Subnormale irgend eines Punktes seiner Ordinate über, welche man nach der allgemeinen Formel

c) $$\frac{b}{a} \cdot \frac{r}{r_0} \cdot c_0 = \varrho_c = \left(\frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^{2/3} \cdot \left(\frac{pc}{2}\right)^{1/3}$$

findet aus

d) $$\frac{b^2}{a^2} \cdot r = \sigma = \left(\frac{r}{a}\right) \frac{p}{2},$$

wo wieder $\frac{r}{a}$ für die Parabel verschwindet. — Mit Hilfe dieses II. Theiles des Theorems A) werden wir nun leicht vom Sehnendreieck, für welches Theil I galt, auf das Tangentendreieck eines Kegelschnittes übergehen können. Bezeichnen wir zu dem Zwecke die Seiten (Winkel) eines Tangentendreiecks, sowie die Winkel (Seiten) des zugehörigen Sehnendreiecks mit a, b, c (α, β, γ), und der Kürze halber die Verhältnisse, aus denen der Coefficient λ besteht, nach den vorhandenen Ecken mit $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ dann ist nach

AI:

$$1)\qquad \frac{r_\alpha r_\beta r_\gamma \sin a}{\alpha} = \frac{r_{a_1} r_{b_1} r_{c_1} \sin a_1}{\alpha_1};$$

AII:

$$2)\qquad \beta_r\gamma_r \cdot \frac{r_\beta r_\gamma r_a \sin a}{a} = \beta_{r_1}\gamma_{r_1} \cdot \frac{r_{\beta_1} r_{\gamma_1} r_{a_1} \sin a_1}{a_1},$$

$$3)\qquad \alpha_r \cdot \frac{r_a r_b r_c \sin \alpha}{\alpha} = \alpha_{r_1} \cdot \frac{r_{a_1} r_{b_1} r_{c_1} \sin \alpha_1}{\alpha_1},$$

und wenn man die Gleichungen 2), 3) mit einander multiplicirt und durch die 1) dividirt:

$$\text{AIII)}\qquad (\lambda)\, r_a r_b r_c \cdot k = (\lambda_1)\, r_{a_1} r_{b_1} r_{c_1} \cdot k_1.$$

Specialisirt und mit den correspondirenden Sätzen vom Sehnendreieck zusammengestellt, ist für das

Sehnendreieck:	Tangentendreieck:
1) $a_0 b_0 c_0 k = \frac{ab}{2}\left(\frac{p^2}{8}\right)$,	1) $(\lambda)\, a_0 b_0 c_0 k = 2ab\left(\frac{p^2}{2}\right)$,
2) $\varrho_{a_0}\varrho_{b_0}\varrho_{c_0} k = \frac{p^2}{8}$,	2) $(\lambda)\, \varrho_{a_0}\varrho_{b_0}\varrho_{c_0} k = \frac{p^2}{2}$,
3) $p_a^{1/3} p_b^{1/3} p_c^{1/3} k = 1$,	3) $(\lambda)\, p_a^{1/3} p_b^{1/3} p_c^{1/3} = 4$,

wo in den 1) Gleichungen der Reductionspunkt entweder im Mittelpunkte einer Centralcurve oder allgemein im Brennpunkte des Kegelschnitts liegen soll. Natürlich kann in allen Fällen an Stelle von k auch $2\frac{\Sigma}{abc}$ eingeführt werden, wenn Σ der Inhalt des Dreiecks abc ist.

Wenn man insbesondere eine Seite des Sehnendreiecks unendlich klein werden lässt und darauf zur Polarfigur übergeht, so resultiren für das von zwei Tangenten eines Kegelschnittes t, t_1 und ihrer Berührungssehne s gebildete Dreieck stt_1 $(\varphi\psi\psi_1)$ die Sätze:

1) $\frac{s_0^2 t_0 \sin\psi_1}{s} = \frac{ab}{2}\left(\frac{p^2}{8}\right)$,	1) $(\lambda^2)\frac{t_0 t_{0_1}^2 \sin\varphi}{t_1} = 2ab\left(\frac{p^2}{2}\right)$,
2) $\frac{\varrho_{s_0}^2 \varrho_{t_0} \sin\psi_1}{s} = \frac{p^2}{8}$,	2) $(\lambda^2)\frac{\varrho_{t_0}\varrho_{t_{0_1}} \sin\varphi}{t_1} = \frac{p^2}{2}$
3) $p_{s_0}^{2/3} p_{t_0}^{1/3} \sin\psi_1 = 1$,	3) $(\lambda^2)\frac{p_{t_0}^{1/3} p_{t_{0_1}}^{2/3} \sin\varphi}{t_1} = 4$,

wo aber nun $K = \frac{r}{r_0}$ sich nur auf den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten bezieht.

§ 6.

Anwendung des Theorems A) auf einige Fundamentalsätze der neueren Geometrie.

1. Der Satz des Pappus. Wenn man je n nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Ecken eines beliebigen, einem Kegelschnitt eingeschriebenen $2N$-Ecks mit einem Punkte im Umfange der Curve verbindet, so ist das involutorische Verhältniss aus den Sinus der Winkel, welche diese Strahlen mit den Seiten des $2N$-Ecks bilden, für jede Lage des Punktes auf dem Kegelschnitte constant.

Beweis. Nehmen wir der Kürze wegen an, das $2N$-Eck sei ein Sechseck, bezeichnen die Seiten desselben mit I II III IV V VI, die Strahlen nach den Ecken mit $a\,b\,c\,d\,e\,f$ (a nach I II), die Winkel je dreier nicht unmittelbar aufeinanderfolgender Strahlen mit den Seiten durch $a_{\mathrm{I}}\, c_{\mathrm{III}}\, e_{\mathrm{V}}$, $a_{\mathrm{II}}\, c_{\mathrm{IV}}\, e_{\mathrm{VI}}$, so ist zufolge des allgemeinen Theorems A I) insbesondere

$$r_a r_{\mathrm{I}} \sin a_{\mathrm{I}} = r_e r_{\mathrm{VI}} \sin e_{\mathrm{VI}},$$
$$r_c r_{\mathrm{III}} \sin c_{\mathrm{III}} = r_a r_{\mathrm{II}} \sin a_{\mathrm{II}},$$
$$r_e r_{\mathrm{V}} \sin e_{\mathrm{V}} = r_c r_{\mathrm{IV}} \sin c_{\mathrm{IV}},$$

also indem man diese Gleichungen mit einander multiplicirt:

$$1) \qquad \frac{\sin a_{\mathrm{I}} \,.\, \sin c_{\mathrm{III}} \,.\, \sin e_{\mathrm{II}}}{\sin a_{\mathrm{II}} \,.\, \sin c_{\mathrm{IV}} \,.\, \sin e_{\mathrm{VI}}} = \frac{r_{\mathrm{II}} \,.\, r_{\mathrm{IV}} \,.\, r_{\mathrm{VI}}}{r_{\mathrm{I}} \,.\, r_{\mathrm{III}} \,.\, r_{\mathrm{V}}} = \lambda_s,$$

wo die mit den Indices der Seiten versehenen Symbole (r) die bekannte dreifache Bedeutung haben können, und die Constante λ_s darnach geometrisch zu interpretiren ist.

2. Der reciproke Satz. Wenn man je n nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Seiten eines beliebigen, einem Kegelschnitte umschriebenen $2N$-Ecks mittels irgend einer Tangente an die Curve durchschneidet, so ist das involutorische Verhältniss der Abschnitte, welche diese Durchschnittspunkte auf den betreffenden Seiten bestimmen, für jede Lage der Tangente constant.

Beweis. Bezeichnen wir z. B. die Ecken eines Tangentensechsecks mit I II III IV V VI, seine Seiten in derselben Reihenfolge mit 123456 (I II = 1), nennen die Durchschnittspunkte der willkürlich gewählten Tangente mit den Seiten $a\,b\,c\,d\,e\,f$, die Abschnitte auf je drei nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden Seiten 135, resp. $\mathrm{I}_a\, \mathrm{III}_c\, \mathrm{V}_e$, $\mathrm{II}_a\, \mathrm{IV}_c\, \mathrm{VI}_e$, endlich die

Verhältnisse des Coefficienten λ aus den Centrallinien durch die parallelen Halbmesser nach den zugehörigen Ecken $I_r\, II_r\, III_r \ldots$, $a_r\, b_r\, c_r \ldots$, so ist zufolge des Theorems A_{III}, nachdem die übereinstimmenden Glieder auf beiden Seiten der Gleichungen unterdrückt worden sind, insbesondere:

$$(a_r\, I_r)\,\frac{r_1}{I_a} = (e_r\, VI_r)\,\frac{r_5}{VI_e},$$

$$(c_r\, III_r)\,\frac{r_3}{III_c} = (a_r\, II_r)\,\frac{r_1}{II_a},$$

$$(e_r\, V_r)\,\frac{r_5}{V_e} = (c_r\, IV_r)\,\frac{r_3}{IV_c},$$

wo wenn man diese Gleichungen multiplicirt:

$$\text{2)} \qquad \frac{I_a\,.\,III_c\,.\,V_e}{II_a\,.\,IV_c\,.\,VI_e} = \left(\frac{I_r\,.\,III_r\,.\,V_r}{II_r\,.\,IV_r\,.\,VI_r}\right) = (\lambda_t),$$

und für den Grenzfall der Parabel die Constante $\lambda_t = 1$ wird.

3. **Der Satz von Chasles.** Wenn ein Punkt im Umfang eines Kegelschnitts mit den Ecken eines ihm eingeschriebenen $2N$-Ecks verbunden wird, so ist das involutorische Verhältniss aus den Sinus der Winkel, welche diese Strahlen mit einander bilden, für jede Lage des Punktes auf der Curve constant.

Beweis. Bezeichnen wir die von den Strahlen $a\,b\,c\,d\,e\,f$ gebildeten Winkel den Seiten $I\,II\,III\,IV\,V\,VI$ eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks entsprechend mit 1 2 3 4 5 6, so finden nach A_I die Gleichungen statt:

$$r_f\,\frac{r_I\,\sin 1}{I} = r_b\,\frac{r_{II}\,\sin 2}{II},$$

$$r_b\,\frac{r_{III}\,\sin 3}{III} = r_d\,\frac{r_{IV}\,\sin 4}{IV},$$

$$r_d\,\frac{r_V\,\sin 5}{V} = r_f\,\frac{r_{II}\,\sin 6}{VI}.$$

Durch Multiplication ergiebt sich also:

$$\text{3)} \qquad \frac{\sin 1\,.\,\sin 3\,.\,\sin 5}{\sin 2\,.\,\sin 4\,.\,\sin 6} = \lambda_s\,.\,\frac{I\,.\,III\,.\,V}{II\,.\,IV\,.\,VI},$$

wo der Factor λ_s der Constanten derselbe ist, wie in 1). Hieraus folgt, dass die Verbindungslinien von irgend zwei Punkten eines Kegelschnitts mit n festen Punkten im Umfang desselben zwei projectivische Strahlenbüschel sind, weil insbesondere das Doppelschnittverhältniss von je vier Strahlen eines Büschels constant ist.

4. **Der reciproke Satz.** Wenn eine beliebige Tangente eines Kegelschnitts die Seiten eines ihm umschriebenen $2N$-Ecks durchschneidet, so ist das involutorische Verhältniss der Abschnitte auf dieser Tangente für jede Lage derselben constant.



Beweis. Nennen wir die Seiten eines Tangentensechsecks 1 2 3 4 5 6, die Ecken in derselben Reihenfolge I II III IV V VI (I II = 1) und ebenso die resp. diesen Ecken gegenüberliegenden Abschnitte auf der Tangente, aber deren Durchschnittspunkte mit den Seiten resp. $a\,b\,c\,d\,e\,f$, so finden nach A_{III} mit Unterdrückung der übereinstimmenden Glieder auf beiden Seiten die Gleichungen statt:

$$(f_r\,\text{I}_r)\frac{r_6 \sin \text{I}}{\text{I}} = (b_r\text{II}_r)\frac{r_2 \sin \text{II}}{\text{II}},$$

$$(b_r\,\text{III}_r)\frac{r_2 \sin \text{III}}{\text{III}} = (d_r\,\text{IV}_r)\frac{r_4 \sin \text{IV}}{\text{IV}},$$

$$(d_r\,\text{V}_r)\frac{r_4 \sin \text{V}}{\text{V}} = (f_r\,\text{VI}_r)\frac{r_6 \sin \text{VI}}{\text{VI}}.$$

Durch Multiplication derselben ergiebt sich:

$$4)\qquad \frac{\text{I}\,.\,\text{III}\,.\,\text{V}}{\text{II}\,.\,\text{IV}\,.\,\text{VI}} = (K_t)\,\frac{\sin \text{I}\,.\,\sin \text{III}\,.\,\sin \text{V}}{\sin \text{II}\,.\,\sin \text{IV}\,.\,\sin \text{VI}},$$

wo der Factor λ_t der Constanten derselbe ist, wie in 2) und für die Parabel verschwindet.

Hieraus ziehen wir den Schluss, dass n feste Tangenten eines Kegelschnitts auf zwei beliebigen anderen Tangenten projectivische Punktreihen bestimmen, weil insbesondere das Doppelschnittsverhältniss von je vier Punkten einer Reihe constant ist.

5. Wenn man $2n$ Punkte in der Ebene durch einen stetigen Zug mit einander verbindet und das entstandene $2N$-Eck mittels irgend eines Kegelschnitts polarisirt, so ist das involutorische Verhältniss der reducirten Seiten des einen gleich dem involutorischen Verhältniss aus dem Sinus der entsprechenden Winkel des anderen in die reducirten Centrallinien ihrer Scheitel.

Beweis. Bezeichnen wir die aufeinanderfolgenden Seiten der einen, sowie die Ecken der anderen Figur mit I II III IV V VI, und die Ecken der ersten, sowie die Seiten ihrer Polarfigur in derselben Reihenfolge mit 1 2 3 4 5 6 (1 2 = I), so ist zufolge des Theorems A_{II} nach Wegwerfung der übereinstimmenden Factoren auf beiden Seiten:

$$(1_r\,\text{I}_r)\frac{r_1\,r_{\text{I}} \sin \text{I}}{\text{I}} = (3_r\,\text{II}_r)\frac{r_3\,r_{\text{II}} \sin \text{II}}{\text{II}},$$

$$(3_r\,\text{III}_r)\frac{r_3\,r_{\text{III}} \sin \text{III}}{\text{III}} = (5_r\text{IV}_r)\frac{r_5\,r_{\text{IV}} \sin \text{IV}}{\text{IV}},$$

$$(5_r\,\text{V}_r)\frac{r_5\,r_{\text{V}} \sin \text{V}}{\text{V}} = (1_r\,\text{VI}_r)\frac{r_1\,r_{\text{VI}} \sin \text{VI}}{\text{VI}},$$

also wenn man die Gleichungen multiplicirt:

$$5)\qquad \frac{r_{II} r_{IV} r_{VI}}{r_I\, r_{III}\, r_V} \cdot \frac{I\,.\,III\,.\,V}{II\,.\,IV\,.\,VI} = \frac{I_r\, III_r\, V_r}{II_r\, IV_r\, VI_r} \cdot \frac{\sin I\,.\,\sin III\,.\,\sin V}{\sin II\,.\,\sin IV\,.\,\sin VI}.$$

Dieser Satz bleibt nun insbesondere auch für den Fall giltig, dass die beiden Polarfiguren demselben Kegelschnitt eingeschrieben und umschrieben sind, d. h. es ist, indem wir wieder die in 3) und 4) gebrauchten Abkürzungen einführen, wenn I II III IV V VI sowohl die Seiten eines Sehnen-, als auch die Winkel des zugehörigen Tangenten-Sechsecks bezeichnen:

$$\lambda_s \cdot \frac{I\,.\,III\,.\,V}{II\,.\,IV\,.\,VI} = (\lambda_t)\, \frac{\sin I\,.\,\sin III\,.\,\sin V}{\sin II\,.\,\sin IV\,.\,\sin VI}.$$

Bringt man von den drei Formen des Theorems A_{II} die einfachste mit Normalen in Anwendung, so geht der Satz 5) über in b) § 1.

6. Der Satz von Carnot. Wenn die Seiten eines beliebigen N-Ecks von einem Kegelschnitt durchschnitten werden, so bestimmt dieser auf den Seiten desselben $4n$ Abschnitte, unter denen das Product aus n-mal zu je zwei von einer Ecke auslaufenden und im Sinne eines stetigen Zuges der Seiten genommenen gleich ist dem Product der anderen.

Beweis. Der Carnot'sche Satz lässt sich auflösen in den einfacheren:

Für alle Gerade, die durch ein und denselben Punkt gehen, ist das reducirte Product der Abschnitte, welche durch irgend einen Kegelschnitt auf ihnen bestimmt werden, constant.

Und dieser Satz ist wiederum zu zerlegen nach A_I. Denn wenn $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ die Abschnitte auf irgend zwei Secanten bezeichnen, ca die resp. Verbindungslinien der Endpunkte von $b_1 a_2$ und $a_1 b_2$ auf der Curve, $\alpha_1 \alpha_2$, $\beta_1 \beta_2$ die den Seiten $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ in den Dreiecken $a_1 b_2 d$, $b_1 a_2 c$ gegenüberliegenden Winkel, so ist:

$$r_a r_c \sin\beta_1 = r_b r_d \sin\alpha_1,$$
$$r_a r_d \sin\beta_2 = r_b r_c \sin\alpha_2,$$

oder durch Multiplication, und indem an Stelle der Sinusverhältnisse $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_2}$, $\frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_2}$, die Verhältnisse der Seiten $\frac{a_1}{b_2}$, $\frac{b_1}{a_2}$ eingeführt werden:

$$\alpha)\qquad \frac{a_1 a_2}{r_a^2} = \frac{b_1 b_2}{r_b^2}.$$

Nennen wir also z. B. die Seiten irgend eines Vierecks $abcd$, die Ecken in derselben Reihenfolge $ABCD\,(AB = a)$, die Durchschnittspunkte der Seiten $abcd$ mit irgend einem Kegelschnitte 12, 34, 56, 78, und die Abschnitte auf den Seiten von den Ecken $ABCD$ aus $A_1 A_2 A_7 A_8$, $B_1 B_2 B_3 B_4$, $C_3 C_4 C_5 C_6$, $D_5 D_6 D_7 D_8$, so ist nach α):



$$\frac{A_1 A_2}{r_a^2} = \frac{A_7 A_8}{r_d^2}, \quad \frac{C_5 C_6}{r_c^2} = \frac{C_3 C_4}{r_b^2},$$

$$\frac{B_3 B_4}{r_b^2} = \frac{B_1 B_2}{r_a^2}, \quad \frac{D_7 D_8}{r_d^2} = \frac{D_5 D_6}{r_c^2},$$

nd wenn wir diese Gleichungen mit einander multipliciren:

$$6) \qquad \frac{A_1 A_2 \, B_3 B_4 \, C_5 C_6 \, D_7 D_8}{B_1 B_2 \, C_3 C_4 \, D_5 D_6 \, A_7 A_8} = 1.$$

Hierdurch ist also die Bedingung ausgedrückt, unter welcher $2n$-Punkte ($n = 3, 4, 5..$) auf einem Kegelschnitt liegen.

7. Der reciproke Satz. Wenn aus den Ecken eines beliebigen N-Ecks Tangenten gezogen werden an einen Kegelschnitt, so bestimmen diese mit den Seiten $4n$ Winkel, unter denen n-mal zu je zwei von einer Seite im Sinne einer stetigen Reihenfolge der Ecken gebildeten ein Sinusproduct liefern, welches gleich ist dem Product aus dem Sinus der anderen.

Beweis. Auch dieser Satz lässt sich auflösen in einen einfacheren:

Für alle Punkte ein und derselben Geraden ist das Product aus den Sinus der Winkel, welche diese Gerade mit den aus dem gegebenen Punkte an irgend einen Kegelschnitt gezogenen Tangenten bildet, multiplicirt mit dem Product der Reductionsproportionalen dieser Tangenten und dem reducirten Quadrat der Centrallinie des Punktes, constant.

Derselbe ist aber weiter zu zerlegen nach A_{III}. Denn wenn $\alpha\beta$ zwei Punkte einer Geraden, $\alpha_r \, \beta_r$ ihre reducirten Centrallinien, $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$ die ihnen zugehörigen Winkel mit den resp. Tangenten $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, endlich $r_{a_1} r_{a_2}$, $r_{b_1} r_{b_2}$ die dreifach zu interpretirenden Reductionsproportionalen der entsprechenden Tangenten bedeuten, und man nimmt die Länge der Tangenten $a_1 a_2$ von α aus bis zum Durchschnitt mit resp. $b_2 b_1$, die Länge von $b_1 b_2$ von β aus bis zum Durchschnitt mit resp. $a_2 a_1$ und bezeichnet den Winkel $a_1 b_2$ mit δ, $a_2 b_1$ mit ε, so ist:

$$(\alpha_r \, \delta_r) \frac{r_{a_1}}{a_1} = (\beta_r \, \varepsilon_r) \frac{r_{b_1}}{b_1},$$

$$(\alpha_r \varepsilon_r) \frac{r_{a_2}}{a_2} = (\beta_r \, \delta_r) \frac{r_{b_2}}{b_2},$$

also indem diese Gleichungen mit einander multiplicirt und an Stelle der Seitenverhältnisse $\frac{a_1}{b_2}$, $\frac{a_2}{b_1}$ die Sinusverhältnisse der gegenüberliegenden Winkel $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2}$, $\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1}$ eingeführt werden:

$$\beta) \qquad (\alpha_r)^2 \,.\, r_{a_1} r_{b_1} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = (\beta_r)^2 \,.\, r_{b_1} r_{b_2} \sin \beta_1 \sin \beta_2.$$

Nennen wir nun die Ecken irgend eines N-Ecks, z. B. eines Vierecks, $abcd$, die Seiten $\alpha\beta\gamma\delta$ ($ab=\alpha$), den Tangenten aus den Ecken $abcd$ an irgend einen Kegelschnitt 12, 34, 56, 78, der Winkel der Seiten $\alpha\beta\gamma\delta$ mit diesen Tangenten $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6$, $\gamma_5\gamma_6\gamma_7\gamma_8$, $\delta_7\delta_8\delta_1\delta_2$, so ist nach β):

$$(a_r^2) \,.\, r_1 r_2 \,.\, \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = (b_r^2) \,.\, r_3 r_4 \,.\, \sin\alpha_3 \sin\alpha_4,$$
$$(b_r^2) \,.\, r_3 r_4 \,.\, \sin\beta_3 \sin\beta_4 = (c_r^2) \,.\, r_5 r_6 \,.\, \sin\beta_5 \sin\beta_6,$$
$$(c_r^2) \,.\, r_5 r_6 \,.\, \sin\gamma_5 \sin\gamma_6 = (d_r^2) \,.\, r_7 r_8 \,.\, \sin\gamma_7 \sin\gamma_8,$$
$$(d_r^2) \,.\, r_7 r_8 \,.\, \sin\delta_7 \sin\delta_8 = (a_r^2) \,.\, r_1 r_2 \,.\, \sin\delta_1 \sin\delta_2,$$

und wenn man multiplicirt:

$$7)\qquad \frac{\sin\alpha_1 \,.\, \sin\alpha_2 \,.\, \sin\beta_3 \,.\, \sin\beta_4 \,.\, \sin\gamma_5 \,.\, \sin\gamma_6 \,.\, \sin\delta_7 \,.\, \sin\delta_8}{\sin\delta_1 \,.\, \sin\delta_2 \,.\, \sin\alpha_3 \,.\, \sin\alpha_4 \,.\, \sin\beta_5 \,.\, \sin\beta_6 \,.\, \sin\gamma_7 \,.\, \sin\gamma_8} = 1.$$

Hierdurch ist also die Bedingung ausgedrückt, unter welcher $2n$ Gerade ($n = 3, 3, 5..$) einen Kegelschnitt berühren.

8. Der Satz des Menelaus. Wenn ein beliebiges N-Eck von irgend einer Transversale durchschnitten wird, so bestimmt diese auf den Seiten desselben Abschnitte, deren involutorisches Verhältniss constant $= 1$ ist.

Beweis. Verbinden wir einen Punkt P in der Ebene eines N-Ecks, z. B. eines Vierecks, mit den Ecken desselben und bezeichnen die durch diese Strahlen an den Ecken gebildeten Winkel in irgend einer Reihenfolge mit I II III .... VIII, so ergiebt sich aus dem Satz: die Seiten eines Dreiecks verhalten sich zu einander, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, dass das involutorische Verhältniss der Sinus jener Winkel $= 1$ ist:

$$\frac{\sin \mathrm{I} \,.\, \sin \mathrm{III} \,.\, \sin \mathrm{V} \,.\, \sin \mathrm{VII}}{\sin \mathrm{II} \,.\, \sin \mathrm{IV} \,.\, \sin \mathrm{VI} \,.\, \sin \mathrm{VIII}} = 1.$$

Polarisiren wir alsdann das Liniensystem mittels irgend eines Kegelschnitts und bezeichnen in der Polarfigur, die ein N-Eck darstellt, dessen Seiten sämmtlich von einer Geraden (der Polaren des Punktes P) durchschnitten werden, die Abschnitte auf den Seiten den Winkeln I II III .... VIII entsprechend mit I II III .... VIII, so verwandelt das Theorem A II die vorhergehende Relation in:

$$8)\qquad \frac{\mathrm{I} \,.\, \mathrm{III} \,.\, \mathrm{V} \,.\, \mathrm{VII}}{\mathrm{II} \,.\, \mathrm{IV} \,.\, \mathrm{VI} \,.\, \mathrm{VII}} = 1.$$

Wird ferner ein beliebiger Punkt Q in der Ebene des neuen Liniensystems mit den Durchschnittspunkten der Transversale verbunden und bezeichnet man die Winkel dieser Strahlen über den Abschnitten I II III ... VIII resp. mit 1 2 3 ... 8, so führt wieder ein einfacher trigonometrischer Schluss zu der Gleichung:

$$\frac{\sin 1 \,.\, \sin 3 \,.\, \sin 5 \,.\, \sin 7}{\sin 2 \,.\, \sin 4 \,.\, \sin 6 \,.\, \sin 8} = 1.$$

Die Polarfigur enthält den ursprünglichen Punkt P und die Polare von Q. Nennen wir also die auf dieser Polare den ursprünglichen Winkeln I II III.. VIII gegenüberliegenden Abschnitte resp. 123...8, so verwandelt wiederum das Theorem A_{II} die vorhergehende Relation aus:

8a) $$\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}=1.$$

Wenn ein Punkt in der Ebene eines N-Ecks mit den Ecken desselben verbunden wird, so bestimmen diese Strahlen mit den Seiten des N-Ecks auf einer beliebigen Transversalen Abschnitte, deren involutorisches Verhältniss constant $=1$ ist.

Unmittelbar aufeinander folgend heissen hier Abschnitte, welche Winkeln in den Ecken gegenüberliegen, den von zwei aufeinander folgenden Strahlen mit ein und derselben Seite und von zwei aufeinander folgenden Seiten mit ein und demselben Strahl gebildet werden.

Ist insbesondere das gegebene N-Eck ein Dreieck, so geht dieser Satz über in den von Desargues, weil er für 6 Transversalpunkte gleichzeitig die nothwendige und hinreichende Bedingung zu einer vollständigen Involution zweiten Grades liefert.

9. Erweiterung des Satzes von Pascal. Wenn $2n$ Punkte auf einem Kegelschnitt liegen, so müssen je zwei Seiten des durch sie bestimmten $2N$-Ecks, welche nur durch zwei aufeinanderfolgende Seiten von einander getrennt sind, sich ebenfalls in $2n$ Punkten eines Kegelschnitts durchschneiden.

Beweis. Werden z. B. 8 auf einem Kegelschnitt liegende Punkte 123...8 durch einen stetigen Zug verbunden, die Durchschnittspunkte der durch eine einzige andere getrennten Seiten 12—78, 12—34, 34—56, 56—78, resp. mit $A\,B\,C\,D$ und die Durchschnittspunkte der durch zwei andere getrennte Seiten 12—67, 12—45, 34—18, 34—67, 56—23, 56—18, 78—45, 78—23 resp. mit I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII bezeichnet, so bestimmen die 4 Seiten 18, 23, 45, 67 auf den Seiten des Vierecks $ABCD$ Abschnitte, deren involutorische Verhältnisse nach dem erweiterten Satz von Menelaus $=1$ sind:

$$\frac{A_1 B_{III} C_{VI} D_8}{B_1 C_{III} D_{VI} A_8}=1, \quad \frac{A_{II} B_4 C_5 D_{VII}}{B_{II} C_4 D_5 A_{VII}}=1,$$
$$\frac{A_2 B_3 C_V D_{VIII}}{B_2 C_3 D_V A_{VIII}}=1, \quad \frac{A_I B_{IV} C_6 D_7}{B_I C_{IV} D_6 A_7}=1.$$

Multipliciren wir diese Verhältnisse mit einander, so sind in dem resultirenden Quotienten die mit arabischen Indices versehenen Symbole nach dem Carnot'schen Satz zu unterdrücken, weil die Punkte 123...8 auf einem Kegelschnitt liegen. Also ist auch:



$$9)\qquad \frac{A_I A_{II} \,.\, B_{III} B_{IV} \,.\, C_V C_{VI} \,.\, D_{VII} D_{VIII}}{B_I B_{II} \,.\, C_{III} C_{IV} \,.\, D_V D_{VI} \,.\, A_{VII} A_{VIII}} = 1,$$

d. h. die Punkte I II III...VIII liegen wiederum auf einem Kegelschnitt.

Wenn $n > 3$ ist, so gehören zu jeder Seite des 2 N-Ecks ein Paar andere Seiten, welche von jener durch je zwei Seiten getrennt sind, und dann liegen auf jeder Seite des 2N-Ecks zwei Punkte des secundären Kegelschnitts. Wenn aber insbesondere $n = 3$ ist, so gehört zu einer Seite des gegebenen Sechsecks nur eine einzige andere Seite, welche von jener durch zwei Seiten getrennt ist. Alsdann fallen die im Allgemeinen zu zwei auf jeder Seite liegenden Punkte des secundären Kegelschnitts in einen einzigen Doppelpunkt zusammen und der Kegelschnitt geht in eine Gerade über, auf welcher die Durchschnittspunkte je dreier gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks liegen. Das ist der Satz von Pascal.

10. Erweiterung des Satzes von Brianchon. Wenn 2n-Gerade einen Kegelschnitt berühren, so müssen die Verbindungslinien je zweier Ecken des durch sie bestimmten 2N-Ecks, welche nur durch zwei aufeinanderfolgende Ecken getrennt sind, wiederum einen Kegelschnitt berühren.

Beweis. Werden z. B. 8 einen Kegelschnitt berührende Gerade mit 1 2 3...8, die Verbindungslinien der nur durch eine andere getrennten Ecken 1 2 — 3 4, 3 4 — 5 6, 5 6 — 7 8, 7 8 — 1 2 resp. mit $\alpha\beta\gamma\delta$ und die Verbindungslinien der nur durch zwei andere getrennten Ecken 1 2 — 6 7, 1 2 — 4 5, 3 4 — 1 8, 3 4 — 6 7, 5 6 — 2 3, 5 6 — 1 6, 7 8 — 4 5, 7 8 — 2 3 resp. mit I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII bezeichnet, so bilden die aus den Ecken 1 2, 2 3, 4 5, 6 7 nach den Ecken des Vierecks $\alpha\beta\gamma\delta$ gezogenen Strahlen mit den Seiten desselben Winkel, deren involutorische Sinusverhältnisse $= 1$ sind:

$$\frac{\sin\alpha_1 \,.\, \sin\beta_{III} \,.\, \sin\gamma_{VI} \,.\, \sin\delta_8}{\sin\delta_1 \,.\, \sin\alpha_{III} \,.\, \sin\beta_{VI} \,.\, \sin\gamma_8} = 1, \qquad \frac{\sin\alpha_{II} \,.\, \sin\beta_4 \,.\, \sin\gamma_5 \,.\, \sin\delta_{VII}}{\sin\delta_{II} \,.\, \sin\alpha_4 \,.\, \sin\beta_5 \,.\, \sin\gamma_{VII}} = 1,$$

$$\frac{\sin\alpha_2 \,.\, \sin\beta_3 \,.\, \sin\gamma_V \,.\, \sin\delta_{VIII}}{\sin\delta_2 \,.\, \sin\alpha_3 \,.\, \sin\beta_V \,.\, \sin\gamma_{VIII}} = 1, \qquad \frac{\sin\alpha_I \,.\, \sin\beta_{IV} \,.\, \sin\gamma_6 \,.\, \sin\delta_7}{\sin\delta_I \,.\, \sin\alpha_{IV} \,.\, \sin\beta_6 \,.\, \sin\gamma_7} = 1,$$

Multipliciren wir diese Verhältnisse mit einander und unterdrücken nach dem reciproken Carnot'schen Satz in dem resultirenden Quotienten die Sinus der mit arabischen Indices versehenen Winkel, so bleibt:

$$10)\quad \frac{\sin\alpha_I \,.\, \sin\alpha_{II} \,.\, \sin\beta_{III} \,.\, \sin\beta_{IV} \,.\, \sin\gamma_V \,.\, \sin\gamma_{VI} \,.\, \sin\delta_{VII} \,.\, \sin\delta_{VIII}}{\sin\delta_I \,.\, \sin\delta_{II} \,.\, \sin\alpha_{III} \,.\, \sin\alpha_{IV} \,.\, \sin\beta_V \,.\, \sin\beta_{VI} \,.\, \sin\gamma_{VII} \,.\, \sin\gamma_{VIII}} = 1,$$

d. h. die Geraden I II III...VIII berühren wiederum einen Kegelschnitt.

Ist $n > 3$, so gehören zu einer Ecke des gegebenen 2N-Ecks ein Paar andere Ecken, welche von jener durch je zwei Ecken getrennt sind,

also gehen auch von jeder solchen Ecke zwei Tangenten an den secundären Kegelschnitt aus. Wenn aber $n = 3$ wird, so gehört zu jeder Ecke des Tangentensechsecks nur eine einzige Ecke, welche von ihr durch zwei andere getrennt ist. Alsdann fallen die im Allgemeinen zu je zwei von einer Ecke ausgehenden Tangenten in eine einzige Doppeltangente zusammen und der Kegelschnitt reducirt sich auf einen Punkt, in welchem die Verbindungslinien je dreier gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks sich durchschneiden. Dies ist der Satz von Brianchon.

II.

Ueber Strahlensysteme, welche die Tangentenschaar einer Fläche bilden.

Von

Dr. Geisenheimer,

Lehrer an der Provinzial-Gewerbeschule zu Schweidnitz.

In den letzten Jahrzehnten haben sich die Mathematiker vielfach mit Strahlensystemen, also mit Gebilden von Geraden, deren jede durch einen beliebigen Punkt des Raumes geht, beschäftigt. Um eine der hervorragendsten Arbeiten auf diesem Gebiete zu nennen, brauchen wir nur an des berühmten Pluecker's Werk „über Linien-Complexe" zu erinnern. Derartige Untersuchungen waren schon in weit früherer Zeit für einen besonders wichtigen Fall, für die Normalen einer Fläche, durchgeführt worden. Ein Ergebniss dieser Untersuchung ist der Satz, dass sich sämmtliche Normalen einer Fläche in zwei Systeme abwickelbarer Flächen vereinigen lassen, deren Rückkehrkanten die Mittelpunkte der grössten und kleinsten Krümmung enthalten. Die Normalen lassen sich hiernach als eine Tangentenschaar der Krümmungsflächen auffassen. Diese Eigenschaft der Normalen legt die Frage nahe, welchen Bedingungen ein beliebiges Strahlensystem zu genügen habe, damit seine Linien sich als die Tangenten einer oder mehrerer Flächen construiren lassen. Vorliegende Arbeit sucht die hierauf hinzielenden Fragen zu lösen. Zuvor mögen jedoch die entsprechenden Untersuchungen für die Ebene gemacht, also die Bedingungen gesucht werden, welche ein ebenes Strahlensystem erfüllen muss, damit sämmtliche Strahlen die Tangenten einer Curve seien.

Die Gleichung einer Geraden des Systems, welche durch den Punkt $x\ y$ geht, sei

$$1) \qquad y - v = \varphi \cdot (x - u),$$

wo u, v die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden, φ eine stetige Function von x und y bedeutet. Untersuchen wir, unter welchen Bedingungen die Geraden des so bestimmten Systems als Tangenten einer Curve dürfen betrachtet werden. Die Gleichung dieser Curve laute:

$$f(\xi, \eta) = 0.$$

Die Gleichung einer Tangente an diese, welche durch den Punkt $x\ y$ läuft, ist

$$x - \xi = \frac{d\eta}{d\xi}(y - \eta).$$

Soll diese Tangente mit der erwähnten Geraden des Systems zusammenfallen, muss sein:

$$\varphi = \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Diese Gleichung muss stattfinden für jeden beliebigen Punkt der Geraden. Wählen wir statt $xx + dx$, statt $yy + dy$, bleiben aber in der betrachteten Geraden, so folgt:

$$d\varphi = 0$$

oder

$$2) \qquad \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Da wir in Richtung der Geraden fortschritten, ist

$$\frac{dy}{dx} = \varphi;$$

also muss der partiellen Differentialgleichung genügt werden:

$$2) \qquad \frac{d\varphi}{dx} + \varphi \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Durch einen beliebigen Punkt eines Systems können im Allgemeinen beliebig viele Strahlen gehen; denn bedeuten uv die Coordinaten dieses Punktes, xy diejenigen, durch welche sich die Richtung einer Geraden bestimmt, so laufen alle Linien, für welche xy der Gleichung

$$y - v = \varphi(x, y) \ . \ (x - u)$$

genügen, durch diesen Punkt u, v. Diese Gleichung liefert im Allgemeinen beliebig viele Werthe für x und y, daher durch einen beliebigen Punkt beliebig viele Strahlen gehen.

Ist jedoch die Gleichung 2) erfüllt, so schneiden sich in einem Punkte nicht mehr Strahlen, als φ Werthe besitzt. Aus der Entwickelung der Gleichung 2) geht hervor, dass φ für alle Punkte eines Strahls denselben Werth besitzt, daher die Richtungen sämmtlicher Strahlen, welche sich in einem Punkte schneiden, sich durch die Coordinaten

dieses Durchschnittspunktes bestimmen lassen. Daher finden sich nur so viele Strahlen, als Werthe für $\varphi\ (x,\ y)$.

Ist ein Strahlensystem so beschaffen, dass sich in einem Punkte nur eine endliche Zahl von Geraden schneidet, so heisse dasselbe ein „endlich bestimmtes". — Die Gleichung der die Geraden tangirenden Curve wird gefunden, indem der Berührungspunkt ξ, η einer Geraden als Durchschnittspunkt derselben mit der nächstfolgenden angesehen wird. Die Gleichung eines Strahls ist:

$$1)\qquad y - \eta = \varphi\,.\,(x - \xi).$$

Setzen wir hier statt x und y die um ihre Differentiale vermehrten Werthe, so erhalten wir, da ξ und η constant bleiben:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi + \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)(x - \xi).$$

Aus der Gleichung 1) folgt:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\,\varphi\,\frac{d\varphi}{dy}.$$

Dies eingesetzt, giebt:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi + \frac{d\varphi}{dy}\left(\frac{dy}{dx} - \varphi\right)(x - \xi)$$

oder

$$\left(\frac{dy}{dx} - \varphi\right)\left\{1 - \frac{d\varphi}{dy}\left(x - \xi\right)\right\} = 0.$$

Da die Gleichung der tangirenden Curve von dem willkürlichen Werthe $\frac{dy}{dx}$ unabhängig sein muss, folgt:

$$3)\qquad 1 - \frac{d\varphi}{dy}(x - \xi) = 0.$$

Die Gleichung $\frac{dy}{dx} - \varphi = 0$ liefert die Gleichung eines Strahls.

Die Gleichungen 1) und 3) liefern eine Gleichung zwischen ξ und η, da bei der Elimination von y gleichzeitig x wegfällt. Um sich hiervon zu überzeugen, differentiire man, nachdem alle Glieder auf eine Seite gebracht, 1) partiell nach x, indem man y als eine durch 3) gegebene Function von x ansieht. Man erhält, wie oben

$$\left(\frac{dy}{dx} - \varphi\right)\left\{1 - \frac{d\varphi}{dy}\left(x - \xi\right)\right\}.$$

Dieser Ausdruck ist, infolge von 3), identisch Null.

Diese Entwickelung liefert den Satz:

Die Strahlen eines endlich bestimmten ebenen Systems bilden die Tangenten einer Curve.

Die Bedingung, welcher das System zu genügen hatte, war:

$$\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\,\frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Die allgemeine Auflösung dieser partiellen Differentialgleichung ist

4) $$F(\varphi) + \varphi \cdot x = y + \text{Const.}$$

Wir differentiiren partiell nach x und y; so folgt:

$$F'(\varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dx} + x \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \varphi = 0 \qquad \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\varphi}{x + F'(\varphi)}.$$

$$F'(\varphi) \cdot \frac{d\varphi}{dy} + x \cdot \frac{d\varphi}{dy} = 1 \qquad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{x + F'(\varphi)}.$$

Hieraus ist die Richtigkeit der Lösung ersichtlich. Setzt man in 4) φ constant, so erhält man die Gleichung eines Strahls, die auch in folgender Weise gefunden wird.

Die Gleichung eines Strahls lautete:

$$y - v = \varphi \,.\, (x - u)$$
$$v = \varphi \,.\, u + y - \varphi x,$$

und 4) berücksichtigend, folgt

5) $$v = \varphi \,.\, u + F(\varphi).$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass φ für einen Strahl constant bleibt. Die durch 4) bestimmte Function ist also die allgemeinste, für welche ein System endlich bestimmt bleibt. Wie die Gleichung 5) zeigt, kann jede Gerade des Systems als abhängig von nur einer Variablen φ dargestellt werden, welche für diese Gerade constant bleibt. Die einhüllende Curve kann alsdann gefunden werden, indem man die Gleichung 5) partiell nach φ differentiirt, ergiebt sich also als Resultante der Gleichungen:

$$v = \varphi \,.\, u + F(\varphi),$$
$$0 = u + F'(\varphi).$$

Die entwickelten Sätze mögen auf ein Beispiel angewendet werden. Es sei

$$\varphi = \frac{y - \sqrt{y^2 - 2px}}{2x},$$

wo p eine Constante. Man findet

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y^2 - px - y\sqrt{y^2 - 2px}}{2x^2\sqrt{y^2 - 2px}} = -\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dy}.$$

Die Gleichung 2) ist demnach erfüllt und das System ein endlich bestimmtes. Die Gleichung eines Strahls ist

$$y - v = \frac{y - \sqrt{y^2 - 2px}}{2x}(x - u)$$

oder

$$v = \frac{y - \sqrt{y^2 - 2px}}{2x} \cdot u + y - \frac{y - \sqrt{y^2 - 2px}}{2}.$$

Es ist $y - \dfrac{y - \sqrt{y^2 - 2px}}{2} = \dfrac{p}{2\varphi}$,

also

$$F(\varphi) = \frac{p}{2\varphi}.$$

Die Gleichung des Strahls wird

$$v = \varphi \cdot u + \frac{p}{2\varphi}.$$

Um die Gleichung der einhüllenden Curve zu finden, differentiiren wir die letzte Gleichung nach φ und finden

$$u - \frac{p}{2\varphi^2} = 0.$$

Die Elimination von φ liefert

$$v^2 = 2pu.$$

Die Strahlen des Systems bilden also die Tangenten einer Parabel.

Die Gleichungen einer beliebigen Geraden eines Liniensystems im Raume seien:

1) $$z - w = \frac{x - u}{\varphi} = \frac{y - v}{\psi},$$

wo $x\,y\,z$ die Coordinaten des die Linie bestimmenden Punktes, $u\,v\,w$ die eines beliebigen Punktes derselben sind.

Unter gewissen Bedingungen gehören die durch Gleichung 1) bestimmten Geraden einer Fläche als Tangenten an. Die Gleichung derselben laute

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Die Gleichung einer Tangente an diese Fläche ist:

$$\frac{x - \xi}{d\xi} = \frac{y - \eta}{d\eta} = \frac{z - \zeta}{d\zeta}.$$

Setzen wir die partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right) = p, \quad \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = q$$

und den variablen Werth der totalen Ableitung $\frac{d\xi}{d\zeta} = \varepsilon$, so folgt aus der Differentialgleichung der Fläche, indem η als Function von ξ und ζ betrachtet wird:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = p + q\varepsilon.$$

Die Gleichung der Tangente wird

$$z - \zeta = \frac{x - \xi}{\varepsilon} = \frac{y - \eta}{p + q\varepsilon}.$$

Soll die Tangente mit einer Geraden des Systems zusammenfallen, so muss sein:

2) $$\varphi = \varepsilon.$$

3) $$\psi = p + q\varepsilon.$$

Das System ist nun endlich bestimmt oder nicht. Die Gleichung 1) zeigt, dass im Allgemeinen durch jeden Punkt $u\,v\,w$ beliebig viele Strahlen gehen, deren Richtung sich durch die Punkte $x\,y\,z$ bestimmt, welche der Gleichung 1) $z - w = \frac{x-u}{\varphi(x\,y\,z)} = \frac{y-v}{\psi(x\,y\,z)}$ genügen. Diese Strahlen bilden die Kanten eines Kegels, dessen Spitze der Punkt $u\,v\,w$ bildet, und welcher Kegel, wenn eine die Geraden berührende Fläche existirt, diese tangiren, also mit dem zu $u\,v\,w$ gehörigen Tangentialkegel zusammenfallen muss. Da jede Tangente, die von $u\,v\,w$ sich an die Fläche ziehen lässt, in diesem Tangentialkegel enthalten ist, folgt, dass das System im Allgemeinen jede beliebige Tangente der Fläche enthält.

Soll das System endlich bestimmt sein, d. h. durch einen Punkt nur eine bestimmte Zahl von Geraden des Systems sich legen lassen, so muss die durch Gleichung 1) bestimmte Curve mit der durch den Punkt $u\,v\,w$ bestimmten Geraden zusammenfallen; $x\,y\,z$ sind also Coordinaten der Punkte dieser Geraden, deren Gleichung lautet

$$z - w = \frac{x-u}{\varphi(u,\,v,\,w)} = \frac{y-v}{\psi(u,\,v,\,w)}.$$

Daher muss sein:

$$\varphi(x,\,y,\,z) = \varphi(u,\,v,\,w), \qquad \psi(x,\,y,\,z) = \psi(u,\,v,\,w).$$

Die Functionen φ und ψ haben also, falls das System endlich bestimmt ist, für alle Punkte einer dem System angehörigen Geraden denselben Werth.

Umgekehrt genügt die Bedingung, dass φ und ψ längs einer Geraden des Systems constant bleiben, dass das System endlich bestimmt bleibe, da sich alsdann nur so viele Geraden in einem Punkte schneiden, als φ mehrdeutige Werthe besitzt.

Untersuchen wir zunächst ein nicht endlich bestimmtes System; nehmen wir an, die Tangentialfläche sei gefunden, in dieser der Punkt $\xi\,\eta\,\zeta$ markirt, an diesen die Tangentialebene gelegt, und in dieser variire $x\,y\,z$. Da für sämmtliche Tangenten dieser Ebene $\xi\,\eta\,\zeta$ constant bleibt, ändern sich auch

$$\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right) = p \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = q$$

nicht. Die Differentiation der Gleichungen 2) und 3) liefert daher

$$d\varphi = d\varepsilon, \quad d\psi = q\,d\varepsilon.$$

$d\varphi$ und $d\psi$ bedeuten die totalen Incremente. Hieraus folgt

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = q. \tag{4}$$

Es ist

$$d\psi = \frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy + \frac{d\psi}{dz}dz\,.$$

Da wir $x\,y\,z$ in der Tangential-Ebene variiren lassen, müssen dx, dy, dz deren Gleichung genügen, also sein

$$dy = p\,dz + q\,dx,$$

$$d\psi = \left(\frac{d\psi}{dx} + q\frac{d\psi}{dy}\right)dx + \left(\frac{d\psi}{dz} + p\frac{d\psi}{dy}\right)dz.$$

Ebenso
$$d\varphi = \left(\frac{d\varphi}{dx} + q\frac{d\varphi}{dy}\right)dx + \left(\frac{d\varphi}{dz} + p\frac{d\varphi}{dy}\right)dz.$$

Nach 4) folgt:

$$q\left(\frac{d\varphi}{dx} + q\frac{d\varphi}{dy}\right) + q\left(\frac{d\varphi}{dz} + p\frac{d\varphi}{dy}\right)\frac{dz}{dx} =$$
$$\frac{d\psi}{dx} + q\frac{d\psi}{dy} + \left(\frac{d\psi}{dz} + p\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{dz}{dx}.$$

In dieser Gleichung bedeuten p, q, wie die partiellen Ableitungen feste Grössen, während $\frac{dz}{dx}$ für einen Punkt beliebige Werthe annehmen kann. Daher muss sein:

$$q\left(\frac{d\varphi}{dx} + q\frac{d\varphi}{dy}\right) = \frac{d\psi}{dx} + q\frac{d\psi}{dy},$$
$$q\left(\frac{d\varphi}{dx} + p\frac{d\varphi}{dy}\right) = \frac{d\psi}{dz} + p\frac{d\psi}{dy}.$$

Endlich folgt aus den Gleichungen 2) und 3)

$$\psi = p + q\,.\,\varphi.$$

Diese Gleichungen geben geordnet:

$$5)\qquad \frac{d\varphi}{dy}q^2 + \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right)q - \frac{d\psi}{dx} = 0,$$

$$6)\qquad p = \frac{\frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\cdot q}{\frac{d\varphi}{dy}\cdot q - \frac{d\psi}{dy}},$$

$$7)\qquad \psi = p + q\cdot\varphi.$$

Diese drei Gleichungen dürfen sich nicht widersprechen. Setzen wir den Werth von p, der aus 6) folgt, in 7) ein, so erhalten wir:

$$8)\qquad \varphi\frac{d\varphi}{dy}q^2 - \left\{\varphi\frac{d\psi}{dy} + \psi\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dy}\right\}q + \left\{\frac{d\psi}{dz} + \psi\frac{d\psi}{dy}\right\} = 0.$$

Damit also eine tangirende Fläche existire, müssen 5) und 8) eine Wurzel gemeinschaftlich haben.

Damit dies der Fall, muss sein:

$$9)\qquad q = \frac{\varphi\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}}{\varphi\frac{d\varphi}{dx} + \psi\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}}.$$

Diese Grösse muss beiden Gleichungen genügen, ist also gleich q. Dieser Werth von q stimmt mit dem aus Gleichung 4) gezogenen überein. Vermittelst der Gleichung 6) erhält man:

$$10)\qquad p = \frac{\varphi\left\{\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dx}\right\} + \psi\left\{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dy}\right\}}{\varphi\left\{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}\right\} + \left\{\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dy}\right\}}.$$

Aus den gefundenen Gleichungen lassen sich noch mehrere Gleichungen für p und q ableiten. Die Gleichung 7) lautete:

$$7)\qquad \psi = p + q\varphi.$$

Wir differentiiren diese Gleichung partiell nach x, y und z und finden:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{dp}{dx} + \varphi\frac{dq}{dx} + q\frac{d\varphi}{dx}.$$

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{dp}{dy} + \varphi\frac{dq}{dy} + q\frac{d\varphi}{dy}.$$

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{dp}{dz} + \varphi\frac{dq}{dz} + q\frac{d\varphi}{dz}.$$

Man multiplicire die erste Gleichung mit φ, die zweite mit ψ und addire dann die sämmtlichen Gleichungen; so folgt

$$\left\{\varphi\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}\right\} = \left\{\varphi\frac{dp}{dx} + \psi\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}\right\}$$

$$+ \varphi\left\{\varphi\frac{dq}{dx} + \psi\frac{dq}{dy} + \frac{dq}{dz}\right\} + q\left\{\varphi\frac{d\varphi}{dx} + \psi\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\right\}.$$

Aus Gleichung 9) folgt:

$$\varphi\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz} = q\cdot\left\{\varphi\frac{d\varphi}{dx} + \psi\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\right\}.$$

Daher wird:

$$11)\qquad \varphi\left\{\varphi\frac{dq}{dx} + \psi\frac{dq}{dy} + \frac{dq}{dz}\right\} + \left\{\varphi\frac{dp}{dx} + \psi\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}\right\} = 0.$$

Die Gleichung der Tangentialebene am Punkte $\xi\,\eta\,\zeta$ der tangirenden Fläche ist:

$$12)\qquad y - \eta = p\,(z - \zeta) + q\,(x - \xi).$$

Die totale Differentiation dieser Gleichung liefert:

$$dy - d\eta = p\,dz - p\,d\zeta + q\,dx - q\,d\xi$$

$$+ (z - \zeta)\left\{\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz\right\} + (x - \xi)\left\{\frac{dq}{dx}dx + \frac{dq}{dy}dy + \frac{dq}{dz}\right\}.$$

Da

$$d\eta = p\,d\zeta + q\,d\xi,$$

folgt:

$$13)\quad dy = p\,dz + q\,dx + (z-\zeta)\left\{\frac{dp}{dx}dx + \frac{dp}{dy}dy + \frac{dp}{dz}dz\right\}$$
$$+ (x-\xi)\left\{\frac{dq}{dx}dx + \frac{dq}{dy}dy + \frac{dq}{dz}dz\right\}.$$

Diese Gleichung würden wir ebenfalls erhalten, wenn wir $\xi\eta\zeta$ als den Durchschnittspunkt zweier unendlich nahen Tangentialebenen, also bei der Differentiation als constant betrachten.

Soll 12) wirklich als Tangentialebene einer Fläche angehören, so müssen alle durch unendlich kleine Zunahmen von xyz erhaltenen Ebenen den Berührungspunkt $\xi\eta\zeta$ als gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt besitzen. Da das Verhältniss der Zunahmen, dx, dy, dz ein willkürliches ist, muss die obere Gleichung in die drei zerfallen:

$$14)\qquad \frac{dp}{dx}(z-\zeta) + \frac{dq}{dx}(x-\xi) + q = 0,$$

$$15)\qquad \frac{dp}{dy}(z-\zeta) + \frac{dq}{dy}(x-\xi) - 1 = 0,$$

$$16)\qquad \frac{dp}{dz}(z-\zeta) + \frac{dq}{dz}(x-\xi) + p = 0.$$

Damit diese drei Gleichungen sich nicht widersprechen, muss ihre Determinante Null sein, also:

$$\begin{vmatrix} \frac{dp}{dx}, & \frac{dq}{dx}, & q \\ \frac{dp}{dy}, & \frac{dq}{dy}, & -1 \\ \frac{dp}{dz}, & \frac{dq}{dz}, & p \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir den Werth der Determinante mit R; wird die erste Horizontal-Reihe mit φ, die zweite mit ψ multiplicirt, so erhält man durch Addition der Horizontalreihen:

$$R\cdot\varphi\cdot\psi = \begin{vmatrix} \varphi\frac{dp}{dx}, & \varphi\frac{dq}{dx}, & q\varphi \\ \psi\frac{dp}{dy}, & \psi\frac{dq}{dy}, & -\psi \\ \frac{dp}{dz}, & \frac{dq}{dz}, & p \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} \varphi\frac{dp}{dx} + \psi\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}, & \varphi\frac{dq}{dx} + \psi\frac{dq}{dy} + \frac{dq}{dz}, & 0 \\ \psi\frac{dp}{dy}, & \psi\frac{dq}{dy}, & -\psi \\ \frac{dp}{dz}, & \frac{dq}{dz}, & p \end{vmatrix}$$

Multipliciren wir die zweite Vertical-Colonne mit φ und addiren alsdann die erste hinzu, so erhalten wir, indem wir Gleichung 11) berücksichtigen:

$$R\varphi^2\psi = \begin{vmatrix} \varphi \frac{dp}{dx} + \psi \frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}, & 0, & 0 \\ \psi \frac{dp}{dy}, & \psi\left(\frac{dp}{dy} + \varphi \frac{dq}{dy}\right), & -\psi, \\ \frac{dp}{dz}, & \frac{dp}{dz} + \varphi \frac{dq}{dz}, & p \end{vmatrix}$$

$$R \cdot \varphi^2 = \left\{\varphi \frac{dp}{dx} + \psi \frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}\right\} \cdot \left\{p \frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz} + \varphi\left(p \frac{dq}{dy} + \frac{dq}{dz}\right)\right\}.$$

Aus den partiellen Ableitungen der Gleichung 7) folgt

$$p \frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz} + \varphi\left(p \frac{dq}{dy} + \frac{dq}{dz}\right) = p \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz} - q\left(p \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\right).$$

Die nicht geordnete Gleichung 6) lautete:

$$q\left(\frac{d\varphi}{dz} + p \frac{d\varphi}{dy}\right) = \frac{d\psi}{dz} + p \frac{d\psi}{dy}.$$

Folglich: $$R = 0.$$

Der so gefundene Punkt ξ, η, ζ liegt in der Geraden des Systems. Denn setzen wir $x - \xi = \varphi (z - \zeta)$, so folgt aus Gleichungen 14), 15) und 16), dass sein müsste:

$$\frac{\frac{dp}{dx} + \varphi \frac{dq}{dx}}{q} = \frac{\frac{dp}{dz} + \varphi \frac{dq}{dz}}{p} = -\left\{\frac{dp}{dy} + \varphi \frac{dq}{dy}\right\},$$

oder Gleichung 7) und ihre partiellen Ableitungen benutzend:

$$\frac{d\psi}{dx} - q \frac{d\varphi}{dx} = -q\left\{\frac{d\psi}{dy} - q \frac{d\varphi}{dy}\right\},$$

$$\frac{d\psi}{dz} - q \frac{d\varphi}{dz} = -p\left\{\frac{d\psi}{dy} - q \frac{d\varphi}{dy}\right\}.$$

Die erste dieser Gleichungen reducirt sich auf 5), die zweite auf 6).

Wir finden demnach keine weitere Bedingung, als dass der für q in 9) gefundene Ausdruck der Gleichung 5) oder 8) genüge; diese Bedingung genügt zum Aufsuchen der Fläche der Punkte ξ, η, ζ, wie zum Beweise, dass die Tangenten dieser Fläche mit den Geraden des Systems zusammenfallen. Eliminiren wir aus Gleichung 12), 14) und 15) oder 16) zwei der Variablen, etwa x und y, so fällt auch z weg. Sehen wir nämlich z als eine durch 14) und 15) bestimmte Function von x und y an, bringen sämmtliche Glieder von 12) auf eine Seite und nehmen das totale Differential dieser Seite, so zeigen Gleichung 14),

15) und 16), dass das Differential dieser Seite gleich Null, der Ausdruck daher von x und y frei ist. Wir erhalten demnach die Gleichung der Fläche zwischen ξ, η, ζ, indem wir aus Gleichung 12), 14), 15) oder 16) die Variablen x, y, z eliminiren. — Die Differentialgleichung dieser Fläche ergiebt sich durch totale Differentiation von 12) und wird infolge der Gleichungen 14), 15) und 16):

$$d\eta = p\,d\zeta + q\,d\xi.$$

Die Tangentialebene der Fläche wird also durch Gleichung 12) ausgedrückt. —

Von einem beliebigen Punkte x, y, z kann in dieser Tangentialebene stets eine Tangente an die Fläche gelegt werden, für welche

$$z - \zeta = \frac{x - \xi}{\varphi(x, y, z)},$$

also deren Projection in der XZ-Ebene bestimmt ist. Da nun, infolge der Gleichung der Tangentialebene, die zweite Gleichung dieser Tangente lautet:

$$z - \zeta = \frac{y - \eta}{p + q\varphi},$$

ferner nach Gleichung 7) $p + q\varphi = \psi$, folgt, dass die Gleichung dieser Tangente mit derjenigen der durch den Punkt x, y, z bestimmten Geraden des Systems übereinstimmt. Unsere Entwickelung liefert demnach den Satz:

> Die Geraden eines nicht endlich bestimmten Systems tangiren eine Fläche, wenn der in 9) für q gefundene Ausdruck der Gleichung 5) genügt.

Bei Herleitung dieser Fläche aus der Gleichung 12) ihrer Tangentialebene gingen wir von der Annahme aus, dass sich die Tangentialebenen, welche sich durch die unendlich kleinen Zunahmen von x, y, z bilden, alle in einem Punkte schneiden. Soll die Fläche abwickelbar sein, so schneiden sich diese Tangentialebenen sämmtlich in einer Geraden. Die Gleichungen, aus welchen sich die Fläche bestimmt, lauten:

12) $$y - \eta = p(z - \zeta) + q(x - \xi),$$

14) $$\frac{dp}{dx}(z - \zeta) + \frac{dq}{dx}(x - \xi) + q = 0,$$

15) $$\frac{dp}{dy}(z - \zeta) + \frac{dq}{dy}(x - \xi) - 1 = 0,$$

16) $$\frac{dp}{dz}(z - \zeta) + \frac{dq}{dx}(x - \xi) + p = 0.$$

Die Gleichungen 14), 15), 16) sind, wenn Gleichung 9) erfüllt wird, von einander abhängig, so dass bei der folgenden Entwickelung stets

eine derselben unberücksichtigt bleiben kann. Damit sich nun aus Gleichung 12), 14) und 15) kein Durchschnittspunkt, sondern eine Durchschnittslinie ergebe, müssen die Unterdeterminanten der dritten Ordnung dieser Gleichungen Null sein; also:

$$\begin{vmatrix} q, \frac{dq}{dx}, \frac{dq}{dy} \\ -1, 0, 0 \\ p, \frac{dp}{dx}, \frac{dp}{dy} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} q, \frac{dq}{dx}, \frac{dq}{dy} \\ -1, 0, 0 \\ 0, q, -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die erste Determinante giebt:

$$\frac{dq}{dx} \cdot \frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dy} \cdot \frac{dp}{dx} = 0$$

oder:

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dp}{dy}} = \frac{\frac{dq}{dx}}{\frac{dq}{dy}}.$$

Die zweite Determinante liefert:

$$\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} = 0.$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich zusammenfassen in der Form:

$$17)\qquad \frac{\frac{dp}{dx}}{\frac{dp}{dy}} = \frac{\frac{dq}{dx}}{\frac{dq}{dy}} = -q.$$

Von diesen beiden Bedingungen folgt jedoch eine aus der andern. Denn aus beiden ergiebt sich:

$$\frac{\frac{dp}{dx} + \varphi\frac{dq}{dx}}{\frac{dp}{dy} + \varphi\frac{dq}{dy}} = -q.$$

Differentiiren wir Gleichung 7) $\psi = p + q\varphi$ partiell nach x und y, so folgt:

$$\frac{\frac{dp}{dx} + \varphi\frac{dq}{dx}}{\frac{dp}{dy} + \varphi\frac{dq}{dy}} = \frac{\frac{d\psi}{dx} - q\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy} - q\frac{d\varphi}{dy}}.$$

Demnach muss sein:

$$-q = \frac{\frac{d\psi}{dx} - q\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy} - q\frac{d\varphi}{dy}}$$

oder

$$\frac{d\varphi}{dy}q^2 + \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right)q - \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Diese Gleichung ist jedoch die schon früher entwickelte Gleichung 5).

Die Gleichungen 17) zeigen, dass Gleichung 14) durch Multiplication der Gleichung 15) mit q entsteht. Damit Gleichung 16) in diesem Falle mit 14) oder 15) übereinstimme, muss sein:

$$\frac{dp}{dx} : \frac{dp}{dy} : \frac{dp}{dz} = \frac{dq}{dx} : \frac{dq}{dy} : \frac{dq}{dz},$$

$$p\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz} = 0.$$

Diese letzte Gleichung folgt vermittelst der früher bewiesenen Gleichung

$$p\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz} + \varphi\left(p\frac{dq}{dy} + \frac{dq}{dz}\right) = 0$$

aus der vorhergehenden Proportion. Diese Proportion wird nur erfüllt, wenn

$$q = f(p).$$

Aus Gleichung 11) folgt ferner, dass in diesem Falle:

$$\varphi\frac{dp}{dx} + \psi\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz} = 0.$$

Der Gleichung

$$\frac{dq}{dx} + q\frac{dq}{dy} = 0$$

wird genügt wenn

$$F(q, z) + q \cdot x = y + G(z)$$

oder, da $q = f(p)$, wenn

$$F(p, z) + x \cdot f(p) = y + G(z).$$

Die Auflösung der Gleichung $\frac{dp}{dz} + p\frac{dp}{dy} = 0$

ist

$$H(p, x) + p \cdot z = y + K(x).$$

Aus beiden Auflösungen folgt die allgemeine Auflösung:

$$y - p \cdot z - xf(p) + F(p) = 0.$$

Die gefundenen Auflösungen der partiellen Differentialgleichungen sind die für abwickelbare Flächen geltenden Gleichungen.

Die Gleichungen 5) und 8) des vorigen Abschnitts lauten:

$$\frac{d\varphi}{dy}q^2 + \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right)q - \frac{d\psi}{dx} = 0. \tag{5}$$

6) $$p = \frac{\frac{d\psi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz} \cdot q}{\frac{d\varphi}{dy} \cdot q - \frac{d\psi}{dy}}.$$

7) $$\psi = p + q\varphi.$$

8) $$\varphi \frac{d\varphi}{dy} q^2 - \left\{\varphi \frac{d\psi}{dy} + \psi \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\right\} q + \left\{\frac{d\psi}{dz} + \psi \frac{d\psi}{dy}\right\} = 0.$$

Damit diese Gleichungen gleichzeitig bestehen, müssen 5) und 8) eine Wurzel gemeinschaftlich haben. Sollen diese Gleichungen in beiden Wurzeln übereinstimmen, muss sein:

$$\varphi \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right) = -\left\{\varphi \frac{d\psi}{dy} + \psi \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\right\},$$

$$-\varphi \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dz} + \psi \frac{d\psi}{dy},$$

oder geordnet:

I) $$\varphi \frac{d\varphi}{dx} + \psi \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

II) $$\varphi \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz} = 0.$$

Der für q früher gefundene Werth wird in diesem Falle unbestimmt, da Zähler und Nenner des ihn ausdrückenden Quotienten verschwinden; wenden wir auf eine beliebige der Wurzeln der Gleichungen 5) oder 8) die Betrachtungen des vorigen Abschnitts an, so finden wir stets eine Fläche, welche von den Geraden des Systems berührt wird. Diese Geraden enthalten bei der zu Grunde liegenden Voraussetzung, dass das System nicht endlich bestimmt sei, alle Tangenten dieser berührten Fläche. Es würden demnach, wenn die Functionen φ und ψ den Gleichungen I) und II) genügen, zwei Flächen existiren, welche nur gemeinschaftliche Tangenten besitzen. Da dieses unmöglich ist, muss unsere Voraussetzung falsch sein, d. h. im Falle die Gleichungen I) und II) existiren, ist das System endlich bestimmt.

Dass diese beiden Gleichungen nöthig und genügend sind, um das System zu einem endlich bestimmten zu machen, lässt sich analytisch in folgender Weise zeigen: Da für ein endlich bestimmtes System die Functionen φ und ψ in allen Punkten einer Geraden des Systems denselben Werth besitzen, muss sein, wenn k eine beliebige Grösse:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x + \varphi \cdot k, y + \psi \cdot k, z + k),$$
$$\psi(x, y, z) = \psi(x + \varphi \cdot k, y + \psi \cdot k, z + k).$$

Entwickelt man die rechten Seiten dieser Gleichungen nach Potenzen von k, so müssen die Coefficienten aller Potenzen von k gleich Null sein. Die Coefficienten der ersten Potenz liefern die Gleichungen:

$$\varphi \frac{d\varphi}{dx} + \psi \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

$$\varphi \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz} = 0.$$

Dieses sind die Gleichungen I) und II); sie genügen zum Beweise, dass alle Coefficienten gleich Null sind.

Differentiirt man I) partiell nach x, y und z, so folgt:

$$\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \varphi \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \frac{d^2\varphi}{dx\,dz} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy} + \varphi \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dy} + \psi \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dy\,dz} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dz} + \varphi \frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + \frac{d\varphi}{dy} \frac{d\psi}{dz} + \psi \frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Wird die erste dieser Gleichungen mit φ, die zweite mit ψ multiplicirt und werden alsdann die drei Gleichungen addirt, so folgt, unter Benutzung der Gleichungen I) und II):

$$\varphi^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 2\,\varphi\psi \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} + 2\,\varphi \frac{d^2\varphi}{dx\,dz} + 2\,\psi \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}$$
$$+ \psi^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist der Coefficient der zweiten Potenz. Der Coefficient der n^{ten} Potenz der Entwickelung für φ lautet:

$$\Sigma \frac{n!}{k!\,l!\,[n-(k+l)]!} \frac{d^n\varphi}{dx^k\,dy^l\,dz^{n-(k+l)}} \varphi^k \psi^l.$$

Dieser sei gleich Null; so erhalten wir, diesen Coefficienten partiell nach x, y, z differentiirend:

$$\Sigma \frac{n!}{k!\,l!\,[n-(k+l)]!} \cdot \left\{ \frac{d^n\varphi}{dx^k\,dy^l\,dz^{n-(k+l)}} k \frac{d\varphi}{dx} \varphi^{k-1}\psi^l \right.$$
$$+ \frac{d^n\varphi}{dx^k\,dy^l\,dz^{n-(k+l)}} l \frac{d\psi}{dx} \varphi^k \psi^{l-1}$$
$$\left. + \frac{d^{n+1}\varphi}{dx^{k+1}\,dy^l\,dz^{n-(k+l)}} \varphi^k \psi^l \right\} = 0,$$

$$\Sigma \frac{n!}{k!\,l!\,[n-(k+l)]!} \left\{ \frac{d^n\varphi}{dx^k\,dy^l\,dz^{n-(k+l)}} k \frac{d\varphi}{dy} \varphi^{k-1}\psi^l \right.$$
$$+ \frac{d^n\varphi}{dx^k\,dy^l\,dz^{n-(k+l)}} l \frac{d\psi}{dy} \varphi^k \psi^{l-1}$$
$$\left. + \frac{d^{n+1}\varphi}{dx^k\,dy^{l+1}\,dz^{n-(k+l)}} \varphi^k \psi^l \right\} = 0.$$

$$\Sigma \frac{n!}{k!\,l!\,[n-(k+l)]!}\left\{\frac{d^n \varphi}{dx^k\,dy^l\,dz^{n-(k+l)}}\,k\,\frac{d\varphi}{dz}\,\varphi^{k-1}\,\psi^l\right.$$

$$+\frac{d^n \varphi}{dx^k\,dy^l\,dz^{n-(k+l)}}\,l\,\frac{d\psi}{dz}\,\varphi^k\,\psi^{l-1}$$

$$\left.+\frac{d^{n+1}\varphi}{dx^k\,dy^l\,dz^{n+1-(k-l)}}\,\varphi^k\,\psi^l\right\}=0.$$

Nachdem die erste dieser Gleichungen mit φ, die zweite mit ψ multiplicirt ist, addiren wir dieselben zur dritten; mit Rücksicht auf Gleichung I) und II) findet sich:

$$\Sigma \frac{n!}{k!\,l!\,[n-(k+l)]!}\left\{\frac{d^{n+1}\varphi}{dx^{k+1}\,dy^l\,dz^{n-(k+l)}}\,\varphi^{k+1}\,\psi^l\right.$$

$$+\frac{d^{n+1}\varphi}{dx^k\,dy^{l+1}\,dz^{n-(k+l)}}\,\varphi^k\,\psi^{l+1}$$

$$\left.+\frac{d^{n+1}\varphi}{dx^k\,dy^l\,dz^{n+1-(k+l)}}\,\varphi^k\psi^l\right\}=0.$$

Jedes Glied der Coefficienten der n^{ten} Potenz liefert in der letzten Gleichung drei; die drei Glieder der n^{ten} Potenz:

$$\frac{n!}{k!\,l!\,[n-(k+l)]!}\,\frac{d^n\varphi}{dx^k\,dy^l\,dz^{n-(k+l)}}\,\varphi^k\,\psi^l,$$

$$\frac{n!}{(k+1)!\,l!\,[n-(k+l)]!}\,\frac{d^n\varphi}{dx^{k+1}\,dy^l\,dz^{n-(k+l+1)}}\,\varphi^{k+1}\,\psi^l,$$

$$\frac{n!}{(k+1)!\,(l-1)!\,[n-(k+l)]!}\,\frac{d^n\varphi}{dx^{k+1}\,dy^{l-1}\,dz^{n-(k+l)}}\,\varphi^{k+1}\,\psi^{l-1}$$

liefern in ihrer Entwickelung stets ein Glied, welches mit $\varphi^{k+1}\,\psi^l$ multiplicirt ist, so dass wir die letzte Gleichung auch schreiben können:

$$\Sigma\left\{\frac{n!}{k!\,l!\,[n-(k+l)]!}+\frac{n!}{(k+1)!\,l!\,[n-(k+l+1)]!}\right.$$

$$\left.+\frac{n!}{(k+1)!\,(l-1)!\,[n-(k+l)]!}\right\}\cdot\frac{d^{n+1}\varphi}{dx^{k+1}\,dy^l\,dz^{n-(k+l)}}\,\varphi^{k+1}\,\psi^l=0,$$

$$\frac{n!}{k!\,l!\,[n-(k+l)]!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,l!\,[n-(k+l)]!}\cdot\frac{k+1}{n+1},$$

$$\frac{n!}{(k+1)!\,l!\,[n-(k+l+1)]!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,l!\,[n-(k+l)]!}\cdot\frac{n-k-l}{n+1},$$

$$\frac{n!}{(k+1)!\,(l-1)!\,[n-(k+l)]!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,l!\,[n-(k+l)]!}\cdot\frac{l}{n+1}.$$

Diese Werthe eingesetzt, geben:

$$\Sigma\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,l!\,[n-(k+l)]!}\cdot\frac{d^{n+1}\varphi}{dx^{k+1}\,dy^l\,dz^{n-(k+1)}}\,\varphi^{k+1}\,\psi^l=0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt den Coefficienten der $(n+1)^{\text{ten}}$ Potenz dar; da nun der Coefficient der ersten Potenz Null ist, folgt, dass auch alle folgenden verschwinden. — In ähnlicher Weise folgt, dass mit φ auch ψ constant bleibt.

Die Gleichungen I) und II) sind hinreichend und nothwendig, damit die Functionen φ und ψ constant bleiben, wenn sich die Variablen um den Functionen proportionale Werthe ändern.

Obgleich die Gleichungen 5), 6), 8) nicht mehr in derselben Weise wie bei einem nicht endlich bestimmten System sich ableiten lassen, bleiben doch ihre Richtigkeit, wie die Folgerungen bestehen. Durch jede Gerade des Systems lässt sich also eine Ebene legen, deren Gleichung

$$y-\eta=p(z-\zeta)+q(x-\xi).$$

Diese Ebenen tangiren eine Fläche, welche sich durch Verbindung der Gleichung der Tangentialebene mit ihren partiellen Ableitungen nach x, y, z ergiebt. Da sich für q zwei Werthe finden, erhalten wir zwei verschiedene Flächen, finden demnach den Satz:

Die Geraden eines endlich bestimmten Systems tangiren zwei verschiedene Flächen.

Zur Erlangung dieses Satzes lässt sich ein zweiter Weg einschlagen, welcher die Natur eines endlich bestimmten Systems deutlicher zeigt.

Mit Vernachlässigung der unendlich Kleinen zweiter Ordnung lassen sich stets zwei Gerade des Systems finden, welche sich schneiden. Bedeutet x, y, z den die Richtung bestimmenden Punkt einer Geraden, ξ, η, ζ den Durchschnittspunkt mit einer unendlich nahen, so können wir ihre Gleichungen schreiben:

$$(x-\xi)=(z-\zeta)\,\varphi(x,y,z),\quad y-\eta=(z-\zeta)\,\psi(x,y,z).$$

Um die Gleichung eines unendlich nahen Strahls zu erhalten, setze man statt x, y, z ihre um unendlich kleine Incremente vermehrten Werthe. Soll der Punkt ξ, η, ζ gemeinsam sein, so müssen die Gleichungen gelten:

$$dx=\varphi dz+(z-\zeta)\left(\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz\right),$$

$$dy=\psi dz+(z-\zeta)\left(\frac{d\psi}{dx}dx+\frac{d\psi}{dy}dy+\frac{d\psi}{dz}dz\right).$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$\text{III)}\qquad z-\zeta=\frac{dx-\varphi dz}{\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz}.$$

Aus der zweiten folgt:

$$z - \zeta = \frac{dy - \psi\, dz}{\frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{dy} dy + \frac{d\psi}{dz} dz}.$$

Da diese Werthe übereinstimmen müssen, ergiebt sich als Bedingungsgleichung:

$$(dx - \varphi\, dz)\left(\frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{dy} dy + \frac{d\psi}{dz} dz\right)$$
$$= (dy - \psi\, dz)\left(\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz\right).$$

Ersetzt man $\frac{d\varphi}{dz}$ und $\frac{d\psi}{dz}$ durch die sich aus Gleichung I) und II) ergebenden Ausdrücke, so folgt:

$$(dx - \varphi\, dz)\left(\frac{d\psi}{dx}(dx - \varphi\, dz) + \frac{d\psi}{dy}(dy - \psi\, dz)\right)$$
$$= (dy - \psi\, dz)\left(\frac{d\varphi}{dx}(dx - \varphi\, dz) + \frac{d\varphi}{dy}(dy - \psi\, dz)\right),$$

$$\frac{d\varphi}{dy}(dy - \psi\, dz)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right)(dy - \psi\, dz)(dx - \varphi\, dz)$$
$$- \frac{d\psi}{dx}(dx - \varphi\, dz)^2 = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dy}\left\{\frac{dy - \psi\, dz}{dx - \varphi\, dz}\right\}^2 + \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right) \cdot \frac{dy - \psi\, dz}{dx - \varphi\, dz} - \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Aus Vergleichung dieser Gleichung mit 5) folgt:

$$\frac{dy - \psi\, dz}{dx - \varphi\, dz} = q.$$

Wir erhalten demnach, da q im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe besitzt, zwei Differentialgleichungen als Bedingung des Durchschnitts zweier unendlich nahen Geraden. Die letzte Gleichung für q giebt geordnet:

IV) $$dy - p\, dz - q\, dx = 0, \text{ da } q\varphi - \psi = -p$$

eine totale Differentialgleichung, wenn:

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz = 0,$$

ist ingrabel, wenn

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0.$$

Wenden wir dies auf Gleichung

IV) $$q\, dx - dy + (\psi - q\varphi)\, dz = 0$$

an, so folgt, dass zur Integration sein muss:

$$q\left(-\frac{d\psi}{dy}+q\frac{d\varphi}{dy}+\varphi\frac{dq}{dy}\right)-\left(\frac{d\psi}{dx}-q\frac{d\varphi}{dx}-\varphi\frac{dq}{dx}-\frac{dq}{dz}\right)+(\psi-p\varphi)\frac{dq}{dy}=0,$$

$$\left\{\frac{d\varphi}{dy}q^2+q\left(\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\psi}{dy}\right)-\frac{d\psi}{dx}\right\}+\left\{\varphi\frac{dq}{dx}+\psi\frac{dq}{dy}+\frac{dq}{dz}\right\}=0.$$

Die erste Parenthese ist nach Gleichung 5) Null. Demnach müsste sein:

$$\varphi\frac{dq}{dx}+\psi\frac{dq}{dy}+\frac{dq}{dz}=0.$$

Die Differentiation der Gleichung 5) nach x, y, z giebt:

$$2\frac{d\varphi}{dy}q\frac{dq}{dx}+\left(\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{dq}{dx}+\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}q^2+\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\frac{d^2\psi}{dx\,dy}\right)q-\frac{d^2\psi}{dx^2}=0,$$

$$2\frac{d\varphi}{dy}q\frac{dq}{dy}+\left(\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{dq}{dy}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}q^2+\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}-\frac{d^2\psi}{dy^2}\right)q-\frac{d^2\psi}{dx\,dy}=0,$$

$$2\frac{d\varphi}{dy}q\frac{dq}{dz}+\left(\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\psi}{dy}\right)\frac{dq}{dz}+\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}q^2+\left(\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}-\frac{d^2\psi}{dy\,dz}\right)q-\frac{d^2\psi}{dx\,dz}=0.$$

Nachdem die erste Gleichung mit φ, die zweite mit ψ multiplicirt ist, werden dieselben zur dritten addirt und wir erhalten:

$$\left(\varphi\frac{dq}{dx}+\psi\frac{dq}{dy}+\frac{dq}{dz}\right)\left(2q\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\psi}{dy}\right)$$
$$+\left(\varphi\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+\psi\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\right)q^2$$
$$+\left[\varphi\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\psi\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}-\left(\varphi\frac{d^2\psi}{dx\,dy}+\psi\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dy\,dz}\right)\right]q$$
$$-\left(\psi\frac{d^2\psi}{dx^2}+\psi\frac{d^2\psi}{dx\,dy}+\frac{d^2\psi}{dx\,dz}\right)=0.$$

Aus den partiellen Ableitungen der Gleichung I) nach x, y, z folgt:

$$\varphi\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+\psi\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dy\,dz}=-\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dy}\right),$$

$$\varphi\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\psi\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+\frac{d^2\varphi}{dx\,dz}=-\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}\right).$$

Entsprechend folgt:

$$\varphi\frac{d^2\psi}{dx\,dy}+\psi\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dy\,dz}=-\left(\frac{d\psi}{dy}\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}\right),$$

$$\varphi\frac{d^2\psi}{dx^2}+\psi\frac{d^2\psi}{dx\,dy}+\frac{d^2\psi}{dx\,dz}=-\left(\frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dx}\right).$$

Die obere Gleichung wird hiernach:

$$\left(\varphi \frac{dq}{dx} + \psi \frac{dq}{dy} + \frac{dq}{dz}\right) \left(2 q \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right)$$
$$- \frac{d\varphi}{dx} \left\{\frac{d\varphi}{dy} q^2 + \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right) q - \frac{d\psi}{dx}\right\}$$
$$- \frac{d\psi}{dy} \left\{\frac{d\varphi}{dy} q^2 + \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right) q - \frac{d\psi}{dx}\right\} = 0.$$

Nach Gleichung 5) folgt hieraus:

$$\varphi \frac{dq}{dx} + \psi \frac{dq}{dy} + \frac{dq}{dz} = 0.$$

Nach Gleichung 11) des vorigen Abschnitts ist also auch:

$$\varphi \frac{dp}{dx} + \psi \frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz} = 0.$$

Demnach ist Gleichung IV) integrabel. Die Gleichung einer Geraden des Systems genügt der Gleichung IV); folglich fällt, nach einem bekannten Satze über totale Differentialgleichungen, diese Gerade in die durch IV) ausgedrückte Fläche. Da jedoch zwei aufeinander folgende Geraden dieser Fläche sich schneiden, so ist dieselbe **abwickelbar**.

Zur Lösung der totalen Differentialgleichung kann man in folgender Weise verfahren: Man denke die aufeinander folgenden Strahlen bis zu einer, auf der Z-Axe senkrechten Ebene verlängert, und suche in dieser Ebene die Curve, für deren Punkte die durch sie bestimmten Strahlen sich schneiden. Da jetzt z constant, ist die Gleichung der Curve:

$$dy - q\, dx = 0.$$

Legen wir durch die Curve die Linien, deren Gleichungen

$$z - w = \frac{x - u}{\varphi(x, y, z)} = \frac{y - v}{\psi(x, y, z)},$$

wo u, v, w die Coordinaten eines beliebigen Punktes, so erhalten wir eine Fläche, für welche die durch zwei unendlich nahe Punkte bestimmten Geraden sich schneiden, welche also mit der oben gefundenen zusammenfallen muss. Diese Fläche wird gefunden, indem aus der Gleichung der Curve und den beiden der Linie die Variablen x und y eliminirt werden.

Da sich für q im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe, und so auch zwei verschiedene Flächen ergeben, findet sich der Satz:

> **Die Strahlen eines endlich bestimmten Systems bilden die Kanten je zweier Systeme abwickelbarer Flächen.**

Ein Beispiel der Anwendung dieses Satzes bieten die Normalen einer Fläche, welche sich in den abwickelbaren Krümmungsflächen verneiigen lassen.



Die allgemeine Auflösung der Gleichung IV) ist in der Form enthalten:

$$F(x, y, z) = c;$$

soll die hierdurch ausgedrückte Fläche durch einen Punkt x_1, y_1, z_1 laufen, so ist $c = F(x_1, y_1, z_1)$.

Die Gleichung der Tangentialebene dieser abwickelbaren Fläche ist:

$$v - p \cdot w - uf(p, c) = H(p, c),$$

da nach den bekannten Sätzen über abwickelbare Flächen q und $y - pz - qx$ Functionen von p sind.

Die Gleichungen der Geraden dieser Fläche finden sich, indem man die der Tangentialebene nach p differentiirt; es wird:

$$w + f'(p)\, u = - H'(p).$$

Die Gleichungen der Geraden lassen sich auf die Form bringen:

$$w + uf'(p) = - H'(p),$$

$$v + u[pf'(p) - f(p, c)] = H(p, c) - pH'(p).$$

Falls die Gerade durch den Punkt x_1, y_1, z_1 geht, lassen sich diese Gleichungen umwandeln in:

$$w - z_1 = - f'(p)(u - x_1) = \frac{f'(p)}{pf'(p) - f(p, c)}(v - y_1).$$

Da diese Gleichung mit der der Geraden des Systems

$$w - z_1 = \frac{u - x_1}{\varphi(x_1, y_1, z_1)} = \frac{v - y_1}{\psi(x_1, y_1, z_1)}$$

übereinstimmen muss, so folgt:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = - \frac{1}{f'(p)}, \quad \psi(x_1, y_1, z_1) = \frac{pf'(p) - f(p, c)}{f'(p)}.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen c, so findet sich p als eine Function von φ und ψ. Hieraus ergiebt sich sofort der Satz:

> Bei einem endlich bestimmten System sind die Winkel der Tangentialebenen, welche sich durch die Geraden legen lassen, Functionen der Winkel dieser Geraden.

Der Beweis dieses Satzes ist auch mit Hilfe der Functionaldeterminante der Functionen φ, ψ und p zu führen.

Diese Determinante ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx}, & \frac{d\varphi}{dy}, & \frac{d\varphi}{dz} \\ \frac{d\psi}{dx}, & \frac{d\psi}{dy}, & \frac{d\psi}{dz} \\ \frac{dp}{dx}, & \frac{dp}{dy}, & \frac{dp}{dz} \end{vmatrix} = \frac{1}{\varphi} \cdot \begin{vmatrix} \varphi\frac{d\varphi}{dx} + \psi\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}, & \frac{d\varphi}{dy}, & \frac{d\varphi}{dz} \\ \varphi\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}, & \frac{d\psi}{dy}, & \frac{d\psi}{dx} \\ \varphi\frac{dp}{dx} + \psi\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}, & \frac{dp}{dy}, & \frac{dp}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Geraden des endlich bestimmten Systems gehören den Rückkehrkanten der Flächensysteme als Tangenten an. Der Ort dieser Rückkehrkanten eines Flächensystems findet sich als Ort der Durchschnittspunkte aufeinander folgender Geraden. Es war

$$\text{III)} \qquad z - \zeta = \frac{dx - \varphi\, dz}{\frac{d\varphi}{dx}\, dx + \frac{d\varphi}{dy}\, dy + \frac{d\varphi}{dz}\, dz},$$

$$z - \zeta = \frac{dx - \varphi\, dz}{\frac{d\varphi}{dx}(dx - \varphi\, dz) + \frac{d\varphi}{dy}(dy - \psi\, dz)}.$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung 5) seien q_1 und q_2, welchen die Werthe p_1 und p_2 entsprechen mögen. Wählen wir das abwickelbare Flächensystem, dessen Tangentialebenen die Gleichung befolgen:

$$q_1\, dx - dy - p_1\, dz = 0,$$

so folgt für den Ort der Rückkehrkanten:

$$z - \zeta = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dx} + q_1 \frac{d\varphi}{dy}}.$$

Dieselbe Gleichung erhalten wir bei Bestimmung der Fläche, welche die Tangentialebene besitzt:

$$y - \eta = q_2 (x - \xi) + p_2 (z - \xi).$$

Denn für diese Gleichung lautet Gleichung 15):

$$\frac{dp_2}{dy}(z - \zeta) + \frac{dq_2}{dy}(x - \xi) = 1,$$

$$z - \zeta = \frac{1}{\frac{dp_2}{dy} + \varphi \frac{dq_2}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\psi}{dy} - q_2 \frac{d\varphi}{dy}}.$$

Nach Gleichung 5) ist

$$q_1 + q_2 = \frac{\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}};$$

demnach wird

$$z - \zeta = \frac{1}{\frac{d\psi}{dy} - q_2 \frac{d\varphi}{dy}} = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dx} + q_1 \frac{d\varphi}{dy}}.$$

Die beiden abwickelbaren Flächen, welche längs einer Geraden des Systems laufen, seien A_1 und A_2; A_1 habe seine Rückkehrkante R_1 auf der alle Geraden des Systems tangirenden Fläche E_1, A_2 seine Rückkehrkante R_2 auf der tangirenden Fläche E_2. A_2 schneide E_1 in der

Curve L_1. Nach der vorhergehenden Entwickelung haben A_2 und E_1 gleiche Tangentialebenen; daher wird A_2 erhalten, indem man längs der Curve L_1 die Tangentialebenen von E_1 legt. Die Durchschnittslinie zweier aufeinander folgenden Tangentialebenen liefert eine Kante von A_2. Diese Kante ist für den Durchschnittspunkt von L_1 und R_1 die tangirende Gerade des Systems. Nach einem Satze von Dupin über die Indicatrix der Flächen ist die Richtung, nach welcher sich eine Tangentialebene bewegen muss, um als Durchschnittslinie zweier unendlich nahen Lagen eine bestimmte Tangente zu erhalten, conjugirt zur Richtung dieser Tangente. Demnach sind im Durchschnittspunkte die Richtungen von L_1 und R_1 conjugirt.

Hieraus folgt, dass mit dem System der Rückkehrkanten R_1 auch stets das System der Linien L_1 bestimmt ist. Wird das System der Linien R_1 durch die Krümmungslinien gebildet, so sind die Curven L_1 die anderen Krümmungslinien der Fläche. Da bei einer Kugel conjugirte Richtungen stets einen Rechten bilden, durchschneiden sich die Linien beider Systeme auf einer Kugel orthogonal.

Einen bemerkenswerthen Specialfall bilden die Systeme, welche durch die Normalen einer Fläche gebildet werden. Für diese ist der Winkel der Flächen A_1 und A_2 ein rechter; der allgemeine Ausdruck dieses Winkels ist:

$$\cos\sigma \cdot = \frac{1 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2} \cdot \sqrt{1 + p_2^2 + q_2^2}},$$

daher ist im betrachteten Falle

$$1 + p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0,$$
$$1 + (\psi - q_1 \varphi)(\psi - q_2 \varphi) + q_1 q_2 = 0,$$
$$1 + \psi^2 - (q_1 + q_2)\varphi\psi + q_1 q_2 (1 + \varphi^2) = 0,$$

und hieraus folgt mit Hilfe von Gleichung 5):

$$(1 + \psi^2)\frac{d\varphi}{dy} - (1 + \varphi^2)\frac{d\psi}{dx} + \varphi\psi\left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right) = 0.$$

Diese Bedingung lässt sich auf die Form bringen:

$$\text{V)} \qquad \frac{d\varphi}{dy} - \psi\frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\psi}{dx} - \varphi\frac{d\psi}{dz}.$$

Umgekehrt folgt, dass die Geraden eines Systems die Normalen einer Fläche sind, wenn A_1 und A_2 einen Rechten bilden. In diesem Falle ist die letzte Gleichung erfüllt; die Bedingung der Integrabilität der Gleichung

$$dz + \varphi\, dx + \psi\, dy = 0$$

fällt mit dieser Gleichung zusammen. Die Normale der durch die Differentialgleichung ausgedrückten Fläche ist:

$$z - z_1 = \frac{x - x_1}{\varphi} = \frac{y - y_1}{\psi};$$

die Geraden des Systems stehen also auf der durch die Differentialgleichung ausgedrückten Fläche senkrecht. — Der Winkel zwischen A_1 und A_2 wird durch die Tangentialebenen dieser Flächen gebildet. Die Tangentialebene an A_1 fällt mit der oscullirenden Ebene von R_1, die Tangentialebene an A_2 mit der Tangentialebene an E_1 zusammen; bilden A_1 und A_2 einen Rechten, so steht die oscullatorische Ebene von R_1 also senkrecht zur Tangentialebene von E_1. Hieraus folgt, dass R_1 eine kürzeste Linie der Fläche E_1 wird und wir erhalten den Satz:

Die Rückkehrkanten der Krümmungsflächen sind die kürzesten Linien der Flächen der Mittelpunkte grösster und kleinster Krümmung.

Da die Tangenten der Rückkehrkante R_1 normal zur Krümmungslinie stehen, so ist R_1 eine Evolute der Krümmungslinie. Die Polfläche der Krümmungslinie ist demnach eine durch R_1 laufende abwickelbare Fläche, in welcher R_1 eine kürzeste Linie. [Nach dem Satze, dass die Evoluten einer Raumcurve kürzeste Linien ihrer Polfläche bilden.] Diese kürzeste Linie R_1 muss demnach, mit der Polfläche abgewickelt, eine Gerade geben. Bedeutet

ς das Krümmungsmass von R_1;

i den Winkel der oscullatorischen Ebene von R_1 mit der Tangentialebene der abwickelbaren Polfläche;

ς_1 das Krümmungsmass der abgewickelten Linie R_1, so ist nach einem bekannten Satze

$$\varsigma_1 = \varsigma \cos i.$$

Da R_1 abgewickelt mit der Polfläche, eine Gerade giebt, also $\varsigma_1 = 0$ ist, folgt

$$\cos i = 0, \qquad i = \frac{\pi}{2}.$$

Die gesuchte Polfläche ist demnach so beschaffen, dass ihre Tangentialebene senkrecht zur oscullatorischen Ebene von R_1 steht. Die Fläche, welche durch die an E_1 längs der Curve R_1 gelegten Tangentialebenen gebildet wird, ist die einzige, welche dieser Bedingung genügt.

Die Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinie liegen in den Kanten der Polfläche; da diese Kanten Tangenten an E_1 sind, gebildet durch zwei sich folgende Tangentialebenen, ist ihre Richtung conjugirt zu R_1, und wir erhalten den Satz:

Die Verbindungslinie des Krümmungsmittelpunktes einer Krümmungslinie mit dem zugehörigen Kümmungsmittelpunkt der Fläche ist eine zur Rückkehrkante der

Krümmungsfläche conjugirte Tangente an den Ort der Krümmungsmittelpunkte der Fläche.

Bilden wir ein System kürzester Linien auf einer Fläche, so dass durch einen beliebigen Punkt der Fläche nur eine bestimmte Zahl solcher Curven gehen, so bilden die von allen Punkten des Raumes an sie gelegten Tangenten ein endlich bestimmtes System, für welches diese kürzesten Linien die Rückkehrkanten R_1 bilden. Die oscullatorische Ebene dieser Curven steht senkrecht zur Tangentialebene der Fläche, also A_1 und A_2 bilden einen Rechten. Da in diesem Falle nach Gleichung V) die Geraden des Systems, also die Tangenten dieser kürzesten Linien, die Normalen einer Fläche bilden, erhalten wir als Umkehrung eines frühern den Satz:

Die Tangenten eines endlich bestimmten Systems kürzester Linien einer Fläche bilden die Normalen einer Fläche.

III.

Untersuchungen über die Fälle, in denen ein von zwei festen Punkten angezogener oder abgestossener Punkt eine Ellipse oder Hyperbel beschreibt, deren Brennpunkte jene beiden Punkte sind.

Von

PAUL PERLEWITZ

aus Berlin.

---

§ 1.

Das Problem der Bewegung eines von zwei festen Punkten angezogenen Punktes ist zuerst von Euler (*Mémoires de l'academie de Berlin*, 1760) für den Fall, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet, gelöst worden. Später haben Lagrange (*Anciens Mémoires de Turin, tome IV* und *Mécanique analytique, tome II*) und Legendre (*Traité des fonctions elliptiques, tome I*) die Differentialgleichungen für den allgemeinen Fall integrirt, namentlich hat Letzterer die Aufgabe mit grosser Ausführlichkeit behandelt. Auch Jacobi hat sich mit derselben beschäftigt (Crelle's Journal, Band 27 und 29) und auf dieselbe das Princip des letzten Multiplicators angewendet. Seine Lösung ist auch in seine „Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch" aufgenommen worden. Durch Thetafunctionen hat zuerst Königsberger in seiner 1860 erschienenen Dissertation: „*De motu puncti versus duo fixa centra attracti*" das allgemeine Integral dargestellt. Auch Liouville hat zwei Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen gegeben (*Journal de mathématiques, tome XI et XII*), die von ihm und Serret (*Journal de mathématiques, tome XIII*) auf das vorliegende Problem angewendet sind. Serret namentlich ist dann auch näher auf den Fall eingegangen, auf den auch schon Lagrange aufmerksam gemacht hatte, wo der Punkt eine Ellipse

oder Hyperbel beschreibt, deren Brennpunkte die anziehenden Punkte sind, und hat das Integral für diesen Fall aufgestellt.

In den folgenden Zeilen werde ich etwas näher auf den zuletzt erwähnten Fall, wo der Punkt sich in einer Ebene bewegt und eine Ellipse, resp. Hyperbel beschreibt, eingehen, die verschiedenen Fälle, welche dabei eintreten können, und die sonstigen Eigenthümlichkeiten dieser Art der Bewegung untersuchen und die Integration der betreffenden Differentialgleichungen mit Hilfe der Thetafunctionen ausführen, wobei ich mich der in Schellbach's „Theorie der elliptischen Integrale und der Thetafunctionen" angewendeten Bezeichnungsweise bedienen werde.

§ 2.

Es seien m und m' die Massen der anziehenden Punkte, $2c$ ihre Entfernung, so sind, wenn man die Mitte zwischen m und m' als Anfangspunkt der Coordinaten und die Verbindungslinie der beiden Punkte als ξ-Axe wählt, die allgemeinen Bewegungsgleichungen des angezogenen Punktes:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -\dfrac{m(\xi+c)}{r^3} - \dfrac{m'(\xi-c)}{r'^3} \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -\dfrac{m\eta}{r^3} - \dfrac{m'\eta}{r'^3} \\[2ex] \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -\dfrac{m\zeta}{r^3} - \dfrac{m'\zeta}{r'^3} \end{cases}$$

wo:

$$r = \sqrt{(\xi+c)^2+\eta^2+\zeta^2},\quad r' = \sqrt{(\xi-c)^2+\eta^2+\zeta^2}.$$

Setzt man:

$$r + r' = 2p,\quad r - r' = 2q$$

und nennt φ den Winkel, welchen die durch den angezogenen Punkt und die beiden anziehenden Punkte gelegte Ebene mit der Coordinatenebene $-\xi\eta$ bildet, so erhält man aus den Gleichungen 1) nach einmaliger Integration die folgenden von Legendre (*Traité des fonctions elliptiques, I, p. 411* etc.) entwickelten Gleichungen:

$$2)\quad v^2 = \frac{2m}{p+q} + \frac{2m'}{p-q} + C.$$

$$3)\quad \frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}},$$

wo:

$$P = (p^2-c^2)\left\{Cp^2 + 2(m+m')p - A\right\} - B^2.c^2.$$
$$Q = (q^2-c^2)\left\{Cq^2 + 2(m-m')q - A\right\} - B^2.c^2.$$

$$4)\quad dt = (p^2-q^2)\frac{dp}{\sqrt{P}} = (p^2-q^2)\frac{dq}{\sqrt{Q}},$$

5) $$d\varphi = B c^2 \left\{ \frac{dp}{(p^2 - c^2)\sqrt{P}} - \frac{dq}{(q^2 - c^2)\sqrt{Q}} \right\}$$
$$= - \frac{B c^2 (p^2 - q^2)}{(p^2 - c^2)(q^2 - c^2)} \cdot \frac{dp}{\sqrt{P}}.$$

Ueber die Constanten A, B und C ist Folgendes zu bemerken: Es ist

6) $$C = v_0{}^2 - \frac{2m}{p_0 + q_0} - \frac{2m'}{p_0 - q_0},$$

wenn v_0, p_0, q_0 die Anfangswerthe von v, p, q sind.

Dividiren wir die Gleichung 5) durch 4), so erhalten wir:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi' = - \frac{B c^2}{(p^2 - c^2)(q^2 - c^2)},$$
$$\varphi'_0 = - \frac{B c^2}{(p_0{}^2 - c^2)(q_0{}^2 - c^2)},$$

also:

$$B = - \frac{(p_0{}^2 - c^2)(q_0{}^2 - c^2)}{c^2} \cdot \varphi'_0 .$$

Nehmen wir nun an, der Punkt befinde sich beim Anfang der Bewegung in der $\xi\eta$-Ebene, und es bilde v_0 mit dem im Anfangspunkte der Bewegung auf dieser Ebene errichteten Lothe den Winkel α, ferner sei h die Entfernung des Anfangspunktes der Bewegung von der ξ-Axe, so ist zunächst $v_0 \sin \alpha$ die Componente von v_0 in der $\xi\eta$-Ebene, $v_0 \cos \alpha$ die auf derselben senkrecht stehende Componente, und man hat:

$$(\sin d\varphi)_0 = d\varphi_0 = \frac{v_0 \cdot \cos \alpha \cdot dt}{h};$$

d. h.:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0 = \varphi_0' = \frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{h};$$

ferner:

$$h^2 = - \frac{(p_0{}^2 - c^2)(q_0{}^2 - c^2)}{c^2}.$$

Beides oben eingesetzt, giebt:

7) $$B = h \cdot v_0 \cdot \cos \alpha.$$

Es bilde ferner die Componente $v_0 \sin \alpha$ in der $\xi\eta$-Ebene mit den Vectoren r_0 und r_0' die Winkel β und γ, so findet man leicht:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta, \quad \left(\frac{dr'}{dt}\right)_0 = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \gamma,$$

folglich:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt} + \frac{dr'}{dt}\right)_0 = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{2} (\cos \beta + \cos \gamma.),$$
$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt} - \frac{dr'}{dt}\right)_0 = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{2} (\cos \beta - \cos \gamma)$$

woraus sich mit Rücksicht auf 4) die folgenden beiden Gleichungen:

8) $$(p_0^2 - c^2)\left\{Cp_0^2 + 2(m+m')p_0 - A\right\} - B^2 . c^2$$
$$= \frac{(p_0^2 - q_0^2)^2 . v_0^2 . \sin^2\alpha}{4}(\cos\beta + \cos\gamma)^2,$$

9) $$(q_0^2 - c^2)\left\{Cq_0^2 + 2(m-m')q_0 - A\right\} - B^2 c^2$$
$$= \frac{(p_0^2 - q_0^2)^2 . v_0^2 . \sin^2\alpha}{4}(\cos\beta - \cos\gamma)^2$$

zur Bestimmung von A ergeben.

§ 3.

In dem Falle, wo die Bewegung in einer Ebene vor sich geht, vereinfachen sich diese Gleichungen bedeutend. Es ist nämlich dann $\alpha = 90^0$; also $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$. Es wird daher auch $B = 0$, die Gleichung für φ fällt ganz fort und die übrigen lauten alsdann:

1) $$\frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{dq}{\sqrt{Q}},$$

wo:

2) $$P = (p^2 - c^2)\left\{Cp^2 + 2(m+m')p - A\right\},$$

3) $$Q = (q^2 - c^2)\left\{Cq^2 + 2(m-m')q - A\right\},$$

4) $$dt = (p^2 - q^2)\frac{dp}{\sqrt{P}} = (p^2 - q^2)\frac{dq}{\sqrt{Q}},$$

5) $$v^2 = \frac{2m}{p+q} + \frac{2m'}{p-q} + C,$$

6) $$C = v_0^2 - \frac{2m}{p_0+q_0} - \frac{2m'}{p_0-q_0},$$

7) $$(p_0^2 - c^2)\left\{Cp_0^2 + 2(m+m')p_0 - A\right\}$$
$$= \frac{(p_0^2 - q_0^2)^2 . v_0^2}{4}(\cos\beta + \cos\gamma)^2,$$

8) $$(q_0^2 - c^2)\left\{Cq_0^2 + 2(m-m')q_0 - A\right\}$$
$$= \frac{(p_0^2 - q_0^2)^2 . v_0^2}{4}(\cos\beta - \cos\gamma)^2.$$

§ 4.

Die Gleichung 1) des vorigen Paragraphen giebt integrirt:

1) $$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\sqrt{P}} = \int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\sqrt{Q}}.$$

Gemäss der Bedeutung der Variabeln

$$\left(p = \frac{r+r'}{2},\ q = \frac{r-r'}{2}\right)$$

stellt die Gleichung $p = a$ eine Ellipse, $q = a$ eine Hyperbel mit den Brennpunkten m und m' und der grossen (resp. reellen) Axe $2a$ dar. Es fragt sich also: Kann $p = a$ (resp. $q = a$) ein Integral der Gleichung 1) sein?

Zunächst ist klar, dass es ein singuläres Integral derselben sein muss. Die singuläre Lösung ist aber nur in dem Falle statthaft, wenn die allgemeine Lösung unstatthaft ist, d. h. wenn:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\sqrt{P}} \text{ oder } \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\sqrt{Q}}$$

unendlich wird. Das Letztere findet aber, wie Serret (Liouville's Journal, Bd. 13, S. 30) nachgewiesen hat, nur dann statt, wenn P, resp. Q den Factor $p - p_0$ resp. $q - q_0$ mindestens in der zweiten Potenz enthält, d. h. wenn $p = p_0$, resp. $q = q_0$ mindestens eine doppelte Wurzel der Gleichung $P = 0$, resp. $Q = 0$ ist. Wir sehen ferner leicht ein, dass in beiden Fällen weder $+ c$, noch $- c$ die doppelte Wurzel sein kann, denn dann würden die Scheitelpunkte der grossen (resp. reellen) Axe mit den Brennpunkten zusammenfallen, d. h. der Punkt würde im ersten Falle nur das Stück der ξ-Axe zwischen m und m', im zweiten das ausserhalb dieser Punkte liegende Stück derselben durchlaufen. Soll dagegen, wie wir annehmen wollen, die Bewegung in einer wirklichen Ellipse oder Hyperbel stattfinden, so muss die doppelte Wurzel von $P = 0$, resp. $Q = 0$ in dem zweiten Factor dieser Grössen enthalten sein.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen wollen wir die beiden Fälle gesondert betrachten.

I. Elliptische Bewegung.

§ 5.

Nach § 4 muss, damit der Punkt eine Ellipse mit der grossen Axe $2a$ und den Brennpunkten m und m' durchlaufe, erstens $a = p_0$ (oder $p_0 = a$) sein, und zweitens muss $p = a$ doppelte Wurzel des zweiten Factors von P, d. h. von:

$$Cp^2 + 2(m + m')\,p - A = 0$$

sein. Das giebt die Bedingungsgleichung:

$$(m + m')^2 + AC = 0$$

und dann:

$$a = -\frac{m + m'}{C}$$

oder:

$$C = -\frac{m + m'}{a}, \tag{1.}$$

2) $$A = (m + m')\, a.$$

Setzt man diese Werthe in Q ein, so erhält man:

3) $$Q = -\frac{m + m'}{a}(q^2 - c^2)\left(q^2 - 2\,\frac{m - m'}{m + m'}\,aq + a^2\right)$$
$$= -\frac{q^2 - c^2}{a}\left\{m\,(a - q)^2 + m'\,(a + q)^2\right\}$$
$$= -\frac{m + m'}{a}(q - c)\,(q + c)\,(q - q')\,(q - q''),$$

wo q' und q'' die Wurzeln der Gleichung:

$$q^2 - 2\cdot\frac{m - m'}{m + m'}\,aq + a^2 = 0$$

sind. Man findet für dieselben die Werthe:

4) $$q = \frac{\sqrt{m} \pm \sqrt{-m'}}{\sqrt{m} \mp \sqrt{-m'}}\cdot a,$$

und wollen wir stets mit q' den seinem absoluten Werthe nach grösseren, mit q'' den kleineren Wurzelwerth bezeichnen, so dass also stets $[q'] > [q'']$. Es ist gleichzeitig:

5) $$q' + q'' = 2\cdot\frac{m - m'}{m + m'}\,a,$$

6) $$q'.\,q'' = a^2,$$

woraus hervorgeht, dass, wenn q' und q'' reell sind, beide gleiche Vorzeichen haben und $[q'] \geq a$, $[q''] \leq a$ ist.

Ferner ergiebt sich aus 4), dass q' und q'' reell sind, wenn m und m' entgegengesetzte Vorzeichen haben, complex, wenn sie gleiche Vorzeichen haben.

Weil ferner die linke Seite der Gleichung 7, § 3 beständig gleich 0 ist, so folgt:

$$\cos\beta + \cos\gamma = 0,\ \text{d. h.}\ \cos\beta = -\cos\gamma.$$

Setzt man diesen Werth in 8, § 3 ein, so kommt mit Rücksicht auf den gleich zu entwickelnden Werth von v_0^2:

7) $$\cos^2\beta = \frac{c^2 - q_0^2}{a^2 - q_0^2},$$

welche Gleichung nichts Anderes bedeutet, als dass v_0 Tangente der Ellipse ist. Für v^2 erhalten wir durch Einsetzen des Werthes von C die Gleichung:

8) $$v^2 = \frac{m\,(a - q)^2 + m'\,(a + q)^2}{a\,(a^2 - q^2)} = 2\cdot\frac{m r'^2 + m' r^2}{r.\,r'^2 + r'.\,r^2}$$

und demgemäss die schon benutzte Gleichung:

9) $$v_0^2 = \frac{m\,(a - q_0)^2 + m'\,(a + q_0)^2}{a\,(a^2 - q_0^2)} = 2\cdot\frac{m r_0'^2 + m' r_0^2}{r_0.\,r_0'^2 + r_0'.\,r_0^2}.$$

Aus (8) ist ersichtlich, dass q' und q'' die Wurzeln der Gleichung $v = 0$

sind; es kann also v nur gleich 0 werden, wenn q' und q'' reell sind. Da nun q innerhalb der Grenzen 0 und c liegen muss, $[q']$ aber grösser als a, also um so mehr grösser als c ist, so kann also v nur gleich 0 werden für $q = q''$, wenn q'' reell und $[q''] < c$ ist. In diesem Falle würde demnach v im Punkte $q = q''$ ein Minimum $v = 0$ erreichen, also nicht die ganze Ellipse durchlaufen, sondern auf einem Bogen derselben hin- und herpendeln. — Da ferner für Punkte, welche gleich weit von einem der Endpunkte der grossen Axe entfernt sind, q, also auch v denselben Werth annimmt, so muss offenbar auch in diesen Endpunkten, d. h. für $q = \pm c$ ein Maximum oder Minimum von v stattfinden.

Um zu untersuchen, ob es ausserdem noch andere Maxima und Minima von v giebt, haben wir die Ableitung von v zu bilden. Wir erhalten:

$$v \cdot \frac{dv}{dq} = \frac{m'(a+q)^2 - m(a-q)^2}{(a^2-q^2)^2}.$$

Es wird also $dv = 0$, d. h. v ein Maximum oder Minimum, wenn:

$$m'(a+q)^2 - m(a-q)^2 = -(m-m')\left\{q^2 - 2 \cdot \frac{m+m'}{m-m'} aq + a^2\right\} = 0$$

ist. Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$q = \frac{\sqrt{m} \pm \sqrt{m'}}{\sqrt{m} \mp \sqrt{m'}} \cdot a.$$

Diese sind reell, wenn m und m' gleiche, complex, wenn dieselben entgegengesetzte Vorzeichen haben. Nennen wir sie q_1 und q_2, und setzen fest, dass stets $[q_1] > [q_2]$ ist. Dann folgt aus den Gleichungen:

$$q_1 + q_2 = 2 \cdot \frac{m+m'}{m-m'} \cdot a$$

und

$$q_1 q_2 = a^2,$$

dass q_1 und q_2, falls sie reell sind, gleiche Vorzeichen haben, und $[q_1] \geqq a$, $[q_2] \leqq a$ ist. Da also $[q_1]$ jedenfalls grösser als c ist, so wird nur für $q = q_2$ noch ein Maximum oder Minimum von v eintreten, wenn q_2 reell und $[q_2] < c$ ist.

Durch nochmalige Differentiation erhalten wir:

$$v \cdot \frac{d^2 v}{dq^2} + \left(\frac{dv}{dq}\right)^2 = 2 \cdot \frac{m'(a+q)^3 + m(a-q)^3}{(a^2-q^2)^3}$$

und für $q = q_2$ mit Rücksicht auf die vorhergehenden Gleichungen:

$$v \cdot \frac{d^2 v}{dq^2} = \frac{4ma}{(a^2-q^2)(a+q)^2} = \frac{4m'a}{(a^2-q^2)(a-q)^2}.$$

Da wir nun v beständig als positiv annehmen, so wird:

$\frac{d^2 v}{d q^2}$ positiv, also v ein Minimum für $q = q_2$, wenn m und m' positiv.

$\frac{d^2 v}{d q^2}$ negativ, also v ein Maximum für $q = q_2$, wenn m und m' negativ.

§ 6.

Das Integral der Differentialgleichung für t des § 3 lautet nach Einsetzung des in § 5 für Q gefundenen Werthes:

$$t = \int_{q_0}^{q} \frac{(a^2 - q^2)\, dq}{\sqrt{-\left(\frac{m + m'}{a}\right)(q + c)(q - c)(q - q')(q - q'')}}.$$

Innerhalb der Integrationsgrenzen, also innerhalb der Grenzen der Bewegung überhaupt muss der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv sein.

I. m und m' haben gleiche Vorzeichen; alsdann sind q' und q'' imaginär, q_1 und q_2 reell; $(q - q')(q - q'')$ stets positiv.

A. m und m' positiv, also beide Punkte ziehen an.
Alsdann muss $q^2 - c^2$ negativ sein, d. h. q liegt in den Grenzen $+ c$ und $- c$, der Punkt durchläuft also die ganze Ellipse fortwährend in derselben Richtung und seine Geschwindigkeit wird nie gleich 0. Wir können in diesem Falle die Wurzelgrösse auf die Form:

$$\sqrt{(1 - w^2)(k'^2 + k^2 . w^2)}$$

bringen (wo $k^2 + k'^2 = 1$) durch die Substitution:

$$q = - c \cdot \frac{w + n}{1 + nw},$$

$$n = \frac{\sqrt{(c - q')(c - q'')} - \sqrt{(c + q')(c + q'')}}{\sqrt{(c - q')(c - q'')} + \sqrt{(c + q')(c + q'')}}.$$

α) $m > m'$, d. h. $\frac{m}{m'} > 1$;

q_1 und q_2 sind beide qositiv.

1. $q_2 > c$; d. h. $\frac{m}{m'} > \left(\frac{a + c}{a - c}\right)^2$.

q kann den Werth q_2 nicht annehmen; es finden also nur für $q = \pm c$ Maxima, resp. Minima statt, und zwar geht aus der Formel für v^2 leicht hervor, dass für $q = + c$ ein Minimum, für $q = - c$ ein Maximum von v eintritt.

2. $q_2 < c$, d. h. $\frac{m}{m'} < \left(\frac{a + c}{a - c}\right)^2$;

q nimmt den Werth q_2 an, also wird v nach § 5 für diesen



Werth ein Minimum, demnach sowohl für $q = + c$, wie für $q = - c$ ein Maximum.

β) $m < m'$, d. h. $\frac{m}{m'} < 1$;

q_1 und q_2 sind negativ, ihre absoluten Werthe seien $[q_1]$ und $[q_2]$.

1. $[q_2] < c$, d. h. $\frac{m}{m'} > \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2$;

q nimmt den Werth q_2 an und v wird für denselben wiederum ein Minimum, also ein Maximum für $q = + c$ und $q = - c$.

2. $[q_2] > c$, d. h. $\frac{m}{m'} < \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2$;

q kann nicht gleich q_2 werden und man erhält, wie die Formel für v^2 ergiebt, ein Maximum von v für $q = + c$, ein Minimum für $q = - c$.

Fassen wir diese Resultate zusammen, so haben wir die drei Fälle:

1'. $\frac{m}{m'} > \left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2$; v Minimum für $q = + c$, Maximum für $q = - c$.

2'. $\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2 > \frac{m}{m'} > \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2$; v Maximum für $q = + c$, Minimum für $q = q_2$, Maximum für $q = - c$.

3'. $\left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2 > \frac{m}{m'}$; v Maximum für $q = + c$, Minimum für $q = - c$.

Anmerkung: Ist $m = m'$, so wird $q_2 = 0$ ($q_1 = \infty$), also tritt das Minimum von v für $q = 0$, d. h. im Scheitelpunkt der kleinen Axe ein und ist die Geschwindigkeit für $q = \pm \varkappa$ dieselbe.

B. m und m' negativ, also beide Punkte abstossend. Da Q nur positiv für $q^2 - c^2 > 0$, d. h. für Werthe, die ausserhalb der Grenzen $+ c$ und $- c$ liegen, so kann also in diesem Falle der Punkt sich nicht auf der Ellipse bewegen.

II. m und m' haben entgegengesetzte Vorzeichen. Alsdann sind q' und q'' reell und haben gleiche Vorzeichen. Dagegen sind q_1 und q_2 imaginär, also tritt ausser für $q = q''$, wo $v = 0$ wird, und resp. für $q = \pm c$ kein weiteres Maximum oder Minimum von v ein.

A. m positiv (anziehend), m' negativ (abstossend) $= - m_2$.

α) $m > m_2$, d. h. $\frac{m}{m_2} > 1$.

Dann ist $m + m' = m - m_2$ positiv, folglich q' und q'' positiv.

1. $q'' > c$, d. h. $\frac{m}{m_2} > \left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2$,

$$Q = -\frac{m - m_2}{a}(q + c)(q - c)(q - q'')(q - q')$$

und q liegt in den Grenzen $+ c$ und $- c$, d. h. der Punkt durchläuft die ganze Ellipse fortwährend in derselben Richtung, seine Geschwindigkeit wird nie 0, sie wird ein Minimum für $q = + c$, ein Maximum für $q = - c$.

$\sqrt{Q}$ wird auf die Form:

$$\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}$$

gebracht durch die Substitution:

$$q = \frac{2cq'. w^2 - c(q' - c)}{2c. w^2 + (q' - c)}.$$

2. $q'' < c$, d. h., $\frac{m}{m_2} < \left(\frac{a + c}{a - c}\right)^2$

$$Q = -\frac{m - m_2}{a}(q + c)(q - q'')(q - c)(q - q')$$

und q liegt in den Grenzen $- c$ und q'', d. h. der Punkt pendelt auf dem Bogen der Ellipse zwischen den beiden Punkten, für welche $q = q''$ ist, hin und her, und zwar auf demjenigen Bogen, welcher den Punkt $q = - c$ enthält. Dieser Bogen ist grösser als die halbe Ellipse. Für $q = q''$ ist $v = 0$, für $q = - c$ ein Maximum. — Die entsprechende Substitution ist:

$$q = \frac{q'(q'' + c)w^2 - c(q' - q'')}{(q'' + c)w^2 + (q' - q'')}.$$

β) $m < m_2$, d. h. $\frac{m}{m_2} < 1$.

Dann ist $m + m' = m - m_2$ negativ, folglich auch q' und q'' negativ.

1. $[q''] < c$, d. h. $\frac{m}{m_2} > \left(\frac{a - c}{a + c}\right)^2$,

$$Q = \frac{m_2 - m}{a}(q - q')(q + c)(q - q'')(q - c)$$

und q liegt in den Grenzen $- c$ und q'', also haben wir hier dieselbe Bewegung wie im vorigen Falle (α 2), nur mit dem Unterschiede, dass, weil q'' negativ ist, der durchlaufene Bogen kleiner als die halbe Ellipse ist. Wir können also beide Fälle vollständig zusammenfassen, erhalten daher auch dieselbe Substitution wie in (α 2).

2. $[q''] > c$, d. h. $\frac{m}{m_2} < \left(\frac{a - c}{a + c}\right)^2$,

$$Q = \frac{m_2 - m}{a}(q - q')(q - q'')q + c)(q - c),$$

es ist keine Bewegung möglich.

γ. Grenzfall $m = m_2$.

$$Q = 4m(q-c)(q+c)q$$

q in den Grenzen $-c$ und 0, d. h. durchläuft hin- und herpendelnd gerade die halbe Ellipse. Die Substitution ist:

$$q = c \cdot w^2 - c.$$

B. m negativ (abstossend) $= -m_1$, m' positiv (anziehend).

α. $m_1 > m'$, d. h. $\frac{m_1}{m'} > 1$.

q' und q'' sind beide positiv.

1. $q'' > c$, d. h. $\frac{m_1}{m'} > \left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2$;

$$Q = \frac{m_1 - m'}{a}(q+c)(q-c)(q-q'')(q-q')$$

es ist keine Bewegung möglich.

2. $q'' < c$, d. h. $\frac{m_1}{m'} < \left(\frac{a+c}{a-c}\right)^2$;

$$Q = \frac{m_1 - m'}{a}(q+c)(q-q'')(q-c)(q-q')$$

q liegt innerhalb der Grenzen q'' und $+c$, wir haben also wieder eine pendelartige Bewegung zwischen den beiden Punkten, für welche $q = q''$ ist, diesmal jedoch auf demjenigen Bogen, auf welchem der Punkt $q = +c$ liegt. Weil q'' positiv, ist derselbe kleiner als die halbe Ellipse. Für $q = q''$ wird $v = 0$, für $q = +c$ ein Maximum. Die entsprechende Substitution ist:

$$q = \frac{2c \cdot q'' + c(c - q'')w^2}{2c - (c - q'')w^2} = \frac{2c \cdot q'' - c \cdot (q'' - c)w^2}{2c + (q'' - c)w^2}.$$

β. $m_1 < m'$, d. h. $\frac{m_1}{m'} < 1$.

q' und q'' sind negativ.

1. $[q''] < c$, d. h. $\frac{m_1}{m'} > \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2$.

$$Q = -\frac{m' - m_1}{a}(q-q')(q+c)(q-q'')(q-c),$$

q liegt in den Grenzen $+c$ und q''; wir können also diesen Fall wieder vollständig mit dem eben unter (α 2) behandelten zusammenfassen und erhalten auch dieselbe Substitution für q. Der einzige Unterschied ist der, dass diesmal q'' negativ, der durchlaufene Bogen also grösser als die halbe Ellipse ist.

2. $[q''] > c$, d. h. $\frac{m_1}{m'} < \left(\frac{a-c}{a+c}\right)^2$.

$$Q = -\frac{m' - m_1}{a}(q-q')(q-q'')(q+c)(q-c)$$

q in den Grenzen $-c$ und $+c$, d. h. der Punkt durchläuft wieder die ganze Ellipse stets in derselben Richtung, ohne dass seine Geschwindigkeit jemals 0 wird. Sie wird ein Maximum für $q = +c$, ein Minimum für $q = -c$.

Die entsprechende Substitution ist:

$$q = \frac{2cq''w^2 + c(c - q'')}{2c.w^2 - (c - q'')} = \frac{2cq''w^2 - c(q'' - c)}{2c.w^2 + (q'' - c)}$$

γ) Grenzfall $m_1 = m'$,

$Q = -4m'(q + c)(q - c)q$;

q in den Grenzen $+c$ und 0, d. h. der Punkt durchläuft wieder pendelnd die halbe Ellipse, aber dieses Mal die entgegengesetzte Hälfte wie im Falle (A γ.).

Als Substitution ergiebt sich:

$$q = \frac{c.w^2}{2 - w^2}.$$

II. Hyperbolische Bewegung.

§ 7.

Nach § 4 muss $q_0 = a$ eine doppelte Wurzel der Gleichung:

$$Cq^2 + 2(m - m')q - A = 0$$

sein. Es ist aber für den auf der positiven Seite der Abscissenaxe liegenden Hyperbelzweig beständig $r > r'$, also $r - r' = 2q$ positiv, dagegen für den auf der negativen Seite der Abscissenaxe liegenden Zweig stets $r < r'$, d. h. $r - r' = 2q$ negativ. Wir haben also $q = q_0 = \pm a$ zu setzen, je nachdem der Punkt sich auf dem positiven oder negativen Hyperbelzweige befindet. Wir betrachten zunächst den ersten Fall $q = +a$. Alsdann folgt aus der obigen Gleichung:

$$(m - m')^2 + AC = 0$$

und man erhält dann:

$$a = -\frac{m - m'}{C}$$

oder:

1) $$C = -\frac{m - m'}{a},$$

2) $$A = (m - m').a.$$

Diese Werthe in P eingesetzt, giebt:

3) $$P = -\frac{m - m'}{a}(p^2 - c^2)\left(p^2 - 2\cdot\frac{m + m'}{m - m'}ap + a^2\right)$$

$$= -\frac{p^2 - c^2}{a}\left\{m(p - a)^2 - m'(p + a)^2\right\}$$

$$= -\frac{m - m'}{a}(p + c)(p - c)(p - p')(p - p''),$$

wo p' und p'' die Wurzeln der Gleichung:

$$p^2 - 2\frac{m+m'}{m-m'}ap + a^2 = 0$$

sind. Man findet für dieselben die Werthe:

$$4)\qquad p = \frac{\sqrt{m} \pm \sqrt{m'}}{\sqrt{m} \mp \sqrt{m'}}\cdot a,$$

und wählen wir dieselben so, dass stets $[p''] > [p']$ ist. Aus den Gleichungen:

$$5)\qquad p' + p'' = 2\cdot\frac{m+m'}{m-m'}a.$$

$$6)\qquad p'p'' = a^2$$

geht dann ferner hervor, dass, wenn p' und p'' reell sind, beide dasselbe Vorzeichen haben und $[p''] \geqq a$, $[p'] \leqq a$ ist. Es sind aber aus 4) p' und p'' reell, wenn m und m' gleiche Vorzeichen haben, complex, wenn dieselben entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Die Gleichung 8), § 3, ergiebt, weil die linke Seite derselben beständig gleich 0 ist:

$$\cos\beta - \cos\gamma = 0,\ \text{d. h.}\ \cos\beta = \cos\gamma.$$

Setzt man diesen Werth und den gleich zu entwickelnden Werth von v_0 in 7), § 3, ein, so kommt:

$$7)\qquad \cos^2\beta = \frac{p_0{}^2 - c^2}{p_0{}^2 - a^2},$$

d. h. v_0 ist Tangente der Hyperbel. Für v erhalten wir die Gleichung:

$$8)\qquad v^2 = \frac{m'(p+a)^2 - m(p-a)^2}{a(p^2-a^2)} = 2\cdot\frac{m'r^2 - mr'^2}{r^2.r' - r.r'^2}$$

und demgemäss:

$$9)\qquad v_0{}^2 = \frac{m'(p_0+a)^2 - m(p_0-a)^2}{a(p_0{}^2-a^2)} = 2\,\frac{m'r_0{}^2 - m.r'_0{}^2}{r_0{}^2.r'_0 - r_0.r'_0{}^2}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $v = 0$ sind, wie aus 3) und 8) ersichtlich, p' und p'', es kann also v nur dann 0 werden, wenn p den Werth p'' annimmt. In diesem Falle kann der Punkt entweder zwischen den beiden Punkten $p = p''$ durch den Scheitelpunkt hin- und herpendeln, oder er geht von p'' auf dem einen Aste des Hyperbelzweiges bis ins Unendliche. Im ersteren Falle, wo v nie 0 wird, muss der Punkt von dem Anfangspunkte aus je nach der Anfangsrichtung von v entweder direct oder, indem er den Scheitelpunkt passirt, sich in das Unendliche bewegen.

In allen Fällen, wo der Punkt ins Unendliche geht, wird seine Geschwindigkeit für $p = \infty$:

$$10)\qquad \omega = \sqrt{\frac{m'-m}{a}}.$$

Für $p = +c$ und für $p = \infty$ wird v offenbar ein Maximum, resp. Minimum, ebenso ist $v = 0$ ein Minimum, wenn p den Werth p''

annimmt. Um zu untersuchen, ob noch andere Maxima oder Minima eintreten können, differentiiren wir die Gleichung 8). Das giebt:

$$v \cdot \frac{dv}{dp} = -\frac{m'(p+a)^2 + m(p-a)^2}{(p^2-a^2)^2},$$

also wird $dv = 0$ für:

$$m'(p+a)^2 + m(p-a)^2 = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$p = \frac{\sqrt{m} \pm \sqrt{-m'}}{\sqrt{m} \mp \sqrt{-m'}} \cdot a.$$

Wir nennen sie p_1 und p_2 mit der Voraussetzung, dass $[p_2] > [p_1]$. Es ist:

$$p_1 + p_2 = 2 \cdot \frac{m - m'}{m + m'} a,$$

$$p_1 \cdot p_2 = a^2.$$

p_1 und p_2 sind reell, wenn m und m' entgegengesetzte Vorzeichen, complex, wenn dieselben gleiche Vorzeichen haben. Im ersteren Falle haben p_1 und p_2 gleiche Vorzeichen, und es ist $[p_2] \geq a$, $[p_1] \leq a$.

Durch nochmalige Differentiation ergiebt sich:

$$v \cdot \frac{d^2v}{dp^2} + \left(\frac{dv}{dp}\right)^2 = 2 \cdot \frac{m(p-a)^3 + m'(p+a)^3}{(p^2-a^2)^3},$$

also für $p = p_2$ mit Rücksicht auf die vorhergehenden Gleichungen:

$$v \cdot \frac{d^2v}{dp^2} = -\frac{4ma}{(p^2-a^2)(p+a)^2} = \frac{4m'a}{(p^2-a^2)(p-a)^2}.$$

Da a positiv anzunehmen ist, weil die Bewegung auf dem positiven Hyperbelzweige stattfinden soll, folgt:

v ist für $p = p_2$ ein Maximum, wenn m positiv, m' negativ ist;
ein Minimum, wenn m negativ, m' positiv ist.

Setzen wir nunmehr $-a$ an die Stelle von $+a$, lassen also die Bewegung auf dem negativen Hyperbelzweige stattfinden, so überzeugen wir uns leicht, dass in allen entwickelten Formeln die Ersetzung von $+a$ durch $-a$ einfach eine Vertauschung von m und m' ergiebt. Es wird also bei der Erörterung der verschiedenen Fälle genügen, uns auf diejenigen zu beschränken, wo $q_0 = +a$ ist, also die Bewegung auf dem positiven Hyperbelzweig stattfindet, weil wir die anderen unmittelbar aus jenen durch Vertauschung von m und m' erhalten würden.

§ 8.

Wir finden das Integral der Differentialgleichung für t nach Einsetzung der im vorigen Paragraphen gefundenen Werthe:

$$t = \int_{p_0}^{p} \frac{(p^2 - a^2)\, dp}{\sqrt{-\frac{m - m'}{a}(p - c)(p + c)(p - p')(p - p'')}}.$$

Innerhalb der Grenzen der Bewegung muss der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv sein.

I. m und m' gleiche Vorzeichen; alsdann sind p' und p'' reell, p_1 und p_2 imaginair.

A. m und m' positiv, also beide Punkte anziehend.

α) $m > m'$, d. h. $\frac{m}{m'} > 1$,

$m - m'$ positiv, also p' und p'' beide positiv.

1. $p'' < c$, d. h. $\frac{m}{m'} > \left(\frac{c + a}{c - a}\right)^2$,

$$P = -\frac{m - m'}{a}(p + c)(p - p')(p - p'')(p - c);$$

es ist keine Bewegung möglich.

2. $p'' > c$, d. h. $\frac{m}{m'} < \left(\frac{c + a}{c - a}\right)^2$,

$$P = -\frac{m - m'}{a}(p + c)(p - p')(p - c)(p - p'');$$

p liegt in den Grenzen $+ c$ und p'', es findet also pendelnde Bewegung statt auf dem Bogen zwischen den beiden Punkten $p = p''$, wo $v = 0$ ist, während im Punkte $p = c$ die Geschwindigkeit ihr Maximum erreicht. — Die entsprechende Substitution ist:

$$p = \frac{p'(p'' - c)\, w^2 + c\,(p' - p'')}{(p'' - c)\, w^2 + \quad (p' - p'')}.$$

β) $m < m'$, d. h. $\frac{m}{m'} < 1$;

p' und p'' sind beide negativ.

1. $[p''] > c$, d. h. $\frac{m}{m'} > \left(\frac{c - a}{c + a}\right)^2$,

$$P = \frac{m' - m}{a}(p - p'')(p + c)(p - p')(p - c);$$

p liegt ausserhalb der Grenzen $+ c$ und p'', also in den Grenzen $+ c$ und ∞; v wird ein Maximum für $p = + c$, ein Minimum $= \sqrt{\frac{m' - m}{a}}$ für $p = \infty$. — Die entprechende Substitution ist:

$$p = \frac{p'(p'' - c)\, w^2 + c\,(p' - p'')}{(p'' - c)\, w^2 + \quad (p' - p'')},$$

also wie unter (α 2).

2. $[p''] < c$, d. h. $\frac{m}{m'} < \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^2$,

$$P = \frac{m'-m}{a}(p+c)(p-p'')(p-p')(p-c);$$

p liegt ausserhalb der Grenzen $+c$ und $-c$, d. h. in den Grenzen $+c$ und ∞, und v ist wieder ein Maximum für $p = c$, ein Minimum für $p = \infty$. — Die entsprechende Substitution ist:

$$p = \frac{2c \cdot p' w^2 - c(p'+c)}{2c \cdot w^2 - (p'+c)}.$$

γ) Grenzfall $m = m'$;
$P = 4m(p+c)(p-c)\cdot p$,
und p liegt in den Grenzen c und ∞. Wir erhalten die Substitution:

$$p = \frac{c}{1-w^2}.$$

B. m und m' negativ, also beide abstossend. Es sei $m = -m_1$, $m' = -m_2$.

α) $m_1 > m_2$, d. h. $\frac{m_1}{m_2} > 1$;
p' und p'' sind positiv.

1. $p'' < c$, d. h. $\frac{m_1}{m_2} > \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2$,

$$P = \frac{m_1-m_2}{a}(p+c)(p-p')(p-p'')(p-c);$$

p liegt ausserhalb der Grenzen $+c$ und $-c$, d. h. in den Grenzen c und ∞. Für $p = c$ erreicht v sein Minimum, für $p = \infty$ sein Maximum $= \sqrt{\frac{m_1-m_2}{a}}$.

Wir erhalten folgende Substitution:

$$p = \frac{2c . p'' w^2 - c(p''+c)}{2c \cdot w^2 - (p''+c)}.$$

2. $p'' > c$, d. h. $\frac{m_1}{m_2} < \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2$,

$$P = \frac{m_1-m_2}{a}(p+c)(p-p')(p-c)(p-p'');$$

p liegt ausserhalb der Grenzen p'' und $-c$, also in den Grenzen p'' und ∞; für $p = p''$ ist $v = 0$, für $p = \infty$ ein Maximum. Es ergiebt sich als Substitution:

$$p = \frac{2c \cdot p'' - c(p''+c)\cdot w^2}{2c - (p''+c)w^2}.$$

β) $m_1 < m_2$, d. h. $\frac{m_1}{m_2} < 1$;

p' und p'' sind negativ. Es ist

$$P = -\frac{m_2 - m_1}{a}(p - p'')(p + c)(p - p')(p - c),$$

oder:

$$P = -\frac{m_2 - m_1}{a}(p + c)(p - p'')(p - p')(p - c),$$

je nachdem $[p''] > c$ oder $< c$ ist. In beiden Fällen ist keine Bewegung möglich.

γ) Grenzfall $m_1 = m_2$;

$P = -4\, m_1 (p + c)(p - c)\, p$,

und auch in diesem Falle ist keine Bewegung möglich.

II. m und m' haben entgegengesetzte Vorzeichen; dann sind p' und p'' imaginair, also $(p - p')(p - p'')$ stets positiv, p_1 und p_2 reell.

A. m positiv (anziehend), m' negativ (abstossend) $= -m_2$;

$$P = -\frac{m + m_2}{a}(p^2 - c^2)(p - p')(p - p'');$$

es ist keine Bewegung möglich, da p nicht kleiner als c werden kann.

B. m negativ (abstossend) $= -m_1$, m' positiv (anziehend);

$$P = \frac{m_1 + m'}{a}(p^2 - c^2)(p - p')(p - p''),$$

und p liegt in den Grenzen c und ∞ (ausserhalb der Grenzen $+c$ und $-c$). Die Substitution, durch welche die Wurzelgrösse auf die Form:

$$\sqrt{(1 - w^2)(k'^2 + k^2 \cdot w^2)}$$

gebracht wird, ist:

$$p = c \cdot \frac{w - n}{1 - nw},$$

wo:

$$n = \frac{\sqrt{(c - p')(c - p'')} + \sqrt{(c + p')(c + p'')}}{\sqrt{(c - p')(c - p'')} - \sqrt{(c + p')(c + p'')}}$$

ist.

Durch eine ähnliche Betrachtung, wie in § 6 I A, finden wir folgende drei Fälle:

1. $\frac{m_1}{m'} > \left(\frac{c + a}{c - a}\right)^2$; v wird ein Maximum für $p = \infty$,
ein Minimum für $p = c$.

2. $\left(\frac{c + a}{c - a}\right)^2 > \frac{m_1}{m'} > 1$; v wird ein Maximum für $p = \infty$,
ein Minimum für $p = p_2$,
ein Maximum für $p = c$.

3. $\frac{m_1}{m'} \leqq 1$. v wird ein Minimum für $p = \infty$,

ein Maximum für $p = c$,

und zwar ist jedesmal $v = \sqrt{\frac{m_1 + m'}{a}}$ für $p = \infty$.

§ 9.

Nachdem wir so die verschiedenen möglichen Fälle untersucht und für jeden die Substitution angegeben haben, durch welche die Wurzelgrösse in dem Ausdruck für dt auf die Form $\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}$ [resp. $\sqrt{(1 - w^2)(k'^2 + k^2 w^2)}$, wo $k^2 + k'^2 = 1$] gebracht wird, wollen wir diese Substitution und vermittelst derselben die Darstellung des Integrals durch Thetafunctionen für jeden einzelnen Fall ausführen.

Wir betrachten zuerst den Fall I A der elliptischen Bewegung. Wählen wir der Einfachheit halber $-c$ zum Anfangspunkt der Bewegung, so ist:

$$t = \int_{-c}^{q} \frac{(a^2 - q^2)\, dq}{\sqrt{-\frac{m + m'}{a}(q - c)(q + c)(q - q')(q - q'')}}.$$

Setzt man nun (§ 6):

$$q = -c \cdot \frac{w + n}{1 + nw},$$

wo

$$n = \frac{\sqrt{(c - q')(c - q'')} - \sqrt{(c + q')(c + q'')}}{\sqrt{(c - q')(c - q'')} + \sqrt{(c + q')(c + q'')}},$$

so dass:

$$(c \, . \, n + q')(c + nq'') + (c + nq')(c \, . \, n + q'') = 0$$

wird, und bezeichnet:

$$(c \cdot n + q')(cn + q'') = \alpha,$$
$$(c + nq')(c + nq'') = \beta,$$
$$\frac{\beta}{\alpha + \beta} = k^2 < 1, \qquad \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 1 - k^2 = k'^2,$$
$$\sqrt{\frac{(m + m')(\alpha + \beta)}{a \, . \, (1 - n^2)}} = \varepsilon',$$
$$\sqrt{(1 - w^2)(k'^2 + k^2 w^2)} = \Delta w,$$

so kommt:

$$\varepsilon' \, . \, t = -\int_1^w \left\{ a^2 - \frac{c^2 \, . \, (w + n)^2}{(1 + nw)^2} \right\} \frac{dw}{\Delta w}$$
$$= -\int_1^w \left\{ a^2 - \frac{c^2 \, . \, (w + n)^2 \, . \, (1 - nw)^2}{(1 - n^2 \, . \, w^2)^2} \right\} \frac{dw}{\Delta w},$$

und hieraus nach gehöriger Reduction:

$$\varepsilon' \,.\, t = -\left(a^2 + c^2 \cdot \frac{(1-n^2)\,k'^2}{k^2+n^2\,k'^2}\right)\int_1^{w}\frac{dw}{\Delta w}$$

$$+ c^2 \cdot \frac{1-n^2}{k^2+n^2\,.\,k'^2}\int_1^{w}\frac{(k'^2+k^2 w^2)\,dw}{\Delta w} + c^2 \cdot \frac{n^2}{k^2+n^2 k'^2}\int_1^{w}\frac{(1-w^2)\,dw}{(1-n^2\,.\,w^2)\,\Delta w}$$

$$+ c^2 \cdot \frac{n\,(1-n^2)}{k^2+n^2\,.\,k'^2}\cdot\frac{\sqrt{(1-w^2)\,(k'^2+k^2 w^2)}}{1+n\,w}$$

$$- c^2 \cdot \frac{n\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{(k^2+n^2\,.\,k'^2)^3}}\; arc\; cot \sqrt{\frac{(1-n^2)\,(k'^2+k^2 w^2)}{(k^2+n^2 k'^2)\,(1-w^2)}}.$$

Wir setzen nun, indem wir uns der von Herrn **Schellbach** angewendeten Bezeichnungsweise bedienen:

$$w = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot g(\chi) = \frac{g(\chi)}{g(o)}$$

und:

$$-n^2 = \frac{k}{k'}\cdot g(\varkappa)^2 = g(o)^2\,.\,g(\varkappa)^2,$$

d. h.:

$$n = i\,.\,g(o)\,.\,g(\varkappa),$$

so wird:

$$\sqrt{k} = \frac{g(o)}{h(o)}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{1}{h(o)},$$

$$\sqrt{1-w^2} = \frac{h(o)\,.\,f(\chi)}{g(o)}; \qquad \sqrt{k'^2+k^2\,.\,w^2} = \frac{h(\chi)}{h(o)},$$

$$\Delta w = \frac{f(\chi)\,.\,h(\chi)}{g(o)}.$$

$$dw = -\frac{\Theta_3(o)^2\,.\,f(\chi)\,.\,h(\chi)}{g(o)}\cdot d\chi,$$

$$\frac{dw}{\Delta w} = -\Theta_3(o)^2\,.\,d\chi,$$

$$\sqrt{1-n^2} = h(o)\,.\,h(\varkappa), \qquad \sqrt{k^2+n^2 k'^2} = \frac{g(o)}{h(o)}\cdot f(\varkappa),$$

$$\sqrt{\frac{\alpha+\beta}{1-n^2}} = c\cdot\sqrt{\frac{1-n^2}{k^2+n^2 k'^2}} = c\cdot\frac{h(o)^2\,.\,h(\varkappa)}{g(o)\,.\,f(\varkappa)},$$

$$a^2 = q'\,q'' = c^2\cdot\frac{k'^2+n^2 k^2}{k^2+n^2 k'^2},$$

$$a^2 + c^2\cdot\frac{(1-n^2)\,k'^2}{k^2+n^2\,k'^2} = N = c^2\cdot\frac{2\,k'^2+(k^2-k'^2)\,n^2}{k^2+n^2\,k'^2}$$

$$= c^2\cdot\frac{h(o)^2+\{1-g(o)^4\}\,h(\varkappa)^2}{g(o)^2\,.\,f(\varkappa)^2\,.};$$

$$-N\sqrt{\frac{1-n^2}{\alpha+\beta}}\int_1^{w}\frac{dw}{\Delta w} = c\,\chi\cdot\frac{\Theta(o)^2\,.\,\Theta_3(o)^2+\{\Theta(o)^4-\Theta_2(o)^4\}\,h(\varkappa)^2}{\Theta(o)\,.\,\Theta_2(o)\,.\,f(\varkappa)\,.\,h(\varkappa)};$$

$$c^2 \cdot \sqrt{\frac{1-n^2}{\alpha+\beta}}\left(\frac{1-n^2}{k^2+n^2k'^2}\right)\int_1^w \frac{(k'^2+k^2 \cdot w^2)\,dw}{\Delta w}$$

$$= -c\,\frac{h(\varkappa)\,.\,\Theta_3(o)^2\,.\,\Theta(o)^2}{\Theta(o)\,.\,\Theta_2(o)\,.\,f(\varkappa)}\int_0^\chi h(\chi)^2\,.\,d\chi$$

$$= -c \cdot \frac{h(\varkappa)}{\Theta(o)\,.\,\Theta_2(o)\,.\,f(\varkappa)}\left\{l'\Theta(\chi)-\chi\,.\,l''\Theta_2(o)\right\},$$

vgl. Schellbach § 113,

$$c^2 \cdot \sqrt{\frac{1-n^2}{\alpha+\beta}} \cdot \frac{n^2}{k^2+n^2k'^2}\int_1^w \frac{(1-w^2)\,dw}{(1-n^2\,.\,w^2)\,\Delta w}$$

$$= -c \cdot \frac{h(o)^2}{g(o)} \cdot \frac{g(\varkappa)}{f(\varkappa)^2}\int_0^\chi \frac{g(\varkappa)\,.\,g'(\varkappa)\,.\,f(\chi)^2\,.\,d\chi}{h(\varkappa)^2\,.\,\left\{1+g(\varkappa)^2\,.\,g(\chi)^2\right\}}$$

$$= -c \cdot \frac{h(o)^2}{g(o)} \cdot \frac{g(\varkappa)}{f(\varkappa)^2}\left\{\chi\,.\,l'\Theta_3(\varkappa)+\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\Theta_3(\varkappa-\chi)}{\Theta_3(\varkappa+\chi)}\right\},$$

vgl. Schellbach § 130;

$$c^2\sqrt{\frac{1-n^2}{\alpha+\beta}} \cdot \frac{n(1-n^2)}{k^2+n^2k'^2} \cdot \frac{\sqrt{(1-w^2)(k'^2+k^2w^2)}}{1+nw}$$

$$= ic \cdot \frac{h(o)^2\,.\,g(\varkappa)\,.\,h(\varkappa)f(\chi)\,.\,h(\chi)}{g(o)\,.\,f(\varkappa)\left\{1+i\,.\,g(\varkappa)g(\chi)\right\}}$$

$$= -c \cdot \frac{h(\varkappa)}{\Theta(o)\,.\,\Theta_2(o)\,.\,f(\varkappa)}\,l'\left\{1+ig(\varkappa)\,.\,g(\chi)\right\},$$

$$-c^2 \cdot \sqrt{\frac{1-n^2}{\alpha+\beta}} \cdot \frac{n\sqrt{1-n^2}}{\sqrt{(k^2+n^2k'^2)^3}}\,\text{arc cot}\sqrt{\frac{(1-n^2)(k'^2+k^2w^2)}{(k^2+n^2k'^2)(1-w^2)}}$$

$$= -ic \cdot \frac{h(o)^2}{g(o)} \cdot \frac{g(\varkappa)}{f(\varkappa)^2}\,\text{arc cot}\,\frac{h(\varkappa)\,.\,h(\chi)}{f(\varkappa)\,.\,f(\chi)},$$

wobei wir mit l den natürlichen Logarithmus, mit l' und l'' dessen erste und zweite Ableitung bezeichnen.

Setzen wir:

$$\varepsilon' \cdot \sqrt{\frac{1-n^2}{\alpha+\beta}} = \sqrt{\frac{m+m'}{a}} = \varepsilon,$$

und wenden noch die Formel an:

$$\Theta(o)^2\,.\,\Theta_3(o)^2 = \left\{l''\Theta_3(\varkappa)-l''\Theta_2(o)\right\}h(\varkappa)^2 \quad \text{vgl. Schellbach, § 77,}$$

so kommt:

$$\text{I)}\quad \varepsilon\,.\,t = c\,.\,\chi\left\{\frac{[\Theta(o)^4-\Theta_2(o)^4+l''\Theta_3(\varkappa)]\,.\,h(\varkappa)}{\Theta(o)\,.\,\Theta_2(o)\,.\,f(\varkappa)}-\frac{h(o)^2}{g(o)} \cdot \frac{g(\varkappa)}{f(\varkappa)^2} \cdot l'\Theta_3(\varkappa)\right\}$$

$$-c \cdot \left\{\frac{[l'\Theta(\chi)+l'\left\{1+ig(\varkappa)\,.\,g(\chi)\right\}]\,h(\varkappa)}{\Theta(o)\,.\,\Theta_2(o)\,.\,f(\varkappa)}\right.$$

$$\left.+\frac{h(o)^2}{g(o)} \cdot \frac{g(\varkappa)}{f(\varkappa)^2}\left[\tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\Theta_3(\varkappa-\chi)}{\Theta_3(\varkappa+\chi)}+i\,.\,\text{arc cot}\,\frac{h(\varkappa)\,.\,h(\chi)}{f(\varkappa)\,.\,f(\chi)}\right]\right\}$$

oder wenn wir der Kürze halber den Factor von $c\chi$ mit $A_\varkappa$, den von c mit $F(\varkappa, \chi)$ bezeichnen:

$$\text{I}')\qquad t = \frac{c}{\varepsilon}\left\{A_\varkappa . \chi - F(\varkappa, \chi)\right\}.$$

Und für q selbst ergiebt sich, wenn man den Nenner rell macht, nach einigen Transformationen die Formel:

$$\text{II})\qquad q = -c . \frac{\Theta_3(\varkappa)^2 . \Theta(\chi) . \Theta_2(\chi) + i . \Theta(\varkappa) . \Theta_2(\varkappa) . \Theta_1(\chi)^2}{\Theta(o) . \Theta_2(o) . \Theta_3(\varkappa+\chi)\,\Theta_3(\varkappa-\chi)}.$$

Für $\chi = \pi$ (überhaupt $\chi = m\pi$) wird $q = \pm c$ und:

$$l'\Theta(\chi) = \frac{\Theta'(\chi)}{\Theta(\chi)} = \frac{4\varrho . \sin 2\chi - 8\varrho^4 . \sin 4\chi + \ldots}{1 - 2\varrho . \cos 2\chi + 2\varrho^4 . \cos 4\chi - \ldots} = 0,$$

$$l'\left\{1 + ig(\varkappa) . g(\chi)\right\} = -\frac{i . g(\varkappa) . \Theta_3(o)^2 . f(\chi) . h(\chi)}{1 + i . g(\varkappa) . g(\chi)} = 0,$$

weil $f(m\pi) = 0$,

$$l\,\frac{\Theta_3(\varkappa-\chi)}{\Theta_3(\varkappa+\chi)} = l\,\frac{1 - 2\varrho\cos 2(\varkappa-\chi) + \cdots}{1 - 2\varrho . \cos 2(\varkappa+\chi) + \cdots}$$

$$= l\,\frac{1 - 2\varrho . \cos 2\varkappa . \cos 2\chi + \cdots - \left\{2\varrho\sin 2\varkappa . \sin 2\chi - \cdots\right\}}{1 - 2\varrho . \cos 2\varkappa . \cos 2\chi + \cdots + \left\{2\varrho . \sin 2\varkappa . \sin 2\chi - \cdots\right\}} = 0,$$

$$\operatorname{arc\,cot}\frac{h(\varkappa) . h(\chi)}{f(\varkappa) . f(\chi)} = \operatorname{arc\,cot}\infty = 0,$$

folglich: $F(\varkappa, \chi) = 0$, und wir erhalten für die halbe Umlaufszeit:

$$\frac{T}{2} = \frac{c . A_\varkappa . \pi}{\varepsilon},$$

also die ganze Umlaufszeit:

$$\text{III})\qquad T = \frac{2\pi . c . A_\varkappa}{\varepsilon}.$$

Während jedes Umlaufes nimmt q zweimal denselben Werth q_α an, einmal zwischen $-c$ und $+c$, das andere Mal zwischen $+c$ und $-c$, und wir erhalten für die bis dahin vom Beginn des ersten Umlaufs verflossene Zeit:

	für $q = q_\alpha$ (zw. $-c$ u. $+c$):	für $q = q_\alpha$ (zw. $+c$ u. $-c$):
beim 1ten Umlauf:	$t = t_\alpha$,	$t = T - t_\alpha$,
„ 2ten „	$t = T + t_\alpha$,	$t = 2T - t_\alpha$,
„ 3ten „	$t = 2T + t_\alpha$	$t = 3T - t_\alpha$
. . . . .	. . . .	. . . . . .
„ nten „	$t = (n-1)\,T + t_\alpha$,	$t = nT - t_\alpha$.

Es ist also nur nöthig, die Werthe von t für den ersten halben Umlauf, während q von $-c$ (für $\chi = 0$) bis $+c$ (für $\chi = \pi$) wächst, zu kennen, um alle Werthe von t für die zweite Hälfte des ersten und

für alle folgenden Umläufe zu finden. Die Zeit t_0, welche der Punkt gebraucht, um von $q = -c$ bis $q = 0$, d. h. bis zum Scheitel der kleinen Axe zu gelangen, erhält man für $w = -n$, d. h. durch Substitution der Formeln:

$$g(\chi) = -i \cdot g(o)^2 \cdot g(\varkappa),$$
$$f(\chi) = g(o) \cdot h(\varkappa),$$
$$h(\chi)^2 = h(o)^2 - g(o)^4 \cdot h(\varkappa)^2 \text{ etc.}$$

in die Gleichungen I) und II).

Uns interessirt noch der Fall, wo $m = m'$ wird; alsdann wird $q' + q'' = 0$, d. h. $q = -q''$ $(q' = +ai, q'' = -ai)$, folglich $n = 0$, $g(\varkappa) = 0$, also $\varkappa = \frac{\pi}{2}$ und demgemäss:

$$f(\varkappa) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{g(o)}{h(o)}, \quad h(\varkappa) = h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{h(o)}$$

und man erhält die einfachen Formeln:

$$1) \qquad \varepsilon \cdot t = c\chi \cdot \left\{\frac{\Theta(o)^4 + l''\Theta_3(o)}{\Theta_2(o)^2}\right\} - c \cdot \frac{l'\Theta(\chi)}{\Theta_2(o)^2}$$

$$\text{und } 2) \qquad q = -c \cdot \frac{g(\chi)}{g(o)}.$$

Hier wird $q = 0$ für $w = 0$, d. h. $\chi = \frac{\pi}{2}$, und weil $l'\Theta\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, so ist: $t_0 = \frac{T}{4}$.

§ 10.

Man überzeugt sich leicht, dass die Formeln I) und II) des vorigen Paragraphen auch für den Fall II B der hyperbolischen Bewegung gelten, wenn man p', p'', p statt q', q'', q und $-n$ statt $+n$, also $n = -i \cdot g(o) \cdot g(\varkappa)$, ferner $\varepsilon = \sqrt{\frac{m - m'}{a}}$ setzt, mit dem einzigen Unterschiede, dass in der Formel für p die Vorzeichen die entgegengesetzten sind, weil $-c$ an die Stelle von $+c$ tritt, während sie in der Formel für t ungeändert bleiben, weil gleichzeitig $p^2 - a^2$ für $a^2 - q^2$ gesetzt wird. Weil $n > 1$, so ist $\sqrt{1 - n^2}$ imaginär, gleichzeitig aber auch ε imaginär, weil m negativ $= -m_1$. Die Formel für T fällt jedoch fort, weil t für $p = \infty$ ebenfalls unendlich wird.

Für $m_1 = m'$ erhält man wieder einfachere Formeln; man kann sie jedoch aus den allgemeinen nicht ableiten, weil man darin $n = \infty$, also $g(\varkappa) = \infty$ setzen müsste. Man findet dieselben aber direct durch die Substitution: $p = \frac{c}{w}$, nämlich

1) $\varepsilon . t = c . \chi . \left\{ \frac{l'' \Theta_3(o) - \Theta_2(o)^1}{\Theta(o)^2} \right\} - c . \frac{l' \Theta_2(\chi)}{\Theta(o)^2}; \left\{ \varepsilon = \sqrt{\frac{m_1 + m'}{a}} = \sqrt{\frac{2 m_1}{a}} \right\}.$

2) $$p = \frac{c . g(o)}{g(\chi)}.$$

§ 11.

Wir behandeln nunmehr den Fall II $A \alpha 1$ (§ 6) der elliptischen Bewegung. Auch in diesem Falle wählen wir $q = -c$ als Anfangspunkt der Bewegung und haben:

$$t = \int_{-c}^{q} \frac{(a^2 - q^2)\, dq}{\sqrt{-\frac{m - m_2}{a} (q + c)(q - c)(q - q'')(q - q')}}.$$

Durch die dort angegebene Substitution:

$$q = \frac{2 c . q' . w^2 - c . (q' - c)}{2 c . w^2 + (q' - c)},$$

geht dieses Integral über in:

$$t = \int_{o}^{w} \frac{2 . (a^2 - q^2)}{\varepsilon . \sqrt{(q' - c)(q'' + c)}} \frac{dw}{\Delta w},$$

wo:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m - m_2}{a}} = \sqrt{\frac{m + m'}{a}},$$

$$\Delta w = \sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 . w^2)},$$

$$k^2 = \frac{2 c . (q' - q'')}{(q' - c)(q'' + c)},$$

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(q' + c)(q'' - c)}{(q' - c)(q'' + c)}.$$

Indem man noch für q^2 seinen Werth schreibt, erhält man durch Reduction:

$$\varepsilon . t = \left\{ \frac{2 (a^2 - c^2)}{\sqrt{(q' - c)(q'' + c)}} + (q' + c) \sqrt{\frac{q'' + c}{q' - c}} \right\} \int_{o}^{w} \frac{dw}{\Delta w}$$

$$- \sqrt{(q' - c)(q'' + c)} \int_{o}^{w} \frac{(1 - k^2 . w^2)\, dw}{\Delta w}$$

$$- \frac{(q' + c)(q' + q'')}{\sqrt{(q' - c)(q'' + c)}} \int_{o}^{w} \frac{w^2 . dw}{\left\{ w^2 + \frac{q' - c}{2 c} \right\} \Delta w} - \frac{\sqrt{(q' - c)(q'' + c)} . w . \Delta w}{w^2 + \frac{q' - c}{2 c}}.$$

Wir setzen jetzt:

$$w = \frac{1}{\sqrt{k}} . f(\chi) = \frac{h(o)}{g(o)} f(\chi).$$

also:

$$\sqrt{1-w^2}=\frac{g(\chi)}{g(o)}\quad,\quad\sqrt{1-k^2 w^2}=\frac{h(\chi)}{h(o)},$$

$$h(o)^2=\frac{1}{k'}=\sqrt{\frac{(q'-c)(q''+c)}{(q'+c)(q''-c)}}\quad,\quad g(o)^2=\frac{k}{k'}=\sqrt{\frac{2c\,.\,(q'-q'')}{(q'+c)(q''-c)}},$$

$$\varDelta w=\frac{g(\chi)\,.\,h(\chi)}{g(o)\,.\,h(o)},$$

$$\frac{dw}{\varDelta w}=\Theta_3(o)^2\,.\,d\chi,$$

ferner:

$$\frac{q'-c}{2c}=-\frac{1}{k\,.\,f(\varkappa)^2}=-\frac{h(o)^2}{g(o)^2\,.\,f(\varkappa)^2},$$

woraus sich ergiebt:

$$q'-c=-2c\cdot\frac{h(o)^2}{g(o)^2\,.\,f(\varkappa)^2},$$

$$q'+c=-2c\cdot\frac{h(\varkappa)^2}{g(o)^2\,.\,f(\varkappa)^2},$$

$$q''+c=2c\cdot\frac{h(o)^2\,.\,h(\varkappa)^2}{g(o)^2\,.\,g(\varkappa)^2},$$

$$q''-c=2c\cdot\frac{1}{g(o)^2\,.\,g(\varkappa)^2},$$

$$q'-q''=-2c\cdot\frac{h(\varkappa)^2}{f(\varkappa)^2\,.\,g(\varkappa)^2},$$

$$q'+q''=2c\cdot\frac{h(o)^2\,.\,\{h(\varkappa)^2\,.\,f(\varkappa)^2-g(\varkappa)^2\}}{g(o)^2\,.\,g(\varkappa)^2\,.\,f(\varkappa)^2}$$

$$=-2c\cdot\frac{\Theta_3(o)^2\,.\,\Theta(o)^2}{\Theta_2(o)}\cdot\frac{\Theta_2(2\varkappa)}{\Theta_1(\varkappa)^2\,.\,\Theta_2(\varkappa)^2},$$

$$2(a^2-c^2)=2(q'q''-c^2)=2(q'-c)(q''+c)-2c(q'-q''),$$

$$\frac{2(a^2-c^2)}{\sqrt{(q'-c)(q''+c)}}+(q'+c)\sqrt{\frac{q''+c}{q'-c}}$$

$$=2\,.\sqrt{(q'-c)(q''+c)}-\frac{2c(q'-q'')}{\sqrt{(q'-c)(q''+c)}}+(q'+c)\sqrt{\frac{q''+c}{q'-c}}$$

$$=-\frac{2ic\,.\,h(\varkappa)}{h(o)^2\,.\,g(o)^2\,.\,f(\varkappa)\,.\,g(\varkappa)}\left\{2h(o)^4-g(o)^4+h(o)^2\,.\,h(\varkappa)^2\right\};$$

folglich:

$$\left\{\frac{2(a^2-c^2)}{\sqrt{(q'-c)(q''+c)}}+(q'+c)\sqrt{\frac{q''+c}{q'-c}}\right\}\int_o^w\frac{dw}{\varDelta w}$$

$$=\frac{2ic}{l\,h(\varkappa)}\left\{\Theta(o)^4+\Theta_3(o)^4+\Theta(o)^2\,.\,\Theta_3(o)^2\,.\,h(\varkappa)^2\right\}.\chi,$$

$$-\sqrt{(q'-c)(q''+c)}\int_o^w \frac{(1-k^2w^2)\,dw}{\Delta w} = \frac{2ic\,.\,\Theta_3(o)^2}{g(o)^2}\cdot\frac{h(\varkappa)}{f(\varkappa)\,.\,g(\varkappa)}\int_o^\chi h(\chi)^2\,.\,d\chi$$

$$= -\frac{2ic}{l'\,h(\varkappa)}\left\{l'\Theta(\chi) - \chi\,.\,l''\Theta_2(o)\right\},$$

$$-\frac{(q'+c)\,(q'+q'')}{\sqrt{(q'-c)\,(q''+c)}}\int_o^w \frac{w^2\,.\,dw}{\left\{w^2+\frac{q'-c}{2c}\right\}\Delta w}$$

$$= -\frac{2c\,.\,(q'+c)\,(q'+q'')}{(q'-c)\sqrt{(q'-c)\,(q''+c)}}\int_o^w \frac{w^2\,.\,dw}{\left\{1+\frac{2c}{q'-c}w^2\right\}\Delta w}$$

$$= -\frac{2c\,.\,(q'+c)\,(q'+q'')\,.\,\Theta_3(o)^4}{(q'-c)\sqrt{(q'-c)\,(q''+c)}\,.\,\Theta_2(o)^2}\int_o^\chi \frac{f(\chi)^2\,.\,d\chi}{1-f(\varkappa)^2\,.\,f(\chi)^2}$$

$$= \frac{2ic\,.\,\Theta_3(o)^2\,.\,\Theta(o)^2\,.\,\Theta_2(2\varkappa)}{\Theta_2(o)\,.\,\Theta_1(\varkappa)^2\,.\,\Theta_2(\varkappa)^2}\left\{\chi\,.\,l'\Theta(\varkappa) + \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\Theta(\varkappa-\chi)}{\Theta(\varkappa+\chi)}\right\},$$

endlich:

$$-\frac{\sqrt{(q'-c)\,(q''+c)}\,.\,w\,.\,\Delta w}{w^2+\frac{q'-c}{2c}} = -2c\cdot\sqrt{\frac{q''+c}{q'-c}}\cdot\frac{w\,.\,\Delta w}{1+\frac{2c}{q'-c}\cdot w^2}$$

$$= -\frac{i\,.\,c\,.\,l'\left\{1-f(\varkappa)^2\,.\,f(\chi)^2\right\}}{l'\,h(\varkappa)}.$$

Es wird daher, wenn wir noch die Formel:

$$\Theta(o)^2\,.\,\Theta_3(o)^2\,.\,h(\varkappa)^2 + l''\Theta_2(o) = l''\Theta(\varkappa)$$

anwenden (Schellbach, § 77):

$$\text{I)}\quad \varepsilon t = 2ic\,.\,\chi\,.\left\{\frac{\Theta(o)^4+\Theta_3(o)^4+l''\Theta(\varkappa)}{l'\,h(\varkappa)} + \frac{\Theta_3(o)^2\,.\,\Theta(o)^2\,.\,\Theta_2(2\varkappa)}{\Theta_2(o)\,.\,\Theta_1(\varkappa)^2\,.\,\Theta_2(\varkappa)^2}\cdot l'\,\Theta(\varkappa)\right\}$$

$$-2ic\left\{\frac{l'\Theta(\chi)+\frac{1}{2}l'\left\{1-f(\varkappa)^2.f(\chi)^2\right\}}{l'h(\varkappa)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\Theta_3(o)^2.\Theta(o)^2.\Theta_2(2\varkappa)}{\Theta_2(o).\Theta_1(\varkappa)^2.\Theta_2(\varkappa)^2}\cdot l\,\frac{\Theta(\varkappa-\chi)}{\Theta(\varkappa+\chi)}\right\}$$

und für q erhält man nach einigen leichten Transformationen:

$$\text{II)}\qquad q = -2c\,.\,\frac{\Theta_1(\varkappa)^2\,.\,\Theta_2(\chi)^2}{\Theta_2(o)^2\,.\,\Theta(\varkappa+\chi)\,.\,\Theta(\varkappa-\chi)} + c.$$

Wenn man in der Formel I, den Factor von $2ic\,.\,\chi$ mit $A_\varkappa$, den von $-2ic$ mit $F(\varkappa,\chi)$ bezeichnet, so kann man dieselbe abgekürzt schreiben:

$$\text{I'.}\qquad t = \frac{2ic}{\varepsilon}\left\{A_\varkappa.\,\chi - F(\varkappa,\chi)\right\}\cdot$$

Für $\chi = n\cdot\frac{\pi}{2}$ wird $F(\varkappa,\chi) = 0$.

Setzen wir $\chi = \pi$, so wird $q = -c$, und wir erhalten die Umlaufszeit:

$$\text{III.}\qquad T = \frac{2ic\,\pi\,A_\varkappa}{\varepsilon}.$$

Um die halbe Ellipse von $q = -c$ bis $q = +c$ $\left(\chi = 0 \text{ bis } \chi = \frac{\pi}{2}\right)$ zu durchlaufen, gebraucht der Punkt die Zeit $\frac{T}{2}$; die Werthe von t, für welche q bei den verschiedenen Umläufen denselben Werth annimmt, werden genau durch dieselben Formeln angegeben, wie in § 9.

§ 12.

Vergleichen wir die für den Fall II B β 2 der elliptischen Bewegung angewendete Substitution mit der im vorigen Paragraphen durchgeführten, so ist sie, abgesehen, dass q' und q'' mit einander vertauscht sind, dieselbe. Die Formeln des vorigen Paragraphen behalten daher auch für diesen Fall ihre Giltigkeit, wenn wir in den Formeln für k, $\varkappa$ u. s. w. überall q' statt q'' und q'' statt q' setzen.

Wir überzeugen uns aber auch leicht, dass wir die Formeln I) und II) des § 11 auch auf die Fälle I A β 2 und I B α 1 der hyperbolischen Bewegung ausdehnen können. Denn die beiden Substitutionen für diese Fälle unterscheiden sich nur dadurch von der des § 11, dass p', p'', $-c$ (resp. p'', p', $-c$) an die Stelle von q', q'', $+c$ treten. Ersetzen wir also in den Formeln für k, $\varkappa$ u. s. w. des § 11 q', q'', $+c$ durch p', p'', $-c$ (resp. p'', p', $-c$), und wählen demgemäss auch $+c$ zum Anfangspunkt der Bewegung, so erhalten wir für p und t genau dieselben Formeln wie im § 11 für q und t, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Formel für p durch die Substitution von $-c$ für $+c$ die entgegengesetzten Vorzeichen erhält, während in t die Vorzeichen ungeändert bleiben, weil gleichzeitig $p^2 - a^2$ an die Stelle von $a^2 - q^2$ tritt. Ebenso wird $\varepsilon = \sqrt{\frac{m - m'}{a}}$. Die Formel III) für T fällt dagegen fort, da p höchstens einmal den Werth $+c$ annimmt und t für $p = \infty$ ebenfalls unendlich wird.

§ 13.

Wir kommen zu den beiden Fällen II A α 2 und II A β 1 der elliptischen Bewegung, wo wir wiederum $-c$ als Anfangspunkt der Bewegung wählen, so dass:

$$t = \int_{-c}^{q} \frac{(a^2 - q^2)\,dq}{\sqrt{-\frac{m - m_2}{a}(q + c)(q - q'')(q - c)(q - q')}}.$$

Führen wir die in § 6 angegebene Substitution:

$$q = \frac{q'(q'' + c)\,w^2 - c\,.\,(q' - q'')}{(q'' + c)\,w^2 + (q' - q'')}$$

aus, so erhalten wir:

6*

$$\varepsilon \,.\, t = \frac{2}{\sqrt{2c\,.\,(q'-q'')}} \int_0^{w} (a^2 - q^2) \cdot \frac{dw}{\Delta w},$$

wo:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m - m_2}{a}} = \sqrt{\frac{m + m'}{a}},$$

$$\Delta w = \sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 \,.\, w^2)},$$

$$k^2 = \frac{(q' - c)(q'' + c)}{2c\,.\,(q' - q'')},$$

$$k'^2 = 1 - k^2 = -\frac{(q'' - c)(q' + c)}{2c\,.\,(q' - q'')} \text{ [positiv, weil } q'' < c\text{]}.$$

Setzt man noch für q seinen Werth, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$\varepsilon \,.\, t = \left\{\frac{2(a^2 - c^2)}{\sqrt{2c(q' - q'')}} + (q' + c)\sqrt{\frac{2c}{q' - q''}}\right\} \int_0^{w} \frac{dw}{\Delta w}$$

$$- \sqrt{2c(q' - q'')} \int_0^{w} \frac{(1 - k^2 w^2)\, dw}{\Delta w}$$

$$- \frac{(q'' + c)(q' + c)(q' + q'')}{(q' - q'')\sqrt{2c(q' - q'')}} \int_0^{w} \frac{w^2 \,.\, dw}{\left(1 + \frac{q'' + c}{q' - q''} w^2\right) \Delta w}$$

$$- (q'' + c)\sqrt{\frac{2c}{q' - q''}} \cdot \frac{w \,.\, \Delta w}{1 + \frac{q'' + c}{q' - q''} \cdot w^2}.$$

Man setze wieder:

$$w = \frac{1}{\sqrt{k}} f(\chi) = \frac{h(o)}{g(o)} \cdot f(\chi),$$

folglich:

$$\sqrt{1 - w^2} = \frac{g(\chi)}{g(o)}; \quad \sqrt{1 - k^2 w^2} = \frac{h(\chi)}{h(o)},$$

$$h(o)^2 = \frac{1}{k'} = -i \cdot \sqrt{\frac{2c\,.\,(q' - q'')}{(q'' - c)(q' + c)}},$$

$$g(o)^2 = \frac{k}{k'} = -i \cdot \sqrt{\frac{(q' - c)(q'' + c)}{(q'' - c)(q' + c)}};$$

ferner:

$$\frac{q'' + c}{q' - q''} = -k \,.\, f(\varkappa)^2 = -\frac{g(o)^2}{h(o)^2} \cdot f(\varkappa)^2,$$

woraus sich ergiebt:

$$q' - c = -2c \cdot \frac{g(o)^2}{h(o)^2 \,.\, f(\varkappa)^2},$$

$$q' + c = -2c \cdot \frac{g(\varkappa)^2}{h(o)^2 \cdot f(\varkappa)^2},$$

$$q'' - c = -2c \cdot \frac{1}{h(o)^2 \cdot h(\varkappa)^2},$$

$$q'' + c = 2c \cdot \frac{g(o)^2 \cdot g(\varkappa)^2}{h(o)^2 \cdot h(\varkappa)^2},$$

$$q' - q'' = -2c \cdot \frac{g(\varkappa)^2}{h(\varkappa)^2 \cdot f(\varkappa)^2},$$

$$q' + q'' = -2c \cdot \frac{\Theta_2(o)^2 \cdot \Theta(o)^2 \cdot \Theta_3(2\varkappa)}{\Theta_3(o) \cdot \Theta_3(\varkappa)^2 \cdot \Theta_1(\varkappa)^2},$$

$$\frac{2(a^2 - c^2)}{\sqrt{2c(q' - q'')}} + (q' + c)\sqrt{\frac{2c}{q' - q''}} = \frac{2(q'q'' - c^2)}{\sqrt{2c \cdot (q' - q'')}} + (q' + c)\sqrt{\frac{2c}{q' - q''}}$$
$$= \frac{2(q' - c)(q'' + c)}{\sqrt{2c \cdot (q' - q'')}} - \sqrt{2c \cdot (q' - q'')} + (q' + c)\sqrt{\frac{2c}{q' - q''}}.$$

Durch Substitution dieser Werthe und Anwendung der Formeln in § 113 und 130 des Schellbach'schen Werkes erhält man nach einigen leichten Transformationen:

$$\text{I)}\quad \varepsilon . t = 2ic . \chi \left\{ \frac{\Theta_2(o)^4 - \Theta(o)^4 + l''\Theta(\varkappa)}{l' g(\varkappa)} + \frac{\Theta_2(o)^2 . \Theta(o)^2 . \Theta_3(2\varkappa)}{\Theta_3(o) . \Theta_3(\varkappa)^2 . \Theta_1(\varkappa)^2} . l'\Theta(\varkappa) \right\}$$
$$- 2ic \cdot \left\{ \frac{l'\Theta(\chi) + \frac{1}{2} l' \left\{ 1 - f(\varkappa)^2 . f(\chi)^2 \right\}}{l' g(\varkappa)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Theta_2(o)^2 . \Theta(o)^2 . \Theta_3(2\varkappa)}{\Theta_3(o) . \Theta_3(\varkappa)^2 . \Theta_1(\varkappa)^2} l \frac{\Theta(\varkappa - \chi)}{\Theta(\varkappa + \chi)} \right\}$$

oder:

$$\text{I')}\qquad t = \frac{2ic}{\varepsilon} \left\{ A_\varkappa \cdot \chi - F(\varkappa, \chi) \right\}$$

und:

$$\text{II)}\qquad q = 2c \cdot \frac{\Theta_2(\varkappa)^2 \cdot \Theta_1(\chi)^2}{\Theta_3(o)^2 \cdot \Theta(\varkappa + \chi) \cdot \Theta(\varkappa - \chi)} - c.$$

Die Zeit, welche der Punkt gebraucht, um von $q = -c$ bis $q = q''$ zu gelangen, sei $\frac{T}{4}$. Nun wird $w = 1$, $\chi = \frac{\pi}{2}$, also $F(\varkappa, \chi) = 0$ für $q = q''$, also:

$$\frac{T}{4} = \frac{i \cdot c \cdot \pi \cdot A_\varkappa}{\varepsilon}.$$

Die Zeit einer Schwingung wird demnach:

$$\frac{T}{2} = \frac{2i \cdot c \cdot \pi \cdot A_\varkappa}{\varepsilon}$$

und die Zeit eines Hin- und Herganges:

$$\text{III)}\qquad T = \frac{4ic \cdot \pi \cdot A_\varkappa}{\varepsilon}.$$

§ 14.

Vergleicht man die bei der hyperbolischen Bewegung unter I A α 2 und I A β 1 entwickelten Substitutionen mit der im vorigen Paragraphen durchgeführten, so unterscheiden sie sich von derselben nur dadurch, dass $-c$ an die Stelle von $+c$ getreten ist. Vertauschen wir daher in den Formeln des § 13 für k, $\varkappa$ u. s. w. überall $-c$ und $+c$ (und setzen selbstverständlich p, p', p'' statt q, q', q''), so gelten die Formeln I) und II) des § 13 auch für diese beiden Fälle, wenn wir noch bemerken, dass $\varepsilon = \sqrt{\frac{m-m'}{a}}$ wird. Nur muss aus denselben Gründen, wie in § 12, die Formel für p mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden, während die Formel für t ungeändert bleibt. Auch ist $+c$ der Anfangspunkt der Bewegung. Die Formel III) dagegen gilt nur für den Fall A α 2, während für den Fall A β 1, wo der Punkt ins Unendliche geht, für $p = \infty$ auch $t = \infty$ wird.

§ 15.

Für die Fälle II B α 2 und II B β 1 der elliptischen Bewegung wählen wir q'' als Anfangspunkt der Bewegung und führen in dem Integral:

$$t = \int_{q''}^{q} \frac{(a^2 - q^2)\, dq}{\sqrt{\frac{m_1 - m'}{a}(q+c)(q-q'')(q-c)(q-q')}}$$

die dort in § 6 angegebene Substitution:

$$q = \frac{2c \,.\, q'' - c \,.\, (q'' - c)\, w^2}{2c + (q'' - c)\, w^2}$$

aus, so erhalten wir:

$$\varepsilon t = \frac{2i}{\sqrt{2c \,.\, (q' - q'')}} \int_0^w \frac{(a^2 - q^2)\, dw}{\Delta w},$$

wo:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m' - m_1}{a}} = \sqrt{\frac{m + m'}{a}},$$

$$\Delta w = \sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)},$$

$$k^2 = -\frac{(q' + c)(q'' - c)}{2c \,.\, (q' - q'')} \text{ [positiv, weil } c > q''\text{]},$$

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(q' - c)(q'' + c)}{2c \,.\, (q' - q'')}.$$

Setzen wir noch für q^2 seinen Werth, so kommt nach gehöriger Reduction:

$$\varepsilon \,.\, t = 2i\left\{\frac{a^2 - q''^2}{\sqrt{2c\,.\,(q' - q'')}} - \frac{q'' + c}{2}\sqrt{\frac{q' - q''}{2c}}\right\}\int_0^w \frac{dw}{\Delta w}$$

$$+ i \cdot \sqrt{2c\,(q' - q'')}\int_0^w \frac{(1 - k^2 w^2)\,dw}{\Delta w}$$

$$+ \frac{i\,.\,(q'' - c)\,.\,(q'' + c)\,(q' + q'')}{\sqrt{2c\,(q' - q'')}}\int_0^w \frac{w^2\,.\,dw}{\{2c + (q'' - c)\,w^2\}\,\Delta w}$$

$$+ \frac{i\,.\,(q'' - c)\sqrt{2c\,(q' - q'')}\,.\,w\,.\,\Delta w}{2c + (q'' - c)\,w^2},$$

und weil:

$$\frac{a^2 - q''^2}{\sqrt{2c\,(q' - q'')}} = \frac{q'q'' - q''^2}{\sqrt{2c\,(q' - q'')}} = \frac{q''\,(q' - q'')}{\sqrt{2c\,(q' - q'')}} = q''\,.\sqrt{\frac{q' - q''}{2c}}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\varepsilon t}{i} = (q'' - c)\sqrt{\frac{q' - q''}{2c}}\int_0^w \frac{dw}{\Delta w} + \sqrt{2c\,.\,(q' - q'')}\int_0^w \frac{(1 - k^2 w^2)\,.\,dw}{\Delta w}$$

$$+ \frac{(q'' - c)\,(q'' + c)\,(q' + q'')}{2c\,.\sqrt{2c\,.\,(q' - q'')}}\int_0^w \frac{w^2\,.\,dw}{\left\{1 + \frac{q'' - c}{2c}\,w^2\right\}\Delta w}$$

$$+ (q'' - c)\sqrt{\frac{q' - q''}{2c}}\,.\,\frac{w\,.\,\Delta w}{1 + \frac{q'' - c}{2c}\,.\,w^2}.$$

Wir setzen wieder:

$$w = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot f(\chi) = \frac{h(o)}{g(o)}\cdot f(\chi),$$

also:

$$\sqrt{1 - w^2} = \frac{g(\chi)}{g(o)}, \qquad \sqrt{1 - k^2 w^2} = \frac{h(\chi)}{h(o)},$$

$$h(o)^2 = \frac{1}{k'} = \sqrt{\frac{2c\,(q' - q'')}{(q' - c)\,(q'' + c)}},$$

$$g(o)^2 = \frac{k}{k'} = i\,.\sqrt{\frac{(q' + c)\,(q'' - c)}{(q' - c)\,(q'' + c)}}$$

und ausserdem:

$$\frac{q'' - c}{2c} = -k\,.\,f(\varkappa)^2 = -\frac{g(o)^2\,.\,f(\varkappa)^2}{h(o)^2},$$

woraus:

$$q'' - c = -2c\cdot\frac{g(o)^2\,.\,f(\varkappa)^2}{h(o)^2},$$

$$q'' + c = 2c\cdot\frac{h(\varkappa)^2}{h(o)^2},$$

$$q' + c = 2c \cdot \frac{g(o)^2 \, . \, h(\varkappa)^2}{h(o)^2 \, . \, g(\varkappa)^2},$$

$$q' - c = 2c \cdot \frac{f(\varkappa)^2}{h(o)^2 \, . \, g(\varkappa)^2},$$

$$q' - q'' = 2c \cdot \frac{h(\varkappa)^2 \, . \, f(\varkappa)^2}{g(\varkappa)^2},$$

$$q' + q'' = 2c \, . \, \frac{\Theta_2(o)^2 \, . \, \Theta(o)^2 \, . \, \Theta_3(2\varkappa)}{\Theta_3(o) \, . \, \Theta_2(\varkappa)^2 \, . \, \Theta(\varkappa)^2}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe und Ausführung der Integration ergiebt sich, wenn man noch die Formel:

$$\Theta_2(o)^2 \, . \, \Theta_3(o)^2 \, . \, f(\varkappa)^2 = l''\Theta(o) - l''\Theta(\varkappa)$$

benutzt:

I)
$$\varepsilon t = 2\,ic\chi \left\{ \frac{l''\,\Theta(o) + l''\,\Theta_2(o) - l''\,\Theta(\varkappa)}{\Theta_3(o)^4} \, l'\,g(\varkappa) \right.$$
$$\left. - \frac{\Theta_2(o)^2 \, . \, \Theta(o)^2 \, . \, \Theta_3(2\varkappa)}{\Theta_3(o) \, . \, \Theta_2(\varkappa)^2 \, . \, \Theta(\varkappa)^2} \, l'\,\Theta(\varkappa) \right\}$$
$$- 2ic \, . \left\{ \frac{l'\,\Theta(\chi) + \frac{1}{2}\,l'\{1 - f(\varkappa)^2 \, . \, f(\chi)^2\}}{\Theta_3(o)^4} \, l'g(\varkappa) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \, . \, \frac{\Theta_2(o)^2 \, . \, \Theta(o)^2 \, . \, \Theta_3(2\varkappa)}{\Theta_3(o) \, . \, \Theta_2(\varkappa)^2 \, . \, \Theta(\varkappa)^2} \, l \, \frac{\Theta(\varkappa - \chi)}{\Theta(\varkappa + \chi)} \right\}$$

oder unter Anwendung einer ähnlichen Abkürzung, wie früher:

I')
$$t = \frac{2ic}{\varepsilon} \left\{ A_\varkappa \cdot \chi - F(\varkappa, \chi) \right\}$$

und:

II)
$$q = 2c \, . \, \frac{\Theta_3(\varkappa)^2 \, . \, \Theta(\chi)^2}{\Theta_3(o)^2 \, . \, \Theta(\varkappa + \chi) \; \Theta(\varkappa - \chi)} - c.$$

Für

$$\chi = \frac{\pi}{2}$$

wird

$$w = 1, \; q = + c$$

und

$$F(\varkappa, \chi) = 0.$$

Nennen wir also $\frac{T}{4}$ die Zeit, welche der Punkt gebraucht, um von

$$q = q'' \text{ bis } q = + c$$

zu gelangen, so kommt:

$$\frac{T}{4} = \frac{ic \, . \, \pi \, . \, A_\varkappa}{\varepsilon},$$

folglich die Zeit einer Schwingung:

$$\frac{T}{2} = \frac{2ic\,\pi \, . \, A_\varkappa}{\varepsilon}$$

und die Zeit eines Hin- und Herganges:

$$T = \frac{4ic \,.\, \pi \,.\, A_\varkappa}{\varepsilon}.$$

§ 16.

Durch ähnliche Betrachtungen wie in §§ 12 und 14 erkennen wir, dass die im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln ihre Giltigkeit auch für den Fall I Bα2 der hyperbolischen Bewegung behalten, und zwar die Formel I) unverändert, die Formel II) mit entgegengesetzten Vorzeichen, wenn wir überall p, p', p'', $-c$ an die Stelle von q, q', q'', $+c$ setzen und auch p'' als Anfangspunkt der Bewegung nehmen. Ausserdem wird

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m - m'}{a}}.$$

Die Formel III) für T dagegen wird illusorisch, da t für $p = \infty$ ebenfalls unendlich wird und höchstens einmal den Werth p'' annimmt.

§ 17.

Die Grenzfälle.

1. Fall II Aγ der elliptischen Bewegung.

Es ist, wenn man $-c$ als Anfangspunkt der Bewegung nimmt:

$$t = \int_{-c}^{q} \frac{(a^2 - q^2)\, dq}{\sqrt{4m\,(q - c)\,(q + c)\,q}}.$$

Durch die Substitution:

$$q = c \,.\, w^2 - c = -c \,.\, (1 - w^2)$$

geht das Integral über in:

$$\sqrt{2mc} \,.\, t = \int_0^w \frac{a^2 - c^2\,(1 - w^2)^2}{\Delta w} \cdot dw,$$

wo:

$$\Delta w = \sqrt{(1 - w^2)\,(1 - \tfrac{1}{2} w^2)},$$

also: $k^2 = k'^2 = \frac{1}{2}$ ist.

Hieraus ergiebt sich weiter:

$$\sqrt{2mc} \,.\, t = \left(a^2 - \frac{c^2}{3}\right) \int_0^w \frac{dw}{\Delta w} - \frac{2c^2}{3} w \cdot \sqrt{(1 - w^2)\,(1 - \tfrac{1}{2} w^2)}.$$

Setzt man wieder:

$$w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot f(\chi)$$

etc., so kommt:

$$\text{I)} \qquad t = \frac{3a^2 - c^2}{3\sqrt{2mc}} \cdot \Theta_3(o)^2 \cdot \chi - \frac{2c^2 \cdot f(\chi) \cdot g(\chi) : h(\chi)}{3\sqrt{2mc}},$$

$$\text{II)} \qquad q = -c \cdot g(\chi)^2,$$

weil $g(o)^2$ in diesem Falle $= 1$ ist.

Für $q = 0$ wird

$$\chi = \frac{\pi}{2}, \ g(\chi) = 0,$$

also:

$$\frac{T}{4} = \frac{3a^2 - c^2}{6 \cdot \sqrt{2mc}} \cdot \Theta_3(o)^2 \cdot \pi,$$

$$T = \frac{3a^2 - c^2}{3\sqrt{2mc}} \cdot \Theta_3(o)^2 \cdot 2\pi.$$

2. Fall II Bγ der elliptischen Bewegung.

Wir wählen $q = 0$ als Anfangspunkt der Bewegung und bekommen:

$$t = \int_o^q \frac{(a^2 - q^2)\, dq}{\sqrt{-4m'(q+c)(q-c)q}}.$$

Durch die Substitution:

$$q = \frac{c \cdot w^2}{2 - w^2} = \frac{c}{2} \cdot \frac{w^2}{1 - \frac{1}{2}w^2}$$

erhält man:

$$\sqrt{2m'c} \cdot t = \int_o^w \left\{ a^2 - \frac{c^2}{4} \cdot \frac{w^4}{(1 - \frac{1}{2}w^2)^2} \right\} \frac{dw}{\Delta w},$$

$$\Delta w = \sqrt{(1 - w^2)(1 - \frac{1}{2}w^2)},$$

also:

$$k^2 = k'^2 = \tfrac{1}{2}.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\sqrt{2m'c} \cdot t = \left(a^2 - \frac{c^2}{3}\right) \int_o^w \frac{dw}{\Delta w} + \frac{c^2}{3} \frac{w \cdot \Delta w}{(1 - \frac{1}{2}w^2)^2},$$

und wenn man wieder:

$$w = \frac{1}{\sqrt{k}} f(\chi)$$

etc. setzt:

$$\text{I)} \qquad t = \frac{3a^2 - c^2}{3 \cdot \sqrt{2m'c}} \cdot \Theta_3(o)^2 \cdot \chi - \frac{2c^2}{3 \cdot \sqrt{2m'c}} \cdot \frac{l' h(\chi)}{\Theta_2(o)^2 \cdot h(\chi)^2},$$

$$\text{II)} \qquad q = c \cdot \frac{f(\chi)^2}{h(\chi)^2},$$

weil $g(o)^2 = 1$ und $h(o)^2 = \sqrt{2}$ ist.

Für $q = c$ wird

$$w = 1, \ \chi = \frac{\pi}{2}, \ l'h(\chi) = 0,$$

folglich:

$$\frac{T}{4} = \frac{3a^2 - c^2}{6.\sqrt{2m'c}} \cdot \Theta_3(o)^2 . \pi,$$

$$T = \frac{3a^2 - c^2}{3.\sqrt{2m'c}} \cdot \Theta_3(o)^2 . 2\pi.$$

3. Fall I Aγ der hyperbolischen Bewegung.

Indem wir $p = + c$ als Anfangspunkt der Bewegung wählen, bekommen wir:

$$t = \int_c^p \frac{(p^2 - a^2)\, dp}{\sqrt{4m\,(p+c)\,(p-c)\,.\,p}}.$$

Durch die Substitution:

$$p = \frac{c}{1 - w^2}$$

kommt:

$$\sqrt{2mc} \, . \, t = \int_o^w \left\{ \frac{c^2}{(1-w^2)^2} - a^2 \right\} \frac{dw}{\Delta w},$$

wo:

$$\Delta w = \sqrt{(1 - w^2)\,(1 - \tfrac{1}{2} w^2)},$$
$$k^2 = k'^2 = \tfrac{1}{2},$$

und hieraus erhält man ferner:

$$\sqrt{2mc} \, . \, t = \left(\frac{c^2}{3} - a^2\right) . \int_o^w \frac{dw}{\Delta w} + \frac{2c^2}{3} \cdot \frac{w \, . \, \Delta w}{(1-w^2)^2}$$

und:

$$w = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot f(\chi)$$

etc. gesetzt:

I) $$t = \frac{c^2 - 3a^2}{3.\sqrt{2mc}} \cdot \Theta_3(o)^2 . \chi - \frac{2c^2}{3\sqrt{2mc}} \quad \frac{l'g(\chi)}{\Theta_3(o)^2 . g(\chi)^2},$$

II) $$p = \frac{c}{g(\chi)^2}.$$

Für $\chi = \frac{\pi}{2}$ werden p und t unendlich.

§ 18.

Allgemeine Anmerkung.

Zu den Formeln der §§ 9—16 ist noch allgemein zu bemerken, dass die Ausdrücke für p (resp. q) und t, wo sie ganz oder theilweise unter imaginärer Form erscheinen, nichtsdestoweniger reelle Grössen

sind, weil das Imaginäre dadurch aufgehoben wird, dass entweder $\varkappa$ oder ε ebenfalls complex ist.

In allen Formeln der elliptischen Bewegung ist

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m + m'}{a}},$$

in allen der hyperbolischen Bewegung

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m - m'}{a}},$$

wenn die Bewegung auf dem positiven,

$$= \sqrt{\frac{m' - m}{a}},$$

wenn sie auf dem negativen Hyperbelzweige stattfindet.

Kleinere Mittheilungen.

I. Notiz über die biquadratische Gleichung.

Nimmt man die folgende Form der biquadratischen Gleichung:

$$1)\qquad ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

und setzt:

$$2)\qquad \begin{aligned} J &= ae - 4bd + 3c^2, \\ L &= ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3, \end{aligned}$$

so findet zwischen den beiden Invarianten J, L und den beiden folgenden Quantitäten:

$$3)\qquad H = b^2 - ac, \qquad G = a^2d - 3abc + 2b^3$$

die Relation statt:

$$4)\qquad G^2 = 4H^3 - La^3 - JHa^2.$$

Setzt man in der Gleichung 1) $x = \frac{y-b}{a}$, so geht diese Gleichung über in:

$$5)\qquad y^4 - 6Hy^2 + 4Gy + a^2J - 3H^2 = 0.$$

Welche Art der Lösung der Gleichung 1) oder der Gleichung 5) man auch wählen möge, welche auf eine sogenannte Resolvente führt, die Form der Resolventen ist immer dieselbe. Im „*Quarterly Journal of Mathematics*“ 1866, Vol. VII, S. 6 u. 358 hat Ball gezeigt, dass die Methoden von Ferrari, Simpson, Euler, Descartes, Lagrange und Cayley immer auf die Resolvente:

$$6)\qquad z^3 - Jz + 2L = 0$$

führen, wenn man die reducirte Form 5) zu Grunde legt. Um ein anderes Beispiel zu haben, werde die von Schlömilch in der „Zeitschrift für Mathematik“ (Bd. VIII S. 223) angegebene Methode betrachtet, welche darin besteht, die Gleichung 1) auf die Form:

$$7)\qquad t^4 + 1 + 4m(t^3 + t) + 6nt^2 = 0$$

zu bringen. Setzt man in der reducirten Form 5):

$$y = st + \frac{1}{r},$$

bestimmt s und r durch die Gleichungen:

$$8) \quad \begin{aligned} (sr)^4 &= 1 - 6Hr^2 + 4Gr^3 + (a^2J - 3H^2)r^4, \\ (sr)^2 &= 1 - 3Hr^2 + Gr^3, \end{aligned}$$

so ergiebt sich die Gleichung 7), wenn:

$$m = \frac{1}{rs}, \qquad n = \frac{1 - Hr^2}{(rs)^2}$$

gesetzt wird. Zieht man das Quadrat der zweiten Gleichung 8) von der ersten Gleichung ab, so folgt:

$$G^2r^3 - 6HGr^2 + (12H^2 - a^2J)r - 2G = 0.$$

Diese Gleichung mit G multiplicirt, giebt:

$$(Gr - 2H)^3 - a^2J(Gr - 2H) - 2(4H^3 - G^2 - JHa^2) = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Relation 4) erhält man aus der vorstehenden Gleichung unmittelbar die in 6) aufgestellte Resolvente für $Gr - 2H = az$.

Verschwindet in der Gleichung 6) die Quantität J oder die quadratische Invariante, so ist die Gleichung 6) eine einfache binomische Gleichung. Man kann nun immer die Gleichung 1) so transformiren, dass für die transformirte Gleichung die entsprechende quadratische Invariante verschwindet, welche Idee bekanntlich von Hermite herrührt. Die allgemeinen Principien finden sich in der Schrift „*Sur la théorie des équations modulaires*" S. 20 (Paris 1859) angegeben, mit deren Htlfe die Gleichung 1) sich auf die Form:

$$9) \qquad y^4 - 6y^2 + 4Sy - 3 = 0$$

bringen lässt. Da die von Hermite angegebene Methode mehrere Unbestimmte enthält, wodurch die Rechnung etwas complicirt wird, so ist es vielleicht nicht ohne Interesse, in einem besonderen Falle die Form 9) herzustellen.

Man setze:

$$10) \qquad ax^2 + (at + 4b)x = u.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit x^2 und mit tx, bildet die Differenz der erhaltenen Producte, so folgt:

$$ax^4 + 4bx^3 = (at^2 + 4bt + u)x^2 - utx.$$

Mittels dieser Gleichung geht die Gleichung 1) über in:

$$11) \qquad (at^2 + 4bt + 6c + u)x^2 + (4d - tu)x + e = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$12) \qquad at^2 + 4bt + 4c = p,$$

so folgt durch Elimination von x zwischen den Gleichungen 10) und 11):



$$13)\qquad u^4 + 4Bu^3 + 6Cu^2 + 4Du + E = 0,$$

wo:

$$14)\quad \begin{cases} B = bt + 3c, \\ C = pc + 2adt + 2c^2 + \dfrac{8bd + ae}{3}, \\ D = pae - ace - 4ad^2 + (pd + 2cd + eb)(at + 4b) \\ E = p^2ae + p(4abet + 16eb^2 - 2ace) \\ \quad + 4ae(2bc - ad)t + 8ec(4b^2 - ac) - 16abde + (ae)^2. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 12) erhält man aus 14):

$$\begin{aligned} BD = {} & p^2bd + p(10bcd + 3aec + eb^2) \\ & + pt(3acd + aeb) + at(2bce - 4bd^2 + 6c^2d) \\ & + c(-3ace - 12ad^2 + 16bcd + 8eb^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3C^2 = {} & 3p^2c^2 + p(16bcd + 2aec + 12ad^2 + 12c^3) \\ & + 12acdpt + at(ae - 4bd + 6c^2)4d \\ & + 3\left\{\frac{ae - 4bd + 3c^2}{3} + 4bd + c^2\right\}^2 - 48acd^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit der letzten Gleichung 14) geben, unter Zuziehung der Werthe von J und L aus 2):

$$E - 4BD + 3C^2 = Jp^2 - 12Lp + \tfrac{4}{3}J^2.$$

Bestimmt man p durch die Gleichung:

$$15)\qquad Jp^2 - 12Lp + \tfrac{4}{3}J^2 = 0,$$

so ist:

$$E - 4BD + 3C^2 = 0.$$

Setzt man hieraus $E = 4BD - 3C^2$ in die Gleichung 13), so folgt:

$$\begin{aligned} (u + B)^4 - 6(B^2 - C)(u + B)^2 + 4(2B^3 - 3BC + D)(u + B) \\ - 3(B^2 - C)^2 = 0, \end{aligned}$$

oder:

$$u + B = y\sqrt{B^2 - C}$$

gesetzt:

$$y^4 - 6y^2 + 4\frac{2B^3 - 3BC + D}{(B^2 - C)^{\frac{3}{2}}}y - 3 = 0.$$

Für:

$$\frac{2B^3 - 3BC + D}{(B^2 - C)^{\frac{3}{2}}} = S$$

ergiebt sich unmittelbar die Gleichung 9). Setzt man $S^2 - 4 = \frac{1}{2}q^3$, so lässt sich die Gleichung 9) auch auf die Form bringen:

$$(y^2 + q - 1)^2 = 2(q + 2)\left(y - \frac{S}{q + 2}\right)^2.$$

Es ist:

$$(4 - S^2)(B^2 - C) = -4B^3D + 3B^2C^2 + 6BCD - D^2 - 4C^3,$$

oder, da:

$$E = 4\,BD - 3\,C^2,$$

so ist:

$$(4 - S^2)(B^2 - C) = EC + 2\,BCD - D^2 - EB^2 - C^3.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist die cubische Invariante der Gleichung 13), wie sich leicht durch Aufstellung der analogen Quantitäten zu G, H, J und L für die bemerkte Gleichung ergiebt.

A. Enneper.

II. Ueber das specifische Gewicht der Legirungen.

Bekanntlich ist das specifische Gewicht einer Legirung stets niedriger, als die Berechnung ergiebt. Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, diese Erscheinung zu erklären, sie mit anderen, an den Legirungen gemachten Beobachtungen in Zusammenhang zu bringen und eine Formel aufzustellen, welche es ermöglicht, in jedem gegebenen Falle die Abweichung zu berechnen.

Wird einem Körper von aussen Wärme zugeführt, so äussert sich dieselbe in einer doppelten Wirkung. Ein Theil des zugeführten Wärmequantums wird zur Erhöhung der Temperatur des Körpers verwendet, der Rest zur Ausdehnung des Körpers, d. h. zum Auseinanderrücken seiner Atome. Kühlt der Körper sich wieder ab, d. h.: wird ihm die zugeführte Wärme wieder entzogen, so rücken auch seine Atome wieder zusammen. Ein Theil der zugeführten Wärme hatte sich also in die Arbeit verwandelt, welche nöthig war, um die Atome aus ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage zu bringen, und wird beim Zusammenrücken der Atome wieder frei. — Wenn dagegen ein Körper ohne äussere Wärmezufuhr sich ausdehnt, so kann diese Arbeit nur auf Kosten seiner eigenen Temperatur geleistet werden. Ein in dieser Weise sich ausdehnender Körper wird also eine Abkühlung erleiden. Umgekehrt wird derselbe Körper, wenn er sich wieder zusammenzieht, seine ursprüngliche Temperatur wieder erhalten.

Wenn nun zwei schmelzende Metallmassen zu einer Legirung vereinigt werden, so lässt sich die Temperatur P dieser Mischung stets aus den Schmelzpunkten p_1 und p_2 der beiden Massen berechnen, da man von jedem Bestandtheil die Masse (m_1 und m_2) und die specifische Wärme (c_1 und c_2) kennt. Es ist dann

$$m_1 c_1 (p_1 - P) = m_2 c_2 (P - p_2).$$

Es müsste daher auch P der Schmelzpunkt der Legirung sein. In Wirklichkeit liegt derselbe aber niedriger. Bezeichnen wir den beobachteten Schmelzpunkt mit p, so kühlt sich also die Legirung von P bis p Grad ab, ohne zu erstarren. Es ist daher die Wärme $P - p$ der Legirung

nicht entzogen, sondern in ihr selbst gebunden worden, oder, was dasselbe ist, sie ist in Arbeit verwandelt worden. — Gleichzeitig aber ist auch das specifische Gewicht der Legirung von S auf s gesunken (wenn wir mit S das aus den specifischen Gewichten der Bestandtheile berechnete, mit s das wirklich beobachtete specifische Gewicht der Mischung bezeichnen.* Folglich hat, da die Masse der Legirung sich nicht änderte, ihr Volumen sich vergrössert, d. h. ihre Atome sind auseinander gerückt worden. Nach dem oben Gesagten aber ist diese Arbeit unter Aufwendung einer gewissen Wärmemenge ausgeführt worden, und diese Wärmemenge ist keine andere als $P - p$. In der Legirung ist

* Da S und s das specifische Gewicht der Mischung bei der Temperatur P angeben, so muss man bei der Bestimmung von S und s diese Temperatur zu Grunde legen. Es seien die specifischen Gewichte der beiden Bestandtheile bei $+4^0 R.$ resp. mit σ_1, σ_2 und das daraus berechnete der Legirung mit σ bezeichnet, dieselben Grössen bei P^0 resp. mit s_1, s_2, S; die Volumina der Bestandtheile resp. mit w_1 und w_2, ferner die resp. Ausdehnungsfactoren von 4^0 bis P^0 (d. h. die Verhältnisse zwischen dem Volumen bei P^0 und demjenigen bei 4^0) mit α_1 und α_2, endlich der Ausdehnungsfactor der Legirung von 4^0 bis P^0 mit β; dann ist, wenn noch

1) $$w_1\alpha_1 = v_1\,,\quad w_2\alpha_2 = v_2$$

gesetzt wird:

2) $$\sigma = S\beta\,,\quad \sigma_1 = s_1\alpha_1\,,\quad \sigma_2 = s_2\alpha_2\,.$$

Ferner bei 4^0:

3) $$\sigma = \frac{\sigma_1 w_1 + \sigma_2 w_2}{w_1 + w_2}\,,$$

bei P^0:

4) $$\frac{\sigma}{\beta} = \frac{\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\cdot w_1\alpha_1 + \frac{\sigma_2}{\alpha_2}\cdot w_2\alpha_2}{w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2}$$

oder:

5) $$S = \frac{s_1 v_1 + s_2 v_2}{v_1 + v_2}\,.$$

In Formel 4) sind alle Grössen ausser β und σ praktisch bestimmbar. Namentlich genügt es, um α_1 und α_2 zu finden, die lineare Ausdehnung eines Metallstabes zwischen 4^0 und P^0 zu bestimmen; die dritte Potenz des gefundenen Factors ist dann das gesuchte α. Dieses Verfahren ist auf die Legirung (für welche man auch eine Erfahrungsformel von der Form $\beta = 1 + At + Bt^2$ nicht voraussetzen kann) nicht anwendbar, da P jenseit ihres Schmelzpunktes liegt; doch können wir mit Hilfe der Gleichungen 3) und 4) β unmittelbar durch w_1, w_2, σ_1, σ_2 ausdrücken. Durch Combination dieser Gleichungen erhält man nämlich:

$$w_1 + w_2 = \frac{w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2}{\beta}$$

und:

$$\beta = \frac{w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2}{w_1 + w_2}\,.$$

Endlich ist noch $s = \frac{\Sigma}{\beta}$, wo Σ das beobachtete specifische Gewicht der Legirung bei $+4^0 R.$ ist.

also die Wärme $P - p$ gebunden und wird nicht durch Schmelzen derselben frei, sondern erst durch Trennung der Bestandtheile. Sie würde frei werden, wenn man die Legirung bis P^0 in festem Zustande erhalten könnte.

Nachdem auf diese Weise zwischen der Erniedrigung des Schmelzpunktes und derjenigen des specifischen Gewichtes ein Zusammenhang hergestellt ist, brauchen wir, um die Vergrösserung des Volumens zu erklären, nur anzunehmen (übereinstimmend mit Matthiessen), dass zwischen zwei Atomen desselben Metalls der Quotient aus der abstossenden und der anziehenden Kraft kleiner ist, als zwischen zwei Atomen verschiedener Metalle. Denn da wir uns in der Legirung jedes Atom des einen Metalls von irgend einer Anzahl von Atomen des andern umlagert zu denken haben, so ist unter der gemachten Annahme klar, dass in der Legirung jedes Atom des einen Metalls von den Nachbaratomen durch grössere Zwischenräume getrennt sein wird, als vorher. Da dies für beide Metalle gilt, so wird der Raum, den die Legirung einnimmt, grösser sein müssen, als die Summe der Räume, welche die Bestandtheile einnahmen.

Bevor wir an die Formulirung der oben geführten Untersuchung gehen, wollen wir versuchen, noch eine andere, an Legirungen beobachtete Erscheinung mit unseren Resultaten in Zusammenhang zu bringen. Wir sahen oben, dass die Legirung beim Erkalten während der Umlagerung der Atome (oder während die Atome ihren neuen Gleichgewichtszustand annehmen) keine Wärme verliert, indem jene $P - p$ Grad die Arbeit der Ausdehnung verrichten. Während dieser Zeit wird also die Abkühlung der Legirung keine Fortschritte machen, d. h. ihr Temperaturzustand stationär bleiben, und zwar auf P Grad. Dann wird die Abkühlung weiter bis p Grad fortgesetzt werden und nunmehr die Erstarrung eintreten.* Beobachtungen dieser Art sind in der That von Rudberg gemacht worden (vgl. Eisenlohr, Lehrb. d. Physik, 1863, S. 421).

Es seien nun m_1 und m_2 die Massen zweier Metallstücke, v_1 und v_2 ihre Volumina im Zustande der Schmelzung, s_1 und s_2 ihre auf denselben Zustand bezüglichen specifischen Gewichte, also:

$$s_1 = m_1 : v_1 , \quad s_2 = m_2 : v_2 ,$$

dann ist das specifische Gewicht S der Legirung (deren Temperatur P nach der auf S. 2 gegebenen Formel bestimmbar ist) durch die Formel gegeben:

* Man könnte einwenden, dass unmittelbar nach Umlagerung der Atome die Erstarrung eintreten müsse, da der Wärmeverbrauch inzwischen fortgesetzt worden sei. Dagegen ist zu erinnern, dass die Erstarrung nicht von der Gesammtgrösse des Wärmeverbrauchs (abgegebene und gebundene Wärme), sondern nur von der Menge der abgegebenen Wärme abhängt.



1) $$S = \frac{s_1 v_1 + s_2 v_2}{v_1 + v_2}.*$$

Die Veränderungen, welche in der Legirung während der Umlagerung der Atome vor sich gehen, mögen für S, v_1, v_2 resp. mit ΔS, Δv_1, Δv_2 bezeichnet werden. Dann ist:

2) $$s = S + \Delta S = \frac{s_1 v_1 + s_2 v_2}{v_1 + \Delta v_1 + v_2 + \Delta v_2}.$$

Beide Formeln gelten für die Temperatur von P Grad. Unter Beibehaltung der in der Anmerkung auf S. 95 gebrauchten Bezeichnungen erhalten wir für die Temperatur von 4^0 die entsprechenden Formeln:

3) $$\sigma = \frac{\sigma_1 w_1 + \sigma_2 w_2}{w_1 + w_2}, \quad s_1 v_1 = \sigma_1 w_1, \quad s_2 v_2 = \sigma_2 w_2,$$

4) $$\Sigma = \sigma + \Delta\sigma.$$

Da aber $\sigma = S\beta$, so ist:

$$\sigma + \Delta\sigma = (S + \Delta S)\beta$$

oder:

5) $$\Delta\sigma = \beta . \Delta S.$$

Es wird nun unsere Aufgabe sein, die Grösse $\Delta\sigma$ oder, was nach der letzten Formel hiermit gleichbedeutend ist: ΔS durch S, P, p und die Volumina der Bestandtheile auszudrücken. Eine Formel, welche diese Bedingung erfüllt, wird uns nämlich in den Stand setzen, das specifische Gewicht einer Legirung zu bestimmen, wenn gegeben sind: die Volumina, die specifischen Gewichte (beides auf die Temperatur 4^0 bezogen), die Schmelzpunkte der beiden Bestandtheile und der Schmelzpunkt der Legirung. — Da diese Beziehung nicht für die Temperatur von P^0, sondern für diejenige von 4^0 aufgestellt werden soll, so müssen ausserdem noch die Ausdehnungsfactoren der beiden Bestandtheile für den Unterschied von 4^0 bis P^0 gegeben sein.

Es seien zur grösseren Einfachheit die beiden gegebenen Massen, sowie die Legirung kugelförmig angenommen, und die Radien bei P^0 resp. mit ϱ_1, ϱ_2, ϱ bezeichnet, das Volumen der Legirung vor Umlagerung der Atome mit v; dann ist:

$$v = v_1 + v_2,$$

$$v = \tfrac{4}{3}\varrho^3\pi, \quad v_1 = \tfrac{4}{3}\varrho_1{}^3\pi, \quad v_2 = \tfrac{4}{3}\varrho_2{}^3\pi,$$

folglich:

$$\varrho^3 = \varrho_1{}^3 + \varrho_2{}^3.$$

Sind nun $\Delta\varrho$, $\Delta\varrho_1$, $\Delta\varrho_2$ die den Aenderungen der v entsprechenden Aenderungen der ϱ, so ist:

$$(\varrho + \Delta\varrho)^3 = (\varrho_1 + \Delta\varrho_1)^3 + (\varrho_2 + \Delta\varrho)^3;$$

* Vgl. die Anmerkung auf S. 96.

oder, wenn wir die zweiten und dritten Potenzen der Aenderungen vernachlässigen:

$$\varrho^2 . \Delta\varrho = \varrho_1^2 . \Delta\varrho_1 + \varrho_2^2 . \Delta\varrho_2 .$$

Ferner:

$$v + \Delta v = \tfrac{4}{3}(\varrho + \Delta\varrho)^3\pi = \tfrac{4}{3}\pi(\varrho^3 + 3\varrho^2\Delta\varrho),$$

also:

$$\Delta v = 4\pi\varrho^2 . \Delta\varrho .$$

Ebenso:

$$\Delta v_1 = 4\pi\varrho_1^2 . \Delta\varrho_1, \qquad \Delta v_2 = 4\pi\varrho_2^2 . \Delta\varrho_2,$$

folglich:

$$6) \qquad \Delta v_1 + \Delta v_2 = 4\pi\varrho^2 . \Delta\varrho .$$

Nun folgt aus den Formeln 1) und 2):

$$S(v_1 + v_2) = (S + \Delta S)(v_1 + v_2 + \Delta v_1 + \Delta v_2)$$

oder:

$$0 = (S + \Delta S)(\Delta v_1 + \Delta v_2) + \Delta S(v_1 + v_2).$$

Setzen wir hier den Werth 6) ein, so folgt:

$$(S + \Delta S) . 4\pi\varrho^2 . \Delta\varrho = -\Delta S(v_1 + v_2)$$

oder:

$$7) \qquad \Delta\varrho = -\frac{\Delta S(v_1 + v_2)}{4\pi\varrho^2(S + \Delta S)} = -\frac{\Delta S . \varrho}{3(S + \Delta S)} .$$

Es ist nun weiter der Zusammenhang zwischen der Aenderung $\Delta\varrho$ einerseits und den Grössen S, P, p andererseits zu ermitteln. Wenn im Allgemeinen eine Kugel vom Radius r und specifischen Gewichte s eine Wärmezufuhr t erhält, so ist die Aenderung ihres Radius, Δr, eine nicht näher bekannte Function von s und t, also etwa

$$\Delta r = f(t, s).$$

Bezeichnen wir nun mit x denjenigen Theil von t, welcher die Arbeit der Ausdehnung leistet, und mit y denjenigen, welcher die Temperaturerhöhung herbeiführt, so ist x proportional mit Δr. (Wenn, wie es zwischen 0^0 und 100^0 der Fall ist, x und y nahezu ein constantes Verhältniss haben, so dass man $y = cx$ setzen kann, so ist $t = x + y = (1 + c)x$. In diesem Falle ist nun bekanntlich Δr proportional mit t, also auch mit x.) Aber in unserem speciellen Falle ist $P - p$ gerade die Wärme, welche die Ausdehnung $\Delta\varrho$ bewirkt, mithin $P - p$ proportional mit $\Delta\varrho$.

Die von der Wärme $P - p$ zu leistende Arbeit ist ferner dem specifischen Gewichte S proportional, welches die Legirung vor der Umlagerung der Atome bei der Temperatur von P^0 besitzt. Denn wenn zwei Kugeln mit gleichem Volumen eine gleiche Ausdehnung erlitten haben, so ist die Arbeit proportional der Masse, d. h. da die Volumina gleich sind, dem specifischen Gewichte.

Wir erhalten daher, wenn c einen constanten Factor bezeichnet, die Formel:

$$8) \qquad c(P - p) = S . \Delta\varrho .$$

Die Bedeutung von c ergiebt sich, wenn wir $P - p$ und S gleich 1 setzen. Dann ist c die lineare Aenderung, welche ein Körper vom Volumen 1 und der Masse 1 durch einen Wärmeverbrauch (nicht Wärmezufuhr!) von 1^0 erhält. — Um die Bedeutung von c zu ermitteln, können wir auch annehmen, der zu betrachtende Körper sei Wasser. Wenn wir demzufolge $P = 0$ setzen, und S gleich dem specifischen Gewichte des Wassers bei $+ 1^0$, gleich c', so ist:

$$c = c' \,.\, \varDelta \varrho,$$

oder, wenn wir noch $c : c' = C$ setzen:

$$9) \qquad C = \varDelta \varrho,$$

d. h.: C ist die lineare Aenderung, welche eine Wasserkugel von der Temperatur $+ 1^0$ durch einen Wärmeverbrauch von $+ 1^0$ erleidet.

Aus Vergleichung der Formeln 7) und 8) ergiebt sich nun:

$$c(P - p) = - \frac{\varDelta S \,.\, \varrho \,.\, S}{3(S + \varDelta S)},$$

oder:

$$3\,Sc(P - p) + 3\,c(P - p)\,\varDelta S + S \,.\, \varrho \,.\, \varDelta S = 0$$

oder:

$$10) \qquad \varDelta S = - \frac{3\,c \,.\, S \,.\, (P - p)}{\varrho S + 3\,c(P - p)},$$

wodurch die verlangte Formel hergestellt ist. — Hierin haben, wenn wir alle Messungen auf die Temperatur von $+ 4^0$ reduciren, die Buchstaben S und ϱ folgende Bedeutung:

$$11) \qquad S = \frac{\sigma_1 w_1 + \sigma_2 w_2}{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}, \qquad \varrho = \sqrt[3]{\alpha_1 r_1^3 + \alpha_2 r_2^3}.$$

Und es sind w_1 und w_2 die Volumina, r_1 und r_2 die Radien, σ_1 und σ_2 die specifischen Gewichte, α_1 und α_2 die Ausdehnungsfactoren zwischen $+ 4^0$ und $+ P^0$ für die beiden Bestandtheile der Legirung und die w, r und σ für die Temperatur von 4^0 bestimmt.

Endlich ist, wenn wir die Formeln 4), 5) und 3) zu Hilfe nehmen:

$$12) \qquad \Sigma = \frac{\sigma_1 w_1 + \sigma_2 w_2}{w_1 + w_2} + \frac{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}{w_1 + w_2} \,.\, \varDelta S.$$

Hiermit ist nun auch die gesuchte Functionsbeziehung zwischen den Grössen Σ und p dargethan, d. h. zwischen dem wirklichen specifischen Gewichte der Legirung und ihrem Schmelzpunkte.

Die Constante c wird man praktisch nicht anders ermitteln können, als indem man in dem Gleichungssysteme 10), 11), 12) alle Grössen ausser c numerisch berechnet und dann c bestimmt. Das Mittel aus mehreren, mit verschiedenen Legirungen ausgeführten Bestimmungen würde dann einen genaueren Werth geben, und zugleich könnte an der Uebereinstimmung der erhaltenen Werthe von c die Richtigkeit der im Vorstehenden mitgetheilten Theorie geprüft werden.

Waren, im October 1872. V. Schlegel.

III. Ueber Kegelschnitte, welche zwei Punkte gemeinsam haben.

Die Gleichung

$$1)\qquad \varkappa x x' + \lambda x + \mu x' + \nu = 0$$

stellt bekanntlich das homographische Entsprechen zweier Punktreihen x, x' vor. Dieselben mögen sich auf derselben Graden, der Axe, befinden und auch der Anfang der Coordinaten xx' der Einfachheit wegen derselbe sein. Ich nehme nun auf einer durch den letzteren gehenden Geraden zwei Punkte E, F an. Dann bestimmen die beiden Geraden Ex, Fx' durch ihre Schnittpunkte einen Kegelschnitt, dessen Gleichung durch 1) vorgestellt wird. Derselbe geht durch die Punkte E, F; seine Tangenten in denselben schneiden die Axe in den Punkten $-\frac{\nu}{\mu}$, $-\frac{\nu}{\lambda}$ und der Pol von EF hat daher die Coordinaten $x = -\frac{\nu}{\lambda}$, $x' = -\frac{\nu}{\mu}$.

Die Gleichung 1) stellt zwei durch E, F gehende Gerade vor, wenn $\lambda\mu - \nu\varkappa = 0$.

Der Kegelschnitt zerfällt ebenfalls für $\nu = 0$ in zwei Gerade, deren eine die Linie EF ist. Als Gleichung der Geraden kann man also betrachten:

$$2)\qquad \varkappa x x' + \lambda x + \mu x' = 0.$$

Für $\varkappa a + \lambda b + \mu c = 0$ gehen sämmtliche durch 2) vorgestellte Gerade durch einen festen Punkt, nämlich:

$$x' = \frac{a}{b}, \qquad x = \frac{a}{c}.$$

Ueberhaupt gelten hier ganz ähnliche Bemerkungen wie für die gewöhnlichen Coordinaten. Ohne auf dieselben weiter einzugehen, führe ich nur noch die Gleichung der Polare eines Punktes xx' in Bezug auf den Kegelschnitt 1) an, welche man leicht auf verschiedene Weise erhalten kann. Dieselbe ist:

$$3)\qquad XX'(\mu x' + \lambda x + 2\varkappa x x') + Xx'(\lambda x + \nu) + X'x(\mu x' + \nu) = 0,$$

oder, wenn 1) durch $fxx' = 0$ bezeichnet wird:

$$4)\qquad XX' fxx' + xx' fXX' - \nu(X - x)(X' - x') = 0,$$

wo XX' die laufenden Coordinaten bedeuten. Man bemerkt, wie in dieser symmetrischen Form der Polarengleichung die Reciprocität von Pol und Polare hervortritt. Als Beispiel der Anwendung von 4) mag folgender Satz dienen. Da $xx' = 0$ die Gleichung von EF bedeutet, so ist $XX'fxx' + xx'fXX' = 0$ die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher mit 1) eine doppelte Berührung in den Punkten E, F hat; $(X - x)(X' - x')$ dagegen die des von E, F nach dem Pole xx' gezogenen Geradenpaares. Hieraus folgt: Die Verbindungslinien zweier



Punkte E, F eines Kegelschnitts mit einem beliebigen Punkte o werden von der Polare von O in zwei Punkten geschnitten, durch welche ein Kegelschnitt geht, der mit dem ersten eine doppelte Berührung in E, F hat.

Nach diesen Bemerkungen sollen einige involutorische Eigenschaften von Kegelschnitten, welche durch dieselben zwei Punkte gehen, besprochen werden. Wird ein Punktepaar $x\,x'$ durch die Wurzeln der Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dargestellt, so zeigt die Bedingung

$$\alpha a + b\beta + c\gamma = 0 \tag{5}$$

oder:

$$\alpha - \beta(x + x') + \gamma x x' = 0$$

an, dass sämmtliche Punktepaare, welche der linearen Bedingung genügen, eine Involution bilden. Im Folgenden mag ein Punkt, welcher mit anderen verbunden, ein involutorisches Büschel liefert, in Involution in Bezug auf dieselben heissen. Zwei Kegelschnitte

$$\begin{aligned} \varkappa_0 x x' + \lambda_0 x + \mu_0 x' + \nu_0 &= 0, \\ \varkappa\, x x' + \lambda\, x + \mu\, x' + \nu\; &= 0 \end{aligned}$$

schneiden sich in einem Punktepaare, dessen x Coordinaten gegeben sind durch

$$x^2(\lambda_0\varkappa - \varkappa_0\lambda) + x(\nu_0\varkappa - \nu\varkappa_0) + \lambda_0\mu - \lambda\mu_0) + \nu_0\mu - \nu\mu_0 = 0. \tag{6}$$

Soll nun für drei Kegelschnitte 0, 1, 2, welche von einem vierten geschnitten werden, eine lineare Bedingung 5) zwischen den Coefficienten dieser Gleichung bestehen, so ergibt sich:

$$0 = \begin{vmatrix} \varkappa\lambda_0 - \lambda\varkappa_0 & \varkappa\nu_0 - \nu\varkappa_0 + \lambda_0\mu - \lambda\mu_0 & \nu_0\mu - \nu\mu_0 \\ \varkappa\lambda_1 - \lambda\varkappa_1 & \varkappa\nu_1 - \nu\varkappa_1 + \lambda_1\mu - \lambda\mu_1 & \nu_1\mu - \nu\mu_1 \\ \varkappa\lambda_2 - \lambda\varkappa_2 & \varkappa\nu_2 - \nu\varkappa_2 + \lambda_2\mu - \lambda\mu_2 & \nu_2\mu - \nu\mu_2 \end{vmatrix}.$$

oder:

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \mu_0 & \nu_0 & \varkappa_0 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & \varkappa_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & \varkappa_2 \\ \lambda & \mu & \nu & \varkappa \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varkappa & 0 & 0 & -\lambda \\ \mu & -\lambda & \varkappa & -\nu \\ 0 & -\nu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varkappa \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Die zweite Determinante in 7) hat den Werth $\varkappa^2(\lambda\mu - \nu\varkappa)$, da aber für das Verschwinden derselben 6) in zwei ganz unabhängige Factoren zerfällt, so ist nur die erstere zu betrachten.

Dieselbe verschwindet zunächst für jedes $\lambda\,\mu\,\nu\,\varkappa$, wenn die Gleichungen:

$$\alpha\lambda_2 + \beta\lambda_1 + \gamma\lambda_0 = 0, \quad \alpha\mu_2 + \beta\mu_1 + \gamma\mu_0 = 0 \text{ u. s. w.}$$

bestehen. Daher der Satz:

Jeder Kegelschnitt, welcher durch zwei der gemeinschaftlichen Punkte E, F eines Büschels geht, schneidet die Kegelschnitte des letzteren in Punkten, in Bezug auf welche E, F — und damit auch jeder andere Punkt desselben — in Involution sind. Ein specieller Fall hiervon ist das bekannte Theorem über den Schnitt einer Geraden mit einem Büschel von Kegelschnitten. Drei gerade Linien, welche durch einen Punkt gehen, bilden mit der Geraden EF drei Kegelschnitte eines Büschels. Jeder Kegelschnitt schneidet also sich in einem Punkte schneidende Gerade in Punkten, in Bezug auf welche jeder Punkt des Kegelschnittes in Involution ist. Oder auch: Ist ein Punkt eines Kegelschnittes in Involution in Bezug auf andere desselben, so gehen die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch ein und denselben Punkt. Im Allgemeinen ist die Determinante 7) gleichbedeutend mit der Bedingung:

$$8)\qquad A\lambda + B\mu + C\nu + D\varkappa = 0.$$

Sämmtliche Kegelschnitte, deren Coefficienten dieser genügen, bilden ein System, für welches die Coefficienten $\alpha\,\beta\,\gamma$ in 5) die Werthe erhalten:

$$\nu A + D\mu, \quad C\nu + B\mu, \quad -(\lambda C + B\varkappa).$$

Jeder Kegelschnitt des Systems 8) schneidet sämmtliche andere in Punkten, in Bezug auf welche E, F, also auch jeder andere dieses Kegelschnittes in Involution ist. Zugleich gehen die Sehnen, welche demselben mit sämmtlichen gemeinschaftlich sind, durch einen Punkt. Da die in Gerade zerfallenden Kegelschnitte des Systems durch

$$A\lambda + B\mu + D\varkappa = 0$$

bedingt sind, so wird jede Gerade, welche durch den Punkt $x = \frac{D}{A}$, $x' = \frac{D}{B}$ geht, von sämmtlichen Kegelschnitten des Systems in einer Involution geschnitten. Hieraus folgt, dass die gemeinsamen Sehnen aller Kegelschnitte des Systems durch den genannten Punkt, den Centralpunkt des Systems gehen.

Je drei ganz beliebige Kegelschnitte, welche durch dieselben zwei Punkte gehen, haben also stets drei sich in einem Punkte schneidende Sehnen gemeinsam und jede durch den letzteren gehende Gerade wird von ihnen in sechs Punkten einer Involution geschnitten. Dieser Punkt führt bei Kreisen den Namen Potenzpunkt.

Die Kegelschnitte zerfallen aber auch, wenn $\lambda\mu = \nu\varkappa$, in zwei Gerade, welche sich im Punkte $x' = -\frac{\lambda}{\varkappa}$, $x = -\frac{\mu}{\varkappa}$ schneiden. Sämmtliche Schnittpunkte derselben liegen auf dem Kegelschnitte

$$9)\qquad Ax' + Bx = Cxx' + D.$$

Gehen also drei Linienpaare aa', bb', cc' durch zwei Punkte EF, so wird jede Gerade, welche durch den Pol von EF in Bezug auf den durch E, F und die Schnittpunkte von aa', bb', cc' gelegten Kegelschnitt die sechs Linien in einer Involution schneiden. Dies folgt übrigens unmittelbar aus der Gleichung eines Kegelschnittes, welche in der Form

$$\varkappa x x' + \lambda(x + x') + \nu = 0$$

vorausgesetzt wird.

Man bemerkt ferner, dass der Centralpunkt der Pol von EF in Bezug auf 9) ist. Auf jeder Geraden, welche durch den Centralpunkt geht, liegen zwei Doppelpunkte der Involution. Sie sind charakterisirt durch die geometrische Beziehung, dass die Polaren des einen in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems durch den andern gehen. Sämmtliche Doppelpunkte bilden einen Kegelschnitt, welcher mit 9) identisch sein muss, wie unmittelbar aus der Bemerkung hervorgeht, dass derselbe aus Doppelpunkten der Kegelschnitte des Systems gebildet ist. Man erhält dasselbe Resultat auch leicht durch die Bedingung, dass die Polaren dreier Kegelschnitte des Systems 0, 1, 2 durch einen Punkt gehen sollen; dieselbe liefert eine Determinante, deren erste Horizontalreihe nach 3) ist:

$$\mu x' + \lambda x + 2\varkappa x x', \qquad x'(\lambda x + \nu), \qquad x(\mu x' + \nu)$$

und bis auf einen nicht verschwindenden Factor vermöge des Multiplicationstheorems ersetzt werden kann durch

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \lambda_0 & \nu_0 & \varkappa_0 \\ \mu_1 & \lambda_1 & \nu_1 & \varkappa_1 \\ \mu_2 & \lambda_2 & \nu_2 & \varkappa_2 \\ -X & X' & 1 & xx' \end{vmatrix} = 0,$$

welche ihrerseits übergeht in

$$Ax' + Bx = Cxx' + D.$$

Darnach liegen die Doppelpunkte der Involution auf dem Kegelschnitt 9) und zwar für das ganze System, da auch die Unterdeterminanten der ursprünglichen ganz unabhängig von $\lambda_0\, \lambda_1\, \lambda_2$ u. s. w. werden.

Jeder Kegelschnitt des Systems schneidet 9) in zwei Punkten. Aus der eben bewiesenen Eigenschaft der Polaren folgt, dass die Verbindungslinien derselben mit dem Centralpunkte Tangenten des ersteren sein werden. Umgekehrt lässt sich leicht nachweisen, dass jeder Kegelschnitt, dessen Polare des Centralpunkts als Sehne betrachtet zugleich Sehne von 9) ist, dem Systeme angehört. Denn ist

$$\varkappa x x' + \lambda x + \mu x' + \nu = 0$$

ein beliebiger Kegelschnitt, so ist die Polare des Centralpunkts

$$xx'(\mu B + \lambda A + 2\varkappa D) + x(\lambda D + \nu B) + x'(\mu D + A\nu) = 0,$$

zu welchen Gleichungen noch 9) hinzukommt. Schreibt man die letzte in der Form

$$xx'(\mu B + \lambda A + 2\varkappa D) + D(\lambda x + \mu x') + \nu(Cxx' + D) = 0$$

und ersetzt $\lambda x + \mu x'$, $Cxx' + D$ durch ihnen gleiche Ausdrücke, so entsteht:

$$xx'(A\lambda + B\mu + C\nu + \varkappa D) = 0.$$

Man kann daher das ganze System als zusammengesetzt ansehen aus Kegelschnitten, welche durch E, F gehen und in einem beliebigen Punkte von 9) eine gemeinschaftliche, durch den Centralpunkt gehende Tangente besitzen.

Es erübrigt endlich noch die Construction eines beliebigen Kegelschnittes des Systems, welcher z. B. durch zwei gegebene Punkte OP geht. Durch einen gegebenen Punkt gehen unendlich viele, welche ein Büschel bilden. Jedem Punkte O entspricht daher ein anderer O', als vierter Basispunkt des Büschels. Da aber die zerfallenden Kegelschnitte entweder ihren Doppelpunkt auf 9) haben oder aus EF und einer durch den Centralpunkt gehenden Geraden bestehen, so ergiebt sich folgende Construction: Man verbinde O mit $E(F)$ und dem Centralpunkte [Pol von EF in Bezug auf 9)] durch eine Gerade, welche von der durch $F(E)$ und den Punkt gelegten, in welchem $OE(OF)$ den Kegelschnitt 9) schneidet, in dem zugehörigen Punkte O' getroffen wird, wobei selbstverständlich die Vertauschung von E und F zulässig ist. Ist noch ein Punkt P gegeben, durch welchen der Kegelschnitt des Systems gehen soll, so kann man ihn als fünften zu $OO'EF$ betrachten und auch noch den entsprechenden P' als sechsten hinzunehmen.

Schliesslich ist zu bemerken, dass sämmtliche Betrachtungen nach dem Dualitätsprincip interpretirt werden können. Die Punkte EF verwandeln sich dann in zwei gemeinschaftliche Tangenten der Kegelschnitte; doch erscheint es überflüssig, hierauf weiter einzugehen.

Lingen, 15. Juni 1872. Dr. Voss.

IV. Ueber die Normalen der Ellipse.

1. Die Construction der vier Normalen, welche von einem Punkte aus auf eine Ellipse gefällt werden können, kann bekanntlich im Allgemeinen mit Hilfe des Lineals und Zirkels allein nicht ausgeführt werden. Eine Ausnahme hiervon bilden jedoch die Fälle, in welchen der gegebene Punkt auf einer Axe oder auf der Ellipse selbst liegt. Es soll im Nachstehenden zunächst auf zwei Kreise aufmerksam gemacht werden, deren Punkte gleichfalls eine Ausnahme bilden.

Drückt man die Coordinaten eines Punktes einer Ellipse, deren Halbaxen a und b sind, durch Einführung eines Hilfswinkels φ in der bekannten Form

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi$$

aus, so ist die Gleichung der Normalen an die Ellipse in diesem Punkte:

$$ax \sin \varphi - by \cos \varphi = c^2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

wobei:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

die lineare Excentricität der Ellipse bedeutet. Der Schnittpunkt dieser Normalen mit der Linie

$$y = x \tan \varphi,$$

welche durch das Centrum geht und mit der grossen Axe den eingeführten Hilfswinkel φ bildet, hat die Coordinaten

$$x = (a + b) \cos \varphi, \qquad y = (a + b) \sin \varphi,$$

und liegt daher auf einem mit der Ellipse concentrischen Kreise, dessen Halbmesser $a + b$ ist.

Ebenso liegt der Schnittpunkt derselben Normalen mit der Linie

$$y = - tg\, \varphi$$

auf einem Kreise, dessen Halbmesser $a - b$ ist.

Bewegen sich daher auf den zwei mit einer Ellipse concentrischen Kreisen, deren Halbmesser gleich der Summe und der Differenz ihrer Halbaxen sind, von der grossen Axe aus in entgegengesetzter Richtung zwei Punkte mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, so ist die Verbindungslinie der gleichzeitigen Lagen dieser Punkte eine Normale und die Umhüllende sämmtlicher Verbindungslinien die Evolute der Ellipse.

Die angestellten Betrachtungen lassen sich sehr leicht verwerthen bei der Construction der Normalen in einem beliebigen Ellipsenpunkte; vor Allem aber ergiebt sich aus ihnen, wie man von irgend einem Punkte jener zwei Kreise sofort auf die Ellipse eine Normale fällen kann.

Hat man nun diese eine Normale, so kann man auch die übrigen finden, wenn man in der von mir in einem Aufsatze „Ueber die Normalen von Kegelschnitten" (vergl. Band XI dieser Zeitschrift) angegebenen Weise den Kreis construirt, welcher durch die drei Fusspunkte derselben geht.

Wendet man die dort ausgeführten Rechnungen an, so ergiebt sich, dass die Potenz des Centrums in Bezug auf den zu einem Punkte des äusseren Kreises gehörigen Constructionskreis ist:

$$C = -(a^2 + ab + b^2),$$

ebenso für einen Punkt des innern Kreises:

$$C = -(a^2 - ab + b^2).$$

Sie ist daher für alle Punkte desselben Kreises constant.

2. Da man durch die Fusspunkte der vier Normalen, die von einem Punkte aus auf eine Ellipse gefällt werden können, vier von einander verschiedene Kreise legen kann, so gehören zu jedem Punkte eigentlich vier Constructionskreise. Es lässt sich nun nach den Curven fragen, auf denen sich ein Punkt bewegen muss, wenn die Potenz des Centrums in Bezug auf einen der zu jenem gehörigen Constructionskreise constant sein soll. Dann muss, wenn wir uns der im angegebenen Aufsatze angewandten Bezeichnungen bedienen:

$$C = -\left(a^2 + b^2 \frac{y'}{Y}\right) = -\left(b^2 + a^2 \frac{x'}{X}\right)$$

sein, woraus sich als Gleichung des Ortes für den Punkt x', y' ergiebt:

$$\left(\frac{ax}{C + b^2}\right)^2 + \left(\frac{by}{C + a^2}\right)^2 = 1.$$

Dieser Ort ist eine Ellipse, von welcher die ursprüngliche Ellipse (für $C = -a^2 - b^2$), die beiden Axen (für $C = -a^2$ und $C = -b^2$), sowie die beiden oben betrachteten Kreise specielle Fälle sind. Die Halbaxen dieser neuen Ellipse (a', b') hängen mit denen der alten durch eine bestimmte Gleichung zusammen, die aber je nach der Grösse von C verschiedene Gestalten annimmt.

So lange $C + a^2$ negativ bleibt, ist

$$aa' - bb' = c^2.$$

Ist $C + a^2$ positiv, aber $C + b^2$ negativ, so wird:

$$aa' + bb' = c^2.$$

Ist endlich $C + b^2$ positiv, so wird:

$$bb' - aa' = c^2.$$

Wie die Grösse der Axen a' und b' mit der Grösse der Potenz C sich ändert, ergiebt folgende einfache Zusammenstellung. Es ist für

$$\begin{array}{ll}
-C > a^2 + ab + b^2 & : a' < b', \\
-C = a^2 + ab + b^2 & : a' = b', \\
-C \begin{array}{l} < a^2 + ab + b^2 \\ > a^2 \end{array} & : a' > b', \\
-C = a^2 & : b' = 0, \\
-C \begin{array}{l} < a^2 \\ > a^2 - ab + b^2 \end{array} & : a' > b', \\
-C = a^2 - ab + b^2 & : a' = b', \\
-C \begin{array}{l} < a^2 - ab + b^2 \\ > b^2 \end{array} & : a' < b', \\
-C = b^2 & : a' = 0, \\
-C < b^2 & : a' < b'.
\end{array}$$

3. Die im vorigen Paragraphen besprochenen Ellipsen haben mit den Kreisen des § 1 die Eigenschaft gemein, dass man von allen Punkten derselben, vorausgesetzt, dass die Ellipsen gegeben sind, ohne Weiteres eine Normale auf die ursprüngliche Ellipse fällen kann.

Aus den beiden Gleichungen

$$C + a^2 = -\frac{b^2 y'}{Y}, \qquad C + b^2 = -\frac{a^2 x'}{X}$$

ergiebt sich, wenn $C + a^2$ negativ ist:

$$\frac{x'}{X} = \frac{a'}{a}, \qquad \frac{y'}{Y} = \frac{b'}{b};$$

wenn $C + a^2$ positiv, aber $C + b^2$ negativ ist:

$$\frac{x'}{X} = \frac{a'}{a}, \qquad \frac{y'}{Y} = -\frac{b'}{b};$$

wenn $C + b^2$ positiv ist:

$$\frac{x'}{X} = -\frac{a'}{a}, \qquad \frac{y'}{Y} = -\frac{b'}{b}.$$

Ist nun φ' der zum Punkte $x'y'$ der Ellipse $a'b'$ gehörige Hilfswinkel, und gehört ebenso φ zum Fusspunkte XY der Normalen, so ist in jedem einzelnen der drei zu unterscheidenden Fälle:

$$\varphi = \varphi',$$
$$\varphi = 360^0 - \varphi',$$
$$\varphi = 180^0 + \varphi'.$$

Mit Hilfe dieser einfachen Gleichungen lässt sich natürlich sofort der Fusspunkt der einen Normalen construiren, wobei sich auch mit besonderem Vortheil der Kreis mit dem Halbmesser $a + b$ benutzen lässt.

4. Die Ellipsen des § 2 sind zugleich diejenigen Curven, welche man erhält, indem man die durch die Axen auf den Normalen der ursprünglichen Ellipse abgeschnittenen Strecken in bestimmtem Verhältniss theilt und die Theilpunkte verbindet. Die Gleichung dieses Ortes ist nämlich für das Theilungsverhältniss $m : n$:

$$\left(\frac{(m+n)\,a x}{m c^2}\right)^2 + \left(\frac{(m+n)\,b y}{n c^2}\right)^2 = 1,$$

und es ist für ein positives $m : n$:

$$a a' + b b' = c^2,$$

während für ein negatives $m : n$, je nachdem $m \gtrless n$:

$$a a' - b b' = \pm c^2$$

ist, wobei $a'b'$ die Halbaxen des Ortes sind.

Sobald

$$\frac{m}{n} = \pm \frac{a}{b}$$

ist, erhält man die Kreise des § 1. Die vier Punkte, welche irgend eine Normale der Ellipse mit den Axen und diesen zwei Kreisen gemein hat, bilden daher eine harmonische Punktreihe.

5. Wenn sich ein Punkt auf der Ellipse

$$1) \qquad \left(\frac{ax}{C+b^2}\right)^2 + \left(\frac{by}{C+a^2}\right) = 1$$

bewegt, so beschreibt der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Fusspunkte der drei von jenem ausgehenden, nicht unmittelbar zu construirenden Normalen gelegt werden kann, ebenfalls eine Ellipse, deren Gleichung ist:

$$\left(\frac{ax}{C+a^2}\right)^2 + \left(\frac{by}{C+b^2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Die Ellipse

$$2) \qquad \left(\frac{ax}{C+a^2}\right)^2 + \left(\frac{by}{C+b^2}\right)^2 = 1,$$

deren Axen doppelt so gross sind, als diejenigen der Mittelpunktsellipse, ist ebenfalls eine Curve des Systems 1), da, sobald C durch $-(C + a^2 + b^2)$ ersetzt wird, die Gleichung 2) in 1) übergeht. Dabei entsprechen sich die beiden Curven 1) und 2) derart, dass jede mit den halben Axen der einen beschriebenen Ellipse die Mittelpunktsellipse der andern wird.

Für $C = -\frac{a^2+b^2}{2}$ fällt die Ellipse 1) mit 2) zusammen und die Gleichung beider wird:

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{c^4}{4}.$$

Diese Linie ist die einzige unter den Curven des Systems 1), welche der gegebenen Ellipse ähnlich, wenn auch nicht zu ihr ähnlich gelegen ist, und wird beschrieben von den Mittelpunkten der Strecken, welche auf den Normalen der gegebenen Ellipse durch die Axen abgeschnitten werden.

Chemnitz, den 2. October 1872. Dr. F. E. Eckardt.



V. Zur Theorie der geradlinigen Bewegung eines Punktes.

Wenn die Beschleunigung eines Punktes centrifugal ist und umgekehrt proportional der n^{ten} Potenz des Abstandes von einem festen Centrum, so ist die Hauptgleichung der Bewegung:

$$1)\qquad \frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=+\frac{\mu}{x^n},$$

folglich nach Integration:

$$2)\qquad v^2-v_0^2=\frac{2\mu}{n-1}\left(\frac{1}{x_0^{n-1}}-\frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

wo v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, x_0 die Anfangsentfernung bedeutet, und $n>+1$ angenommen wird. Setzt man $V_0=0$, so folgt für den Minimalabstand x_1 vom Centrum:

$$3)\qquad \frac{1}{x_1^{n-1}}=\frac{1}{x_0^{n-1}}+\frac{n-1}{2\mu}v_0^2.$$

Diesen Abstand wird der Punkt erreichen, wenn die Anfangsgeschwindigkeit nach dem Centrum zu gerichtet ist. Wenn $v_0=0$, ist $x_1=x_0$; nimmt aber v_0 zu, so wird x_1 kleiner bis zur Grenze Null, wenn $v_0=\infty$. Demnach wird der sich bewegende Punkt zuerst den Minimalabstand erreichen, dann zurückkehren und sich mit zunehmender Geschwindigkeit von dem Centrum unendlich entfernen, mit einer Geschwindigkeitsgrenze V, welche durch die Gleichung ausgedrückt wird:

$$4)\qquad V^2=v_0^2+\frac{2}{n-1}\,\frac{\mu}{x_0^{n-1}}=\frac{2}{n-1}\,\frac{\mu}{x_1^{n-1}}.$$

Durch Elimination von v_0 aus 2) und 3) erhält man:

$$5)\qquad v^2=\frac{2\mu}{n-1}\left(\frac{1}{x_1^{n-1}}-\frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

und durch Elimination von x_0 aus 2) und 4):

$$6)\qquad V^2-v^2=\frac{2}{n-1}\cdot\frac{\mu}{x^{n-1}}.$$

Um die Zeit T zu finden, welche der Punkt von der Anfangsentfernung bis zum Minimalabstand gebraucht, nehmen wir aus 5):

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{2\mu}{n-1}\left(\frac{1}{x_1^{n-1}}-\frac{1}{x^{n-1}}\right),$$

folglich:

$$7)\qquad \sqrt{\frac{2\mu}{n-1}}\,T=\int_{x_1}^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{x_1^{n-1}}-\frac{1}{x^{n-1}}}}=x_1^{\frac{n-1}{2}}\int_{x_1}^{x_0}\frac{x^{\frac{n-1}{2}}\,dx}{\sqrt{x^{n-1}-x_1^{n-1}}}.$$

Schreibt man diese Gleichung folgendermassen:

$$\sqrt{\frac{2\mu}{n-1}}\,T = x_1^{\frac{n-1}{2}} \int_{x_1}^{x_0} \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{x^{n-2} + x_1 x^{n-3} \ldots + x_1^{n-1}}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x - x_1}},$$

so erhält der erste Factor des Integrals zwischen den Grenzen immer einen endlichen Werth; sei M ein Mittelwerth dieses Factors, so kann gesetzt werden:

$$\sqrt{\frac{2\mu}{n-1}}\,T = x_1^{\frac{n-1}{2}} M \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x - x_1}} = 2\,x_1^{\frac{n-1}{2}} M \sqrt{x_0 - x_1}.$$

Hieraus folgt, dass $T = 0$ wird, sowohl wenn $x_1 = x_0$, als auch wenn $x_1 = 0$, das heisst: wenn $v_0 = 0$ und $v_0 = \infty$. Demnach muss ein Zwischenwerth von v_0 bestehen, für welchen T ein Maximum wird. Dieser Werth kann gefunden werden, wenn man den Differentialquotienten von T in Beziehung auf v_0 gleich Null setzt.

Sei

$$W = \int_a^b f(xr)\,dr,$$

so ist bekanntlich:

$$\frac{dW}{dr} = -f(ar)\frac{da}{dr} + f(br)\frac{db}{dr} + \int_a^b \frac{\partial f(xr)}{\partial r}\,dx.$$

Führt man diese Gleichung ein in 7), wo x_1 als Function von v_0 vorkommt, so wird:

$$8) \qquad \sqrt{\frac{2\mu}{n-1}} \cdot \frac{dT}{dv_0} = -\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_1^{n-1}} - \frac{1}{x^{n-1}}}}\right]^{x = x_1} \frac{dx_1}{dv_0}$$

$$+ \int_{x_1}^{x_0} \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x_1^{n-1}} - \frac{1}{x^{n-1}}}}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dv_0}\,dx.$$

Da jedoch das erste Glied im rechten Theile unendlich gross wird, so ist die Anwendung dieser Formel schwer durchzuführen, und wir wollen daher einen andern Weg einschlagen. Die Gleichungen 1) und 6) geben:

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{\mu}\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{1}{x^{n-1}} = \frac{n-1}{2\mu}(V^2 - v^2),$$

folglich durch Elimination von x:



$$\frac{dv}{dt} = \mu\left(\frac{n-1}{2\mu}\right)^{\frac{n}{n-1}} (V^2 - v^2)^{\frac{n}{n-1}},$$

$$\mu\left(\frac{n-1}{2\mu}\right)^{\frac{n}{n-1}} dt = \frac{dv}{(V^2 - v^2)^{\frac{n}{n-1}}}.$$

Setzt man hierin zur Abkürzung

9) $$\mu\left(\frac{n-1}{2\mu}\right)^{\frac{n}{n-1}} = k,$$

so wird durch Integration zwischen den Grenzen v_0 und 0:

10) $$kT = \int_0^{v_0} \frac{dv}{(V^2 - v^2)^{\frac{n}{n-1}}},$$

von welchem Integrale das Maximum für v_0 gesucht werden muss, indem V als Function von v_0 in 4) ausgedrückt zu betrachten ist.

Setzt man jetzt:

11) $$v = V \sin\varphi, \qquad v_0 = V \sin\varphi_0,$$

was möglich ist, da V ein Maximum der Geschwindigkeit darstellt, so wird:

$$kT = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{V^{\frac{a+1}{n-1}} \cos^{\frac{n+1}{a-1}} \varphi},$$

oder, da V nicht von φ abhängt:

12) $$kT = V^{-\frac{n+1}{n-1}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\cos^{\frac{n+1}{n-1}} \varphi}.$$

Durch die Substitution 11) giebt 4):

13) $$V^2 \cos^2 \varphi_0 = \frac{2}{n-1} \frac{\mu}{x_0^{n-1}},$$

so dass V als Function von φ_0 betrachtet werden kann. Um demnach das Maximum von T zu finden, suchen wir jetzt den Differentialquotienten in Beziehung auf φ_0. So wird:

$$\frac{d.kT}{d\varphi_0} = -\frac{n+1}{n-1} V^{-\frac{2n}{n-1}} \frac{dV}{d\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\cos^{\frac{n+1}{n-1}} \varphi} + \frac{V^{-\frac{n+1}{n-1}}}{\cos^{\frac{n+1}{n-1}} \varphi}.$$

Aus 13) folgt:

$$\frac{dV}{d\varphi_0} = V \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0},$$

mithin:

$$\frac{d\,k\,T}{d\varphi_0} = V^{-\frac{n+1}{n-1}} tang\,\varphi_0 \left(-\frac{n+1}{n-1} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{cos^{\frac{n+1}{n-1}} \varphi} + \frac{1}{sin\,\varphi_0\, cos^{\frac{2}{n-1}} \varphi_0} \right).$$

$V^{-\frac{n+1}{n-1}} = 0$ giebt $V = \infty$ und $v_0 = \infty$; $tang\,\varphi_0 = 0$ giebt $\varphi_0 = 0$ und $v_0 = 0$; diese zwei sind die beiden Grenzwerthe, für welche $T = 0$ wird. Das Maximum muss demnach liegen in der Gleichung:

$$14)\qquad \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{cos^{\frac{n+1}{n-1}} \varphi} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{sin\,\varphi_0\, cos^{\frac{2}{n-1}} \varphi_0}.$$

Dass sie ein Maximum giebt, folgt mechanisch aus dem Umstand, dass die Grenzwerthe ein Minimum geben, und auch analytisch, da der zweite Differentialquotient von kT absolut positiv wird.

Die Betrachtung der Gleichung 14) kann noch etwas ausgedehnt werden. Da allgemein:

$$\int \frac{d\varphi}{cos^n \varphi} = \frac{1}{n-1} \frac{sin\,\varphi}{cos^{n-1} \varphi} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{d\varphi}{cos^{n-2} \varphi},$$

so ist:

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{cos^{\frac{n+1}{n-1}} \varphi} = \frac{n-1}{2} \frac{sin\,\varphi_0}{cos^{\frac{2}{n-1}} \varphi_0} - \frac{n-3}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{cos^{-\frac{n-3}{n-1}} \varphi},$$

und die Gleichung 14) wird:

$$15)\qquad \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{cos^{-\frac{n-3}{n-1}} \varphi} = \frac{n-1}{n-3} \cdot \frac{sin^2 \varphi_0 - \frac{2}{n+1}}{sin\,\varphi_0\, cos^{\frac{2}{n-1}} \varphi_0}.$$

Der Werth von φ_0 aus dieser Gleichung giebt das Maximum von T in 12). Durch 13) findet man den zugehörigen Werth von V, durch 11) von v_0 und durch 3) von x_0.

Der linke Theil in 15) ist positiv, folglich muss der rechte Theil auch positiv sein, so dass für alle Werthe von $n > 3$:

$$sin^2 \varphi_0 > \frac{2}{n+1}$$

sein muss, und

$$v_0^2 > \left(\frac{2}{n-1}\right)^2 \frac{\mu}{x_0^{n-1}}.$$

Aus 3) folgt dann:

$$x_1^{n-1} < \frac{n-1}{n+1} x_0^{n-1}.$$

Nur in einigen besonderen Fällen kann φ_0 aus der Gleichung gelöst werden. Der einfachste Fall ist $n = 3$. Die Gleichung 14) giebt dann:

$$\frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin\varphi_0\cos\varphi_0},$$

folglich:

$$\sin^2\varphi_0 = \tfrac{1}{2},$$

welches Resultat auch mit 15) übereinstimmt.

Jetzt wird:

$$V^2 = \frac{2\mu}{x_0^2},\quad v_0^2 = \frac{\mu}{x_0^2},\quad x_1^2 = \frac{x_0^2}{2},\quad T = \frac{x_0^2}{2\sqrt{\mu}} = \frac{x_0}{2v_0},$$

Diese einfachen Resultate können aber auch unmittelbar aus den ersten Gleichungen abgeleitet werden. Denn aus 7) folgt:

$$\sqrt{\mu}\,T = x_1\int_{x_1}^{x_0}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-x_1^2}} = x_1\sqrt{x_0^2-x_1^2}$$

und durch 3):

$$T = \frac{v_0 x_0}{v_0^2+\frac{\mu}{x_0^2}}.$$

Durch Auflösung von v_0 findet man:

$$v_0 = \frac{x_0}{2T}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{4\mu T^2}{x_0^4}}\right),$$

welche Gleichung für jedes T zwei Werthe von v_0 giebt, vorausgesetzt, dass

$$T^2 < \frac{x_0^4}{4\mu},$$

so dass der grösste Werth von T ist:

$$T_1 = \frac{x_0^2}{2\sqrt{\mu}},\quad \text{mithin}\quad v_0 = \frac{\sqrt{\mu}}{x_0},$$

was mit dem obigen Resultate ganz übereinstimmt.

Für $n = 2$ folgt aus 15):

$$l\,.\,tang\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{2}{3}-\sin^2\varphi_0}{\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0},$$

was einen Werth von φ_0 giebt, so dass $\sin^2\varphi_0 < \frac{2}{3}$, und durch wiederholte Substitution leicht zu finden ist. Die zugehörigen Werthe sind:

$$V^2 < \frac{6\mu}{x_0},\quad v_0^2 < \frac{4\mu}{x_0},\quad x_1 > \frac{x_0}{3};$$

$$T = 4\mu V^{-3}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{4\mu}{3V^3\sin\varphi_0\cos^2\varphi_0}.$$

Der Fall $n = 1$ kann nicht aus den vorigen Erörterungen abgeleitet werden und muss hier in einer besonderen Betrachtnng seine Lösung finden.

Die Gleichung 2) wird nämlich, wenn $n = 1$:

$$v^2 - v_0^2 = 2\mu l \cdot \frac{x}{x_0}, \tag{16}$$

und 3) giebt für die kleinste Entfernung:

$$v_0^2 = 2\mu l \cdot \left(\frac{x}{x_1}\right)$$

oder:

$$x_1 = x_0 l - \frac{v_0^2}{2\mu}.$$

Daher geht 16) durch Substitution über in:

$$v^2 = 2\mu l \left(\frac{x}{x_1}\right),$$

folglich:

$$\sqrt{2\mu}\,.\,dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{l\left(\frac{x}{x_1}\right)}}$$

und

$$T\sqrt{2\mu} = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{l\left(\frac{x}{x_1}\right)}}.$$

Setzt man $\frac{x}{x_1} = y$, $\frac{x_0}{x_1} = y_0$, so wird:

$$T\sqrt{2\mu} = x_1 \int_0^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{ly}}$$

und da das Integral für die zweite Grenze unendlich wird, so ist auch $T = \infty$. Hieraus folgt, dass der sich bewegende Punkt sich immer der kleinsten Entfernung asymptotisch nähert, und also niemals in seine Bahn zurückkehrt.

Leiden. Dr. van Geer.

VI. Verallgemeinerung eines Satzes der Methode der kleinsten Quadrate.

Wenn zur Bestimmung von vier* Unbekannten die vier Normalgleichungen

$$1)\quad \begin{cases} (aa)\chi + (ab)y + (ac)z + (ad)t + (an) = 0, \\ (ab)\chi + (bb)y + (bc)z + (bd)t + (bn) = 0, \\ (ac)\chi + (bc)y + (cc)z + (cd)t + (cn) = 0, \\ (ad)\chi + (bd)y + (cd)z + (dd)t + (dn) = 0 \end{cases}$$

*) Wir wollen unsere ganze Betrachtung auf vier Normalgleichungen beschränken, da sich die allgemeine Giltigkeit nachher leicht überblicken lassen wird.

vorliegen, so findet man das Gewicht P einer linearen Function

$$q_0 x + q_1 y + q_2 z + q_3 t$$

Der Unbekannten mittels der Gleichung

$$2)\quad \begin{cases} \frac{1}{P} = q_0 q_0 (\alpha\alpha) + 2 q_0 q_1 (\alpha\beta) + 2 q_0 q_2 (\alpha\gamma) + 2 q_0 q_3 (\alpha\delta), \\ \qquad + \quad q_1 q_1 (\beta\beta) + 2 q_1 q_2 (\beta\gamma) + 2 q_1 q_3 (\beta\delta), \\ \qquad\qquad + \quad q_2 q_2 (\gamma\gamma) + 2 q_2 q_3 (\gamma\delta), \\ \qquad\qquad\qquad + \quad q_3 q_3 (\delta\delta), \end{cases}$$

wobei $(\alpha\alpha)\,(\alpha\beta)\,\ldots\,(\delta\delta)$ zu bestimmen sind aus vier Gruppen von Gleichungen, von denen eine Gruppe die folgende ist:

$$3)\quad \begin{cases} (aa)(\alpha\gamma) + (ab)(\beta\gamma) + (ac)(\gamma\gamma) + (ad)(\gamma\delta) = 0, \\ (ab)(\alpha\gamma) \quad (bb)(\beta\gamma) \quad (bc)(\gamma\gamma) \quad (bd)(\gamma\delta) = 0, \\ (ac)(\alpha\gamma) \quad (bc)(\beta\gamma) \quad (cc)(\gamma\gamma) \quad (cd)(\gamma\delta) = 0, \\ (ad)(\alpha\gamma) \quad (bd)(\beta\gamma) \quad (cd)(\gamma\gamma) \quad (dd)(\gamma\delta) = 0. \end{cases}$$

(Vgl. Encke. Berl. J. 1835 S. 265, 302 und 295.)

Wenn man nur die Glieder $(\alpha\alpha)$ $(\beta\beta)$ $(\gamma\gamma)$ $(\delta\delta)$ braucht, so ist die Aufstellung der Gleichungen (3) nicht nothwendig, denn es ist z. B.

$$\frac{1}{(\delta\delta)} = (dd\,.\,3),$$

und zwar ist $(dd\,.\,3)$ der Coefficient von t in derjenigen Gleichung, welche man erhält, wenn man aus den Normalgleichungen (1) die übrigen Unbekannten in der Aufeinanderfolge xyz eliminirt (Encke 1835 S. 287).

Wir wollen nun zeigen, dass man nicht nur $(\alpha\alpha)$ $(\beta\beta)$ $(\gamma\gamma)$ $(\delta\delta)$, sondern auch $(\alpha\beta)(\alpha\gamma)\,\ldots\,(\gamma\delta)$ auf solche Weise finden kann.

Wir nehmen an, es seien die Bezeichnungen

$$\begin{matrix} x & y & z & t \\ a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{matrix}$$

einander entsprechend, dann kann man z. B. den Coefficienten $(\gamma\delta)$ finden, wenn man die Normalgleichungen (1) in solche Ordnung stellt, dass entweder z oder t die letzte Unbekannte wird, dass also (cd) sowohl der letzte Coefficient der vorletzten Gleichung, als auch der vorletzte Coefficient der letzten Gleichung wird. Bei vier Normalgleichungen sind z. B. (unter anderen) folgende Anordnungen möglich:

$$\begin{array}{cccc|c} (aa) & (ab) & (ac) & (ad) & (an) \\ (ab) & (bb) & (bc) & (bd) & (bn) \\ (ac) & (bc) & (cc) & \mathbf{(cd)} & (cn) \\ (ad) & (bd) & \mathbf{(cd)} & (dd) & (dn) \end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{cccc|c} (aa) & (ab) & (ad) & (ac) & (an) \\ (ab) & (bb) & (bd) & (bc) & (bn) \\ (ad) & (bd) & (dd) & (cd) & (dn) \\ (ac) & (bc) & (cd) & (cc) & (cn). \end{array}$$

Nach Herstellung dieser Ordnung macht man die gewöhnliche Elimination der Unbekannten, und wenn deren nur noch zwei vorhanden sind, hat man, wenn etwa t die letzte Unbekannte ist:

$$4) \quad \begin{array}{l} (cc\,.\,2)z + (cd\,.\,2)\,t + (cn\,.\,2) = 0, \\ (cd\,.\,2)\,z + (dd\,.\,2)\,t + (dn\,.\,2) = 0. \end{array}$$

Hieraus bildet man bekanntlich noch

$$(dd\,.\,3)t + (dn\,.\,3) = 0,$$

womit t gefunden ist, und es ist ausserdem

$$(dd\,.\,3) = \frac{1}{(\delta\,\delta)}\,.$$

Um nun auch noch $(\gamma\,\delta)$ zu finden, hat man lediglich aus 4) noch zu bilden:

$$(cd\,.\,3) = (cd\,.\,2) - \frac{(cc\,.\,2)}{(cd.\,2)}\,(dd\,.\,2)$$

und dann ist

$$5) \quad (cd\,.\,3) = \frac{1}{(\gamma\,\delta)}\,.$$

Diesen Werth $(cd\,.\,3)$ zu bilden, kann man ohnehin veranlasst werden, wenn man aus den Gleichungen 4) nicht blos t, sondern auch z finden will, denn man kann dann die Gleichungen 4) umstellen, so dass man hat:

$$6) \quad \begin{array}{l} (cd\,.\,2)t + (cc\,.\,2)z + (cn\,.\,2) = 0, \\ (dd\,.\,2)t + (cd\,.\,2)z + (dn\,.\,2) = 0. \end{array}$$

Um t zu eliminiren, rechnet man

$$7) \quad \left((cd\,.\,2) - \frac{(dd.2)}{(cd.2)}\,(cc.2)\right) z + (dn.2) - \frac{(dd.\,2)}{(cd\,.\,2)}\,(cn.2) = 0.$$

Allerdings wird man gewöhnlich bei der Elimination von t aus 6) anders rechnen, nämlich so:

$$8) \quad \left((cc\,.2) - \frac{(cd.\,2)}{(dd.\,2)}\,(cd.2)\right) z + (cn.2) - \frac{(cd\,.\,2)}{(dd.\,2)}\,(dn.2) = 0,$$

um zu der Bestimmung von $(\gamma\,\gamma)$, welches der reciproke Werth des Coefficienten von z in der letzten Gleichung ist, zu gelangen; und dann ist die Berechnung des Coefficienten von z in Gleichung 7) speciell zum Zweck der Bestimmung von $(\gamma\,\delta)$ nach fünf vorzunehmen, wenn nicht etwa das Bedürfniss einer Probe in der Berechnung von z dazu treibt.

Die Begründung des in Gleichung 5) liegenden Satzes ist folgende:

Da die Gleichungen 1) und 3) sich nur in den Absolutgliedern unterscheiden, so wird man den Werth von $(\gamma\delta)$, welcher den Gleichungen 3) entspricht, herleiten können aus dem Ausdruck für t, welchen die Gleichungen 1) liefern, dadurch, dass man hierin

9) $$(an) = 0, \quad (bn) = 0, \quad (cn) = -1, \quad (dn) = 0$$

setzt.

Nun geben aber die Gleichungen 1)

$$t = -\frac{(dn\,.\,3)}{(dd\,.\,3)},$$

wobei ist:

$$(dn\,.\,3) = (dn\,.\,2) - \frac{(cd\,.\,2)}{(cc\,.\,2)}(cn\,.\,2),$$

$$(dd\,.\,3) = (dd\,.\,2) - \frac{(cd\,.\,2)}{(cc\,.\,2)}(cd\,.\,2),$$

$$(cn\,.\,2) = (cn\,.\,1) - \frac{(bc\,.\,1)}{(bb\,.\,1)}(bn\,.\,1),$$

$$(dn\,.\,2) = (dn\,.\,1) - \frac{(bd\,.\,1)}{(bb\,.\,1)}(bn\,.\,1);$$

$$(bn\,.\,1) = (bn) - \frac{(ab)}{(aa)}(an),$$

$$(cn\,.\,1) = (cn) - \frac{(ac)}{(aa)}(an),$$

$$(dn\,.\,1) = (dn) - \frac{(ad)}{(aa)}(an).$$

Da hier die Gleichungen 9) zu berücksichtigen sind, so vereinfachen sich die letzten Ausdrücke bedeutend, man erhält nämlich (in umgekehrter Reihenfolge):

$$(dn\,.\,1) = 0,$$
$$(cn\,.\,1) = -1,$$
$$(bn\,.\,1) = 0,$$
$$(dn\,.\,2) = 0,$$
$$(cn\,.\,2) = -1,$$
$$(dn\,.\,3) = +\frac{(cd\,.\,2)}{(cc\,.\,2)}.$$

und damit wird:

$$\frac{1}{t} = -\frac{(dd\,.\,3)}{(dn\,.\,3)} = -\left((dd\,.\,2) - \frac{(cd\,.\,2)}{(cc\,.\,2)}(cd\,.\,2)\right)\frac{(cc\,.\,2)}{(cd\,.\,2)},$$

$$\frac{1}{t} = (cd\,.\,2) - \frac{(cc\,.\,2)}{(cd\,.\,2)}(dd\,.\,2) = (cd\,.\,3).$$

Der dadurch bestimmte specielle Werth von t ist der gesuchte Werth von $(\gamma\delta)$, es ist also:

$$\frac{1}{(\gamma\delta)}(cd.3).$$

Damit ist die Richtigkeit der Gleichung 5), welche eine Erweiterung des von Encke im J. 1835 S. 287 ausgesprochenen Satzes enthält, nachgewiesen.

Um die sämmtlichen Coefficienten $(\alpha\alpha)$ $(\alpha\beta)$ .. $(\delta\delta)$ der Gleichung 2) zu bestimmen, wird man so verfahren:

1. Die Anordnung der Coefficienten, welche 1) zeigt, giebt geradezu $(\delta\delta) = (dd.3)$, und wenn man vor der letzten Elimination umstellt, nach 8) auch noch $(\gamma\gamma)$, sowie nach der neuen Methode $(\gamma\delta)$ nach 7) und 5).

2. Diejenigen Gleichungen, welche nach der Elimination von x sich ergeben haben, stellt man so um, dass die Ordnung $t\ z\ y$ oder $t\ y\ z$ vorhanden ist, und erhält dann durch Elimination von t: $(\beta\beta)$ $(\gamma\gamma)$ und $(\beta\gamma)$.

3. Nun kehrt man die ganze Rechnung um, was bekanntlich schon wegen $(\alpha\alpha)$ allein erforderlich ist (Encke 1835 S. 287), so dass x letzte Unbekannte wird, und findet damit entsprechend: $(\alpha\alpha)$ $(\beta\beta)$ $(\alpha\beta)$ $(\gamma\gamma)$ $(\beta\beta)$ $(\beta\gamma)$.

4. Durch Herstellung der Ordnung $y\ z\ x\ t$ gelangt man endlich zu den noch fehlenden Gliedern $(\alpha\delta)$ $(\alpha\gamma)$ $(\beta\delta)$, und erhält auch mehrere der schon bestimmten nochmals.

Diese Rechnungsmethode wird besonders dann von Vortheil sein, wenn nicht alle Coefficienten zu bestimmen sind; aber auch in diesem Falle (z. B. bei der Bessel'schen Triangulirungsausgleichung, Gradmessung in Ostpreussen S. 153 und 154) wird sie Nutzen schaffen.

Carlsruhe, November 1872. JORDAN.

VII. Zur Biographie Bürmann's (aus einem Briefe an M. Cantor).

Es finden sich zwei Zuschriften Bürmann's an den Regierungscommissär des für die Neubildung des Lyceums in Mannheim zusammengesetzten Comités, Hofrath Gaum, vom 20. Sept. und vom 10. Nov. 1807 vor. In ersterer trägt er seine Dienste als Lehrer der Mathematik und Physik der neu zu errichtenden Anstalt an, als Grund angebend, dass er eine Versorgung in der Stadt, in der er schon so lange wohne, einer auswärtigen vorziehe, da der Verkauf seines Hauses und seiner Sachen ihm offenbaren Schaden bringen müsse. Das noch damals von ihm geleitete Handelsinstitut war durch Concurrenz weniger einträglich geworden, „seitdem Menschen, die nicht einmal ein wirkliches Contor



gesehen haben und nicht einmal rein Deutsch können, die Handlungslehre zu einem Schacher machen und durch geringere Preise und marktschreierische Anzeigen herabwürdigen dürfen".

Er legt zu seiner Empfehlung für den Herrn Hofrath den ersten Theil seiner Contor-Encyklopädie bei, ferner den ersten Bogen (in der Correctur, da er noch keinen andern habe) der Pangraphie, mit dem Zusatze: ich hätte gewünscht, ein Gleiches mit meinen rein mathematischen Producten zu thun; aber hier und in Frankfurt sind keine mehr zu haben.

Er wünscht Hauptlehrer zu werden „als ein Gelehrter, der Hoffnung hat, früher oder später Mitglied des franz. Nationalinstituts zu werden" — die erste und dritte Classe habe ihn in ihre Candidatenliste aufgenommen —, das Angebot von 700 oder 500 Gulden für den Professor der Mathematik, Physik und Naturlehre (!) scheint ihm zu gering. — Er macht den Vorschlag, seine „Handlungs-Akademie" mit dem Lyceum zu vereinigen und will täglich zwei Lehrstunden geben für 900 Francs; nur bedingt er sich freie Zeit bis 10 Uhr mit den Worten: „so wenig jetzt beim gesunkenen Buchhandel die Schriftstellerei einträgt, so bin ich zu weit darin, um selbige aufzugeben, und seit 30 Jahren bin ich gewohnt, ihr die Frühstunden zu widmen."

Charakteristisch ist auch der Zusatz: Ich hoffe darum einige Ausnahme zu verdienen, weil mich der Staat schon lange unentgeltlich zu allerlei Diensten gebraucht hat. Ein Censor im politischen Fache, der, die tägliche Mühe ungerechnet, allerlei Verdriesslichkeiten von den Zeitungsschreibern und den sich beleidigt glaubenden Cabinetten ausgesetzt ist, der durch seine Verantwortlichkeit der Regierung Unannehmlichkeiten erspart, hat anderswo 1000 Thaler und mehr Besoldung.

In dem zweiten Gesuche vom 10. Nov. 1807 erklärt er sich zufrieden mit dem Gehalte, „welches das Lyceum jetzt geben kann".

Er klagt, dass er um sein Brod gekommen, „da die Regierung den Juden (welche in ihrem jetzigen Zustande wohl keine Christen bilden sollten) die öffentliche Handelslehre erlaubte".

Ein negatives Zeugniss für seine Confession!

Interessant für Sie und gegen die Annahme eines Aufenthaltes in Cöln ist folgender Zusatz: Auf das Zutrauen, einen gleichen Schutz (wie unter der vorigen Regierung) zu geniessen, habe ich mich hier durch Ankauf eines Hauses eingebürgert, habe ich hier die schweren Kriegszeiten, wo ich mehrmals ganze Monate ohne Zöglinge war, ausgehalten, auswärtige Rufe mit ansehnlichem Gehalte (in Cöln 3000 *M* — Zeichen für Mark?? — für drei Vorlesungen die Woche) ausgeschlagen.

In Heidelberg ist die Stelle für höhere Mathematik an einen „auswärtigen" Herrn Langsdorf vergeben. Darüber sagt er: Ich schätze



das grosse Verdienst dieses praktischen Mathematikers; aber im transcendenten Theile der Wissenschaft, wegen dessen ich zweimal beim franz. Institute zum correspondirenden Mitgliede (mit Herrn v. Zach, Piazzi etc.) vorgeschlagen ward, bin ich denn doch weiter als Herr Langsdorf. Im *Magazin Encyclopédique* vom Jahre 1805 nennt mich der grosse Astronom de Lalande, den Jedermann für competenten Richter und Niemand für Schmeichler anerkennt, *un très grand géomètre, un des plus habiles géomètres de l'Europe.* Dasselbe hat Herr de Lambre vor dem französischen Kaiser gesagt, als er seiner Heldenmajestät meine Contor-Encyklopädie überreichte, und die Herren de Lagrange, Legendre, Laplace haben es in öffentlicher Sitzung des Nationalinstituts wiederholt, worauf mich auch die dritte Classe auf die Candidatenliste setzte. Der Herr Geh. Rath Klein, der gegenwärtig war, wird dieses alles bezeugen. Uebrigens ist die Bestätigung in den französischen Miscellen (1806, Monat ...) gedruckt. Ich berufe mich zugleich auf den gelehrten Herrn Justizrath Heiligenstein, der keinem Professor der Mathematik in der Wissenschaft nachsteht.

An dem Schlusse dieser Eingabe stehen die unterstrichenen Worte:

„Aus diesen Ursachen und um in einer Stadt zu bleiben, an die ein fast zwanzigjähriger Aufenthalt mich gewöhnt hat, deren physische und statistische Lage so manche Vorzüge hat, bin ich bereit, die angetragene Stelle am Lyceo, zu jeden, mit meinen Ansprüchen auch noch so unverhältnissmässigen Bedingungen zu übernehmen.

gez. Prof. Bürmann,
Director der Grossh. Bad. Handlungsakademie."

Er erreichte seinen Wunsch nicht; denn als erste Lehrer für die Mathematik sind aufgeführt Kappler, Diesterweg, für Physik Diesterweg, für Naturgeschichte Nüsslin. —

Da oben besprochene Gesuche ohne Beilagen sind, so lässt sich aus unseren Acten weiter nichts zur Feststellung über Geburtszeit, Heimath, Name, Confession beibringen.

Mannheim. Dir. F. Caspari.

IV.

Zurückführung der Cohäsionskraft auf die Newton'sche Anziehungskraft.

Von

GILLES

Gymnasiallehrer in Boppard.

Da die Gravitation unabhängig ist von der besonderen Beschaffenheit der in Betracht kommenden Körper und die zu berücksichtigenden Momente nur Masse und Entfernung sind, so liegt es nahe, dass das Streben, die Naturkräfte, wenn nicht auf eine Grundkraft, so doch auf eine kleinere Anzahl Kräfte zurückzuführen, die Aufmerksamkeit der Forscher auf jene Kraft lenken muss. Schon Humboldt erkannte in dieser Zurückführung ein bedeutendes Problem der Wissenschaft. Allein er musste sich gestehen, dass zu seiner Zeit die Zurückführung noch nicht möglich sei.

Wir werden nun in dem Folgenden zeigen, dass das Problem in Beziehung auf die Cohäsionskraft jetzt lösbar ist, um dann später auch die anderen Naturkräfte in Betracht zu ziehen. Die Gewissheit aber, welche uns die mathematische Betrachtung gewährt, wird noch erhöht durch die Uebereinstimmung, welche zwischen der Constitution der Materie, wozu wir geführt werden, und den Lagenverhältnissen der Himmelskörper besteht, sowie durch die ungezwungenen Erklärungen der Aggregatzustände, der Krystallisation, der Wärme etc., die sich auf Grund der in der folgenden Untersuchung erzielten Resultate geben lassen.

Es seien m' und m'' die Massen zweier Körper und e ihre Entfernung. Alsdann ist die Newton'sche Anziehungskraft

$$A = f \cdot \frac{m' \cdot m''}{e^2}.$$

Dieser Ausdruck durchläuft, wenn bei endlichem Werthe von $m' \cdot m''$ die Grösse e von ∞ bis 0 abnimmt, alle Werthe zwischen 0 und ∞. Da aber e nicht von den Grenzen der beiden sich anziehenden Massen zu rechnen ist, so liegt es auf der Hand, dass bei endlichem Werthe von $m' \cdot m''$ die Grösse

e nicht unendlich klein werden kann, man müsste denn die Dichtigkeit unendlich gross annehmen. Um nun aber zu sehen, welche Werthe A in der Natur erreichen kann, wobei wir den Fall, dass $m' \,.\, m''$ unendlich gross sei, ausser Acht lassen können, denken wir uns zwei gleiche Kugeln mit dem Radius ϱ und der mittleren Dichtigkeit μ, wobei die Dichtigkeit nur eine Function von ϱ sei. Alsdann ist bei der Berührung:

$$A = f \,.\, \frac{\frac{4}{3}\pi\varrho^3 \,.\, \frac{4}{3}\pi\varrho^3 \,.\, \mu^2}{(2\varrho^2)},$$

$$= f \,.\, \tfrac{4}{9}\pi^2\varrho^4\mu^2.$$

Soll daher A bei abnehmendem ϱ wachsen, so muss μ in höherem Verhältniss zunehmen, als ϱ^2 abnimmt. Es ergiebt sich jedoch andererseits aus dem vorstehenden Ausdruck leicht, dass, wenn μ hinreichend gross angenommen wird, bei jedem auch noch so kleinen ϱ A jede bestimmte Grösse erreichen kann. Bleibt z. B. die Masse jeder Kugel dieselbe, wird aber der Radius ϱ $n$mal kleiner, so haben wir

$$A = f \,.\, \frac{m' \,.\, m''}{\left(\frac{2\varrho}{n}\right)^2},$$

$$= n^2 . f . \frac{m' \,.\, m''}{(2\varrho)^2}.$$

Die Anziehungskraft ist also n^2mal grösser geworden. So kann man also durch Verdichtung jede beliebige Grösse von A erzielen.

Nehmen wir nun einmal an, die Cohäsionskraft sei keine andere, als die Newton'sche Anziehungskraft, so können wir das mit der Erfahrung nur dann in Einklang bringen, wenn wir die Dichtigkeit der sich anziehenden Molecule beliebig annehmen können, obwohl die Dichtigkeit des betreffenden Körpers eine gegebene Grösse ist. Aber auch bei der grössten Dichtigkeit der einzelnen Molecule wäre doch nichts erreicht, wenn wir die Molecule in dem Raume des Körpers gleichmässig vertheilt annehmen. Wir müssen vielmehr, wie wir gleich zeigen werden, Reihenverbindungen annehmen, so dass die Dichtigkeit innerhalb der Reihe sehr gross, die mittlere Dichtigkeit des ganzen Körpers aber die thatsächliche bleibt, indem die Reihen um so weiter von einander entfernt sind, je grösser die Dichtigkeit in der Reihe.

Ich werde nun zunächst zeigen, dass bei der Annahme, die Materie eines Körpers erfülle den von diesem eingenommenen Raum vollständig gleichmässig, oder auch nur die Molecule oder Atome seien gleichmässig im Raume des Körpers vertheilt, die thatsächliche Grösse der Cohäsion bei festen und flüssigen Körpern sich nicht erklären lasse mit Hilfe der Newton-schen Anziehungskraft. Die Grösse des Unterschiedes zwischen Rechnung und Beobachtung wird uns dann der Wegweiser bei der weiteren Untersuchung sein.

Wir machen also zunächst die Voraussetzung, dass die Masse eines Körpers den Raum desselben vollständig gleichmässig erfülle.

Es sei r' der Halbmesser eines cylinderförmigen Drahtes, dr die unendlich kleine Dicke eines cylinderförmigen Mantels, dessen Halbmesser r ist. Dieser Mantel sei durch auf der Axe des Cylinders senkrecht stehende Ebenen in kreisförmige Elemente zerlegt, deren auf einander senkrechte Dimensionen dr und dx seien. Die X-Axe falle mit der Axe des Cylinders zusammen. Das Volumen des kreisförmigen Elements ist daher

$$2\pi r\,dr\,dx.$$

Ist demnach μ für die Einheit des Volumens die Masse des Stoffes, aus dem der Draht besteht, so ist die Masse des Elements

$$2\pi\mu\,.\,r\,dr\,.\,dx.$$

Die Masse eines materiellen Punktes auf der X-Axe sei m. Dieser Punkt wird von dem kreisförmigen Element angezogen. Wir haben aber nur die Componirende nach der X-Axe zu berücksichtigen, da die Einwirkungen je zweier gegenüberliegender Punkte in Beziehung auf die auf der X-Axe senkrecht stehenden Componirenden sich aufheben, wir aber ausserdem auch nur in der Richtung der X-Axe die Cohäsion betrachten wollen. Der Ausdruck für die Kraft, mit welcher der materielle Punkt durch das kreisförmige Element angezogen wird, ist demnach

$$f.\frac{2\pi\mu.m.r\,dr}{x^2+r^2}\,.\,\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+r^2}} = f.\,2\pi\mu\,.\,m\,.\,r\,dr\,.\,\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+r^2)^3}}.$$

Die Anziehungskraft zwischen dem gesammten Cylindermantel von der Dicke dr und dem materiellen Punkte wird erhalten, wenn man das Integral zwischen den äussersten Werthen von x nimmt. Der Cylindermantel liege auf der einen Seite von dem materiellen Punkte und die Grenzwerthe von x seien a und $(a+e)$.

Es ist

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+r^2)^3}} = \int (x^2+r)^{2}{}^{-\frac{3}{2}}.\,x\,dx,$$

$$= -(x^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Folglich:

$$f.\mu.m.2\pi.r\,dx \int_a^{a+e} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+r^2)^3}} = f.\mu.m.2\pi.r\,dr\left[(a^2+r^2)^{-\frac{1}{2}} - \left((a+e)^2+r^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

$$= f\,.\,\mu\,.\,m\,.\,2\pi\left[\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2+r^2}} - \frac{r\,dr}{\sqrt{(a+e)^2+r^2}}\right].$$

Um nun die Anziehungskraft zwischen dem ganzen Cylinder von $x=a$ bis $x=a+e$ und dem materiellen Punkte zu erhalten, müssen wir von $r=0$ bis $r=r'$ integriren. Es ist

$$\int\left(\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2+r^2}}-\frac{r\,dr}{\sqrt{(a+e)^2+r^2}}\right)=\sqrt{a^2+r^2}-\sqrt{(a+e)^2+r^2}.$$

Folglich

$$f.\mu.m.2\pi\int_0^{r'}\left(\frac{r\,dr}{\sqrt{a^2+r^2}}-\frac{r\,dr}{\sqrt{(a+e)^2+r^2}}\right)=f.\mu.m.2\pi\left[e+\sqrt{a^2+r'^2}-\sqrt{(a+e)^2+r'^2}\right].$$

Wollen wir nun die Cohäsionskraft für irgend einen Querschnitt des Drahtes, so müssen wir die Kraft suchen, mit welcher der eine Theil den andern anzieht. Suchen wir die Cohäsionskraft in der Mitte des Drahtes. Die Länge desselben sei 2λ, in der Mitte des Drahtes sei $x=0$. Statt m setzen wir einen unendlich kleinen Cylinder mit dem Querschnitt $\pi\varrho^2$, der Axe da und der Dichtigkeit μ. Alsdann ist

$$m=\pi\varrho^2.\,da\,.\,\mu.$$

Es ist nun

$$f.\mu.m.2\pi\left[e+\sqrt{a^2+r^2}-\sqrt{(a+e)^2+r^2}\right]$$
$$=2f.\mu^2.\pi^2.\varrho^2\left[e+\sqrt{a^2+r^2}-\sqrt{(a+e)^2+r^2}\right]da,$$

wenn wir für r' der Einfachheit wegen r setzen.

Nun ist

$$\int\left(e+\sqrt{a^2+r^2}-\sqrt{(a+e)^2+r^2}\right)da$$
$$=ea+\int\sqrt{a^2+r^2}.\,da-\int\sqrt{(a+e)^2+r^2}.\,da.$$

Um $\int\sqrt{a^2+r^2}.\,da$ und $\int\sqrt{(a+e)^2+r^2}.\,da$ auszuführen, setzen wir

$$(a+e)^2+r^2=(a+e)^2.\,t^2 \text{ und } a^2+r^2=a^2\,t'^2.$$

Alsdann ist

$$a+e=r\sqrt{\frac{1}{t^2-1}} \text{ und } a=r\sqrt{\frac{1}{t'^2-1}},$$
$$da=\tfrac{1}{2}r\sqrt{t^2-1}\,.\,d\,.\,\frac{1}{t^2-1} \text{ u. s. w.;}$$

folglich

$$\int\sqrt{(a+e)^2+r^2}.\,da=\int(a+e)\,t\,.\,da$$
$$=\tfrac{1}{2}r^2\int t\,.\,d\,\frac{1}{t^2-1},$$
$$\int t\,.\,d\,\frac{1}{t^2-1}=\frac{t}{t^2-1}-\int\frac{dt}{t^2-1},$$

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{dt}{t-1} - \frac{dt}{t+1}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}l(t-1) - \tfrac{1}{2}l(t+1).$$

Folglich ist

$$\int t.d\frac{1}{t^2-1} = \frac{t}{t^2-1} + \tfrac{1}{2}l\frac{t+1}{t-1},$$

mithin

$$\int \sqrt{(a+e)^2+r^2}\,.\,da = \tfrac{1}{2}r^2\left[\frac{t}{t^2-1} + \tfrac{1}{2}l\frac{t+1}{t-1}\right],$$
$$\int \sqrt{a^2+r^2}\,.\,da = \tfrac{1}{2}r^2\left[\frac{t'}{t'^2-1} + \tfrac{1}{2}l\frac{t'+1}{t'-1}\right].$$

Also ist

$$\int\left(e+\sqrt{a^2+r^2}-\sqrt{(a+e)^2+r^2}\right)da$$
$$= ea + \tfrac{1}{2}r^2\left[\frac{t'}{t'^2-1} + \tfrac{1}{2}l\frac{t'+1}{t'-1}\right] - \tfrac{1}{2}r^2\left[\frac{t}{t^2-1} + \tfrac{1}{2}l\frac{t+1}{t-1}\right].$$

Wir wollen die äussersten Werthe von a α und β nennen. Da

$$t = \frac{1}{a+e}\sqrt{(a+e)^2+r^2} \text{ und } t' = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+r^2},$$

so haben wir zu integriren zwischen

$$a=\alpha,\ t=\frac{1}{\alpha+e}\sqrt{(\alpha+e)^2+r^2},\ t'=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2+r^2}$$

und

$$a=\beta,\ t=\frac{1}{\beta+e}\sqrt{(\beta+e)^2+r^2},\ t=\frac{1}{\beta}\sqrt{\beta^2+r^2}.$$

Es ist alsdann

$$\int_\alpha^\beta\left(e+\sqrt{a^2+r^2}-\sqrt{(a+e)^2+r^2}\right)da = \Big[e(\beta-\alpha) + \tfrac{1}{2}\beta\sqrt{\beta^2+r^2}$$
$$- \tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\alpha^2+r^2} - \tfrac{1}{2}(\beta+e)\sqrt{(\beta+e)^2+r^2} + \tfrac{1}{2}(\alpha+e)\sqrt{(\alpha+e)^2+r^2}$$
$$+ \tfrac{1}{4}r^2 l\frac{\sqrt{\beta^2+r^2}+\beta}{\sqrt{\beta^2+r^2}-\beta} - \tfrac{1}{4}r^2 l\frac{\sqrt{\alpha^2+r^2}+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+r^2}-\alpha} - \tfrac{1}{4}r^2 l\frac{\sqrt{(\beta+e)^2+r^2}+(\beta+e)}{\sqrt{(\beta+e)^2+r^2}-(\beta+e)}$$
$$+ \tfrac{1}{4}r^2 l\frac{\sqrt{(\alpha+e)^2+r^2}+(\alpha+e)}{\sqrt{(\alpha+e)^2+r^2}-(\alpha+e)}\Big].$$

Wenn daher die Axen zweier Cylinder zusammenfallen, die Länge des einen e, der Halbmesser desselben r, die Länge des andern $(\alpha-\beta)$, der Halbmesser desselben ϱ beträgt, so erhalten wir als Ausdruck für die Kraft, womit dieselben sich anziehen:

$$\text{I)}\quad \begin{aligned}&\pm 2f.\mu^2\,\pi^2.\varrho^2\Big[e(\beta-\alpha)+\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{\beta^2+r^2}-\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\alpha^2+r^2}\\&\qquad-\tfrac{1}{2}(\beta+e)\sqrt{(\beta+e)^2+r^2}+\tfrac{1}{2}(\alpha+e)\sqrt{(\alpha+e)^2+r^2}\\&\quad+\tfrac{1}{4}r^2\,l\frac{\sqrt{\beta^2+r^2}+\beta}{\sqrt{\beta^2+r^2}-\beta}-\tfrac{1}{4}r^2\,l\frac{\sqrt{\alpha^2+r^2}+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+r^2}-\alpha}-\tfrac{1}{4}r^2\,l\frac{\sqrt{(\beta+e)^2+r^2}+(\beta+e)}{\sqrt{(\beta+e)^2+r^2}-(\beta+e)}\\&\quad+\tfrac{1}{4}r^2\,l\frac{\sqrt{(\alpha+e)^2+r^2}+(\alpha+e)}{\sqrt{(\alpha+e)^2+r^2}-(\alpha+e)}\Big].\end{aligned}$$

Setzen wir $e=\alpha=\lambda$, $\beta=0$, so wird aus I):

$$\text{II)}\quad \begin{aligned}&\pm 2f.\mu^2.\pi^2.\varrho^2\Big[-\lambda^2-\lambda\sqrt{\lambda^2+r^2}+\lambda\sqrt{4\lambda^2+r^2}-\tfrac{1}{2}r^2\,l\frac{\sqrt{\lambda^2+r^2}+\lambda}{\sqrt{\lambda^2+r^2}-\lambda}\\&\quad+\tfrac{1}{4}r^2\,l\frac{\sqrt{4\lambda^2+r^2}+2\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+r^2}-2\lambda}\Big].\end{aligned}$$

Da auf (S. 125) $\sqrt{(x^2+r^2)^3}$ zwei entgegengesetzte Werthe hat, so sind auch in I) und II) die Vorzeichen + und — zu nehmen, je nachdem der eine oder andere Theil des Drahtes als der anziehende angesehen wird.

II) ist nun der Ausdruck für die Cohäsion in der Mitte des Drahtes (dessen eine Hälfte aber einen unendlich kleinen Querschnitt $\pi\varrho^2$ hat) bei der Annahme stetiger Raumerfüllung. Wir haben daher diesen Ausdruck näher zu untersuchen. Wir nehmen dabei das Zeichen —.

Es sei

$$\tfrac{1}{2}\Big[\lambda^2+\lambda\sqrt{\lambda^2+r^2}-\lambda\sqrt{4\lambda^2+r^2}+\tfrac{1}{2}r^2\,l\frac{\sqrt{\lambda^2+r^2}+\lambda}{\sqrt{\lambda^2+r^2}-\lambda}-\tfrac{1}{4}r^2\,l\frac{\sqrt{4\lambda^2+r^2}+2\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+r^2}-2\lambda}\Big]=\gamma.$$

Alsdann ist

$$\frac{d\gamma}{d\lambda}=\gamma'=\lambda+\sqrt{\lambda^2+r^2}-\sqrt{4\lambda^2+r^2},$$

mithin

$$\frac{d\gamma'}{d\lambda}=1+\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+r^2}}-\frac{4\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+r^2}}.$$

Für $\lambda=0$ ergiebt sich

$$\gamma=0,\ \gamma'=0.$$

Dagegen für $\lambda=\infty$ erhalten wir

$$\gamma=\infty,\ \gamma'=0.$$

Es wächst also γ von 0 bis ∞; dagegen sind beide Grenzwerthe von $\gamma'=0$, zwischen diesen aber ist γ' stets positiv. Es muss also wenigstens ein Maximum von γ' vorhanden sein. Wir setzen daher

$$1+\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+r^2}}-\frac{4\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+r^2}}=0.$$

Daraus folgt:

$$\lambda^6+\frac{3}{4}r^2\lambda^4-\frac{3}{8}r^4\lambda^2+\frac{r^6}{64}=0.$$

Hieraus ergeben sich für λ^2 die drei Werthe: $0{,}046198\,r^2$, $0{,}30667\,r^2$ und $-1{,}10287\,r^2$. Der letzte Werth liefert einen imaginären Ausdruck für λ, der erste ist eine Wurzel der Gleichung

$$1+\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+r^2}}-\frac{4\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+r^2}}=0$$

nur dann, wenn man den negativen Werth von $\sqrt{\lambda^2+r^2}$ nimmt. Da wir aber nur den positiven Werth von $\sqrt{\lambda^2+r^2}$ zu nehmen haben, so kommt nur

$$\lambda^2=0{,}30667\,r^2$$

oder

$$\lambda=0{,}553694\,r$$

in Betracht. Nun ist

$$\frac{d^2\gamma'}{d\lambda^2}=r^2\left[\frac{1}{(\lambda^2+r^2)^{3/2}}-\frac{4}{(4\lambda^2+r^2)^{3/2}}\right].$$

Da für $\lambda=0{,}553694\,r$ dieser Ausdruck negativ ist, so ist γ' für diesen Werth von λ ein Maximum.

Mithin nimmt γ und daher auch II) am stärksten zu, wenn $\lambda=0{,}553694\,r$; von da an nehmen beide Grössen immer langsamer zu, doch erst für ein unendlich grosses λ wird die Zunahme unendlich klein. Dagegen ist die Zunahme der Cohäsion der Erfahrung gemäss um so kleiner, je grösser λ, das Maximum liegt bei $\lambda=0$, und die Zunahme nähert sich schon bei einem sehr kleinen Werthe von λ der Null.

Suchen wir noch den Werth von γ' für den Fall, dass λ sehr gross ist im Vergleiche zu r. Es sei

$$\sqrt{\lambda^2+r^2}=\lambda+y,$$
$$\sqrt{4\lambda^2+r^2}=2\lambda+y'.$$

Alsdann ist

$$\gamma'=\lambda+\sqrt{\lambda^2+r^2}-\sqrt{4\lambda^2+r^2},$$
$$=y-y'.$$

Da $\sqrt{4\lambda^2+r^2}=2\lambda+y'$, so ist $r^2=4\lambda y'+y'^2$; ist nun λ im Vergleiche zu r sehr gross, so kann man y'^2 neben $4\lambda y'$ vernachlässigen und erhält dann

$$y'=\frac{r^2}{4\lambda}.$$

Ebenso ergiebt sich

$$y=\frac{r^2}{2\lambda}.$$

Mithin ist

$$\gamma'=y-y'=\frac{r^2}{4\lambda}.$$

Also steht γ' im umgekehrten Verhältniss zu λ, wenn λ im Vergleiche zu r sehr gross ist.

Um das Zunehmen des absoluten Werthes von γ und II) besser übersehen zu können, fügen wir folgende Beispiele hinzu:

Setzen wir

$\lambda = 0,$	so ist $\gamma' = 0,$
$\lambda = 0{,}01\,r,$	„ „ $\gamma' = 0{,}00985\,r,$
$\lambda = 0{,}1\,r,$	„ „ $\gamma' = 0{,}085187\,r,$
$\lambda = 0{,}553694\,r,$	„ „ $\gamma' = 0{,}20469\,r$ (Maximum),
$\lambda = 1\,r,$	„ „ $\gamma' = 0{,}178113\,r,$
$\lambda = 10\,r,$	„ „ $\gamma' = 0{,}024891\,r,$
$\lambda = 100\,r,$	„ „ $\gamma' = 0{,}002499895\,r,$
$\lambda = 1000\,r,$	„ „ $\gamma' = 0{,}000249999886\,r,$
$\lambda = 10000\,r,$	„ „ $\gamma' = 0{,}000025\,r$

u. s. w.

Es ist also für $\lambda = 10r$ der Grenzwerth $\frac{r^2}{4\lambda}$ von γ' schon beinahe erreicht. Um nun aber die Beziehung zwischen der Zunahme von γ und II) zu der Zunahme von λ auch für endliche Unterschiede besser übersehen zu können, wollen wir den Grenzwerth für die Zunahme von γ suchen, wenn λ $n$mal grösser wird.

Es sei zunächst $\lambda = mr$. Alsdann ist:

$$2\gamma = \lambda^2 + \lambda\sqrt{\lambda^2 + r^2} - \lambda\sqrt{4\lambda^2 + r^2} + \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{\lambda^2+r^2}+\lambda}{\sqrt{\lambda^2+r^2}-\lambda} - \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{\sqrt{4\lambda^2+r^2}+2\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+r^2}-2\lambda},$$

$$= r^2\left[m^2 + m\sqrt{m^2+1} - m\sqrt{4m^2+1} + \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{\sqrt{m^2+1}+m}{\sqrt{m^2+1}-m} - \tfrac{1}{4}\,l\,\frac{\sqrt{4m^2+1}+2m}{\sqrt{4m^2+1}-2m}\right],$$

$$= r^2 .\, M.$$

Es sei

$$\sqrt{m^2+1} = m + y, \text{ also } 1 = 2my + y^2,\ y = \frac{1}{2m+y},$$

$$\sqrt{4m^2+1} = 2m + v, \text{ also } 1 = 4mv + v^2,\ v = \frac{1}{4m+v}.$$

Setzen wir diese Werthe in den Ausdruck für M, so ergiebt sich

$$M = m\,(y - v) + l\,(2m + y) - \tfrac{1}{2}\,l\,(4m + v).$$

Nun möge λ $n$mal grösser werden, also $\lambda = n.mr$. Wir haben alsdann für m zu setzen $n.m$. Mithin ist

$$M' = nm\,(y' - v') + l\,(2nm + y') - \tfrac{1}{2}\,l\,(4nm + v'),$$

folglich ist

$$M' - M = nm\,(y' - v') - m\,(y - v) + l\,\frac{2nm + y'}{2m + y} - \tfrac{1}{2}\,l\,\frac{4nm + v'}{4m + v},$$

daher

$$lim\,(M' - M) = \tfrac{1}{2}\,l\,n.$$

Wenn also λ $n$mal grösser wird, so wächst 2γ um $\frac{1}{2}r^2 .\, l\,n$. Mithin muss λ in geometrischer Progression wachsen, wenn γ und II) in arithmetischer zunehmen sollen. (λ gross im Vergleiche zu r.)

Um nun aber auch diese Beziehungen für den Fall anschaulich zu machen, dass λ nicht sehr gross ist im Vergleiche zu r, fügen wir folgende Beispiele hinzu:

Setzt man

$\lambda = 0$, so ist $2\gamma = 0$,
$\lambda = 0{,}01\,r$, „ „ $2\gamma = 0{,}0000989\,r^2$ (annähernd),
$\lambda = 0{,}1\,r$, „ „ $2\gamma = 0{,}0090068\,r^2$,
$\lambda = r$, „ „ $2\gamma = 0{,}3377013\,r^2$,
($\lambda = 2r$, „ „ $2\gamma = 0{,}6222564\,r^2$),
$\lambda = 10\,r$, „ „ $2\gamma = 1{,}402383\,r^2$,
$\lambda = 100\,r$, „ „ $2\gamma = 2{,}552575\,r^2$,
$\lambda = 1000\,r$, „ „ $2\gamma = 3{,}703881\,r^2$,
$\lambda = 10000\,r$, „ „ $2\gamma = 4{,}85528\,r^2$,
$\lambda = 100000\,r$, „ „ $2\gamma = 6{,}006468\,r^2$,
$\lambda = 1000000\,r$, „ „ $2\gamma = 7{,}157762\,r^2$.

Wollen wir den Ausdruck

$$\lim (M' - M) = \tfrac{1}{2}\, l n$$

auf die vorstehenden Beispiele anwenden, so haben wir für n 10 zu setzen. Nun ist $\frac{1}{2} l n = \frac{1}{2} . 2{,}3025874 = 1{,}1512937$. Von $100\,r$ an haben wir diesen Unterschied wenigstens annähernd in den vorstehenden Beispielen. Die Annäherung würde bedeutender sein, wenn nicht die siebenstelligen Logarithmentafeln unzureichend gewesen wären.

In I) und II) (S. 128) ist ϱ, der Halbmesser des einen Drahtstückes, unendlich klein. Nun ist zwar nach der Erfahrung die Cohäsionskraft dem Querschnitt des Drahtes proportional. Allein da wir uns infolge der Annahme stetiger Massenvertheilung nicht in Uebereinstimmung mit der Erfahrung befinden, so dürfen wir auch hier den Erfahrungssatz nicht einfliessen lassen. Auch ist der Radius der anderen Drahthälfte mit mathematischer Genauigkeit berücksichtigt. Es liegt daher nahe, dass wir eine zu grosse Kraft erhalten, wenn wir dieselbe proportional ϱ^2 setzen, auch für endliche Werthe von ϱ. Die Ausdrücke I) und II) sind nämlich berechnet für den Fall, dass die Drahthälfte mit dem unendlich kleinen Halbmesser ϱ genau in der Verlängerung der Axe der anderen Drahthälfte liegt. Je mehr man sich nun aber von der Axe entfernt, um so mehr nimmt die Kraft ab, da die Theile der anderen Drahthälfte zum Theil seitwärts rücken. Andererseits ist zu beachten, dass selbst für den äussersten Cylindermantel ein grosser Theil genau so bleibt, wie für die Cylinderaxe, dass aber der Unterschied ein verhältnissmässig beträchtlicher nur auf eine kleine Entfernung, allein bei kleinem λ die ganze Kraft nur unbedeutend ist, da dieselbe sich mit λ der Null nähert. Es wird sich aus dem Folgenden ergeben, dass wir für die Anwendungen, die wir von den Formeln I) und II) machen werden, die Kraft ϱ^2 proportional setzen dürfen. Der begangene Fehler ist für unseren Zweck von keinem Belang.



Setzen wir nun in I) und II) für ϱ den Werth r, so erhalten wir

$$\text{III)}\quad \pm 2f.\mu^2.\pi^2.r^2\Big[e(\beta-\alpha)+\tfrac{1}{2}\beta\sqrt{\beta^2+r^2}-\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{\alpha^2+r^2}-\tfrac{1}{2}(\beta+e)\sqrt{(\beta+e)^2+r^2}$$

$$+\tfrac{1}{2}(\alpha+e)\sqrt{(\alpha+e)^2+r^2}$$

$$+\tfrac{1}{4}r^2\,l\,\frac{\sqrt{\beta^2+r^2}+\beta}{\sqrt{\beta^2+r^2}-\beta}-\tfrac{1}{4}r^2\,l\,\frac{\sqrt{\alpha^2+r^2}+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+r^2}-\alpha}-\tfrac{1}{4}r^2\,l\,\frac{\sqrt{(\beta+e)^2+r^2}+(\beta+e)}{\sqrt{(\beta+e)^2+r^2}-(\beta+e)}$$

$$+\tfrac{1}{4}r^2\,l\,\frac{\sqrt{(\alpha+e)^2+r^2}+(\alpha+e)}{\sqrt{(\alpha+e)^2+r^2}-(\alpha+e)}\Big],$$

$$\text{IV)}\quad \pm 2f.\mu^2.\pi^2.r^2\Big[-\lambda^2-\lambda\sqrt{\lambda^2+r^2}+\lambda\sqrt{4\lambda^2+r^2}-\tfrac{1}{2}r^2\,l\,\frac{\sqrt{\lambda^2+r^2}+\lambda}{\sqrt{\lambda^2+r^2}-\lambda}$$

$$+\tfrac{1}{4}r^2\,l\,\frac{\sqrt{4\lambda^2+r^2}+2\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+r^2}-2\lambda}\Big].$$

III) giebt die Kraft an, womit sich zwei Cylinder bei gleicher Massenvertheilung und Zugrundelegung der Newton'schen Anziehungskraft anziehen, wenn die Dichtigkeit μ, die Axen zusammenfallen, der Radius eines jeden r, die Länge des einen e, die Länge des andern $(\alpha-\beta)$, die Entfernung der beiden β beträgt. Wenn der Radius des Cylinders von der Länge $(\alpha-\beta)$ nicht gleich dem Radius r des andern Cylinders ist, sondern gleich R, so hat man an Stelle von ϱ in I) R zu setzen.

IV) giebt die Cohäsionskraft C_r in der Mitte eines Cylinders bei gleicher Massenvertheilung und Zugrundelegung der Newton'schen Anziehungskraft an, wenn die Dichtigkeit μ, die Länge 2λ, der Radius r beträgt.

Da C_r oder IV gleich $4f.\mu^2.\pi^2.r^2.\gamma$ ist, so gilt von C_r alles Das, was wir oben von γ gezeigt haben. C_r durchläuft also, wenn λ von 0 bis ∞ wächst, alle Werthe zwischen 0 und ∞. $\frac{dC_r}{d\lambda}$ oder das Verhältniss der Zunahme von C_r zu der von λ ist für $\lambda=0$ und $\lambda=\infty$ gleich 0, wächst von $\lambda=0$ bis $\lambda=0{,}55394r$, erreicht hier sein Maximum, um von da an bis $\lambda=\infty$ abzunehmen, ist aber beständig positiv. Schon bei $\lambda=10r$ ist $\frac{dC_r}{d\lambda}$ fast λ umgekehrt proportional. Alle diese Sätze widersprechen der Erfahrung. Welches ist der Grund hiervon? In der Rechnung kann er nicht liegen, er ist also in der Voraussetzung zu suchen. Diese aber ist zweierlei: 1. sie nimmt die Richtigkeit des Newton'schen Gesetzes auch für die Cohäsionskraft an; 2. sie nimmt vollständig gleichmässige Vertheilung der Masse der in Betracht kommenden Körper innerhalb des Raumes derselben an. Dass die zweite Unterstellung falsch ist, wissen wir aus der Erfahrung. Die Falschheit des Ergebnisses der Rechnung kann also in Nr. 2 ihren einzigen Grund haben und somit Nr. 1 richtig sein. Es fragt sich nun, ob dieses auch in Wirklichkeit der Fall ist.

Da die Newton'sche Anziehungskraft im Weltenraum, auf der Oberfläche der Erde, und zwar selbst zwischen kleinen Massen erfahrungsmässig herrscht, so liegt es jedem Naturforscher selbstverständlich fern, bei der Cohäsionskraft ein anderes Gesetz unterstellen zu wollen, wofern es möglich ist, die Thatsachen mit Hilfe der Newton'schen Anziehungskraft zu erklären. Dass man bis jetzt bei der Cohäsion eine eigene Molecularkraft annimmt, hat eben darin seinen Grund, dass man es noch nicht vermocht hat, die Thatsachen der Cohäsion mit Hilfe der Newton-schen Anziehungskraft zu begründen.

Noch weniger, wie bei der Annahme absolut gleichmässiger Massenvertheilung, stimmt die Rechnung mit der Erfahrung überein, wenn man annimmt, die Materie sei um mehr oder weniger viele Centra verdichtet, diese aber seien im Raume des Körpers gleichmässig vertheilt. Da zwei Kugeln sich so anziehen, als ob ihre Massen in den Mittelpunkten vereinigt wären, so können wir die Kugeln bis zu ihrer Berührung ausgedehnt denken.

Wir wollen nun die Kraft, womit sich zwei sich berührende Kugeln anziehen, mit der Kraft vergleichen, womit sich die Hälften des Cylinders anziehen, welcher jene Kugeln von aussen berührt und mit ihnen gleiche Masse hat.

Die Länge des Cylinders betrage 2λ, der Halbmesser des Querschnitts und der Kugeln ist alsdann $\frac{\lambda}{2}$. Da die Massen gleich sind, so ist, wenn μ die Dichtigkeit der Masse des Cylinders ist, die Dichtigkeit der Kugeln $\frac{3}{2}\mu$. Mithin ist die Kraft, womit sich die Kugeln anziehen, also die berechnete Cohäsionskraft oder C_r im Berührungspunkte:

$$f \cdot \frac{\frac{1}{6}\pi \cdot \lambda^3 \cdot \frac{1}{6}\pi \cdot \lambda^3}{\lambda^2} \cdot \frac{9}{4}\mu^2 = 0{,}0625 \cdot f \cdot \mu^2 \cdot \pi^2 \cdot \lambda^4.$$

Dagegen erhalten wir als Anziehungskraft der beiden Cylinderhälften:

$$2f \cdot \mu^2 \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right)^4 \left[4 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{17} + \tfrac{1}{2} l \frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}-2} - \tfrac{1}{4} l \frac{\sqrt{17}+4}{\sqrt{17}-4}\right]$$
$$= 0{,}0777832 \cdot f \cdot \mu^2 \cdot \pi^2 \cdot \lambda^4.$$

Es ist dieses ungefähr $\frac{5}{4}$ mal die Anziehungskraft der beiden Kugeln. Dieser Unterschied wird um so unbedeutender, je weiter die Kugeln und Cylinder von einander entfernt sind.

Setzen wir z. B. in III) $c = 2r$, $\beta = 8r$, $\alpha = 10r$, so erhalten wir als Anziehungskraft der beiden Cylinder $0{,}0405022 . f . \mu^2 . \pi^2 . r^4$, als Anziehungskraft der beiden Kugeln $0{,}04 . f . \mu^2 . \pi^2 . r^4$. Setzen wir aber in III) $e = 2r$, $\beta = 98r$, $\alpha = 100r$, so liefert die Rechnung bei Benutzung der Vega'schen Logarithmentafel keinen Unterschied mehr.

Nehmen wir also an, die Materie sei um Centra verdichtet, diese aber seien im Raume des Körpers gleichmässig vertheilt, so liefert die Rech-

nung noch eine kleinere Cohäsionskraft, als bei der Annahme absolut gleichmässiger Massenvertheilung, da die Vertheilung in sich berührende Cylinder nothwendig eine nur um Weniges grössere Kraft liefert, als absolute Massenvertheilung.

Wir wollen nun berechnen, wievielmal die berechnete Cohäsionskraft C_r kleiner ist als die thatsächliche C_w. Als Einheiten nehmen wir Meter, Kilogramm und die Kraft, womit ein Kilogramm und ein Kilogramm in der Entfernung von einem Meter sich anziehen. Alsdann ist $f=1$. Der Halbmesser der Erde sei gleich R Meter, die Masse der Erde M_e Kilogramm. Alsdann ist ein Kilogramm, d. h. die Kraft, womit die Erde die Masse eines Kilogramms anzieht, gleich

$$\frac{M_e}{R^2}.$$

Wenn nun die Zugfestigkeit eines Drahtes, dessen Dichtigkeit μ und dessen Durchmesser $2r$ beträgt, Z Kilogramm ist, so ist

$$C_w = \frac{M_e . Z}{R^2}.$$

Dagegen ist

$$C_r = 4\mu^2\pi^2 r^2 . \gamma,$$

mithin

$$\frac{C_w}{C_r} = \frac{M_e . Z}{4\mu^2\pi^2 r^2 . \gamma . R^2}.$$

Ein bestimmtes Beispiel wird das enorme Missverhältniss zwischen Wirklichkeit und Rechnung anschaulich machen.

Es ist

$$M_e = 5900000 \text{ Trillion Kilogramm},$$
$$R = 6364624 \text{ Meter},$$

mithin

$$\frac{M_e}{R^2} = 145000000000.$$

Nehmen wir nun einen Eisendraht, bei welchem $Z = 250$, $\mu = 7{,}8$, $r = 0{,}001^{\text{m}}$ ist, so erhalten wir

$$\frac{C_w}{C_r} = \frac{145000000000 . 250}{1200{,}9334 . 0{,}000001 . 2\gamma} = \frac{30000 \text{ Billion}}{2\gamma}.$$

γ hängt bekanntlich von λ ab und für λ müssten wir den Radius der Wirkungssphäre der Cohäsion setzen. Mit Hilfe der Seite 131 angeführten Werthe von γ lässt sich nun der vorstehende Ausdruck für verschiedene λ berechnen. Für

$\lambda = 0{,}01\,r$ ergiebt sich annähernd $\frac{C_w}{C_r} = 300$ Quatrillion,

$\lambda = 0{,}1\,r$ „ „ „ „ $= 3\frac{1}{3}$ „

$\lambda = r$ „ „ „ „ $= 90000$ Trillion,

$\lambda = 10\,r$ „ „ „ „ $= 21400$ „

$\lambda = 1000000\,r$ „ „ „ „ $= 4190$ „

Es ist also die thatsächliche Cohäsionskraft trillionen-, wenn nicht quatrillionenmal grösser als die bei unseren Voraussetzungen berechnete.

Welche Anordnung der Molecule vermag dieses Missverhältniss aufzuheben? Die Cohäsionskraft ist der Erfahrung gemäss dem Querschnitt proportional. Da aber auch die Molecularkräfte nach allen Seiten wirken, so müsste die Cohäsionskraft selbst bei relativ gleichmässiger Massenvertheilung in höherem Verhältniss als der Querschnitt wachsen. Denken wir uns aber ein Drahtbündel von gleichen und gleichweit von einander entfernten Drähten, so ist die Anzahl der Drähte dem Querschnitt des Bündels proportional. Insofern nun die Anziehungskraft zwischen benachbarten Drähten gegen die Cohäsionskraft der Einzeldrähte verschwindet, ist die Zugfestigkeit der Anzahl der Drähte und daher auch dem Querschnitt proportional. Denken wir uns aber jeden Punkt eines Drahtes mit Punkten der anderen Drähte durch Fäden verbunden, die um so schwächer sein mögen, je weiter die verbundenen Punkte von einander entfernt sind, so müssen beim Zerreissen des Drahtbündels nicht blos die einzelnen Drähte, sondern auch zum grossen Theil jene Verbindungsfäden zerrissen werden. Die Anzahl der Fäden aber, die zerrissen werden müssen, wächst in weit schnellerem Verhältniss als der Querschnitt des Bündels, mithin auch die Zugfestigkeit. So verhält es sich aber mit jedem Körper, wenn die Molecule in dem Raum desselben gleichmässig vertheilt sind. Hier ist auch bei der Zugrundelegung irgend einer Molecularkraft jedes Molecul, jedes Atom mit jedem andern seiner Wirkungssphäre durch Fäden verbunden. Wird nun der Stab oder Draht zerrissen, so müssen alle Fäden, durch welche die Theilungsfläche geht, zerrissen werden. Die Proportionalität der Zugfestigkeit mit dem Querschnitt ist also nur dann möglich, wenn jeder Stab oder Draht ein Bündel von Stäben oder Drähten ist, die keine Verbindung unter sich haben, d. h. deren Entfernung von einander so gross ist, dass die von anderen Drähten ausgehende Anziehungskraft im Vergleiche zu derjenigen, die von den Theilen desselben Stabes oder Drahtes ausgeht, verschwindet. Nun tritt aber in einem Körper die Cohäsionskraft nach allen Richtungen auf; es müssen daher im Allgemeinen drahtähnliche Verbindungen wenigstens nach drei verschiedenen Richtungen liegen.

Wir kommen jetzt zu dem schwierigsten und wichtigsten Punkte: zu der Thatsache, dass die Zunahme der Cohäsionskraft für $\lambda = 0$ oder doch wenigstens für ein unmessbar kleines λ am grössten ist, während die Rechnung das Maximum der Zunahme für $\lambda = 0{,}553694 r$ angiebt, und zu der weiteren Thatsache, die aber mit jener in engster Beziehung steht, dass die Cohäsionskraft nur auf eine unmerkliche Entfernung merkbar wirkt, dass also über diese sehr kleine Grösse hinaus das Wachsen von λ von keinem merkbaren Belang ist. Nun ist aber hier zunächst nicht zu vergessen, dass nach den Versuchen von Cavendish die Anziehung auch auf grössere Entfernungen merkbar wird, wenn man nur für eine leichte Be-

weglichkeit sorgt, dass also auch ein Wachsen der Cohäsionskraft bei einer Vergrösserung von λ eintreten muss, wenn auch die Zunahme kleiner ist, als die Fehler der Beobachtung.

Betrachten wir nun, um den richtigen Weg zu finden, nochmals IV), d. i. die Grösse der berechneten Cohäsionskraft C_r und ihre Abhängigkeit von λ. Wir haben gesehen, dass C_r für $\lambda = 0$ selbst gleich Null wird, mit λ wächst und für $\lambda = \infty$ selbst auch unendlich gross wird; dass die Zunahme von C_r für $\lambda = 0$ ebenfalls Null, dass von da an das Wachsen von C_r ein beschleunigtes ist bis $\lambda = 0{,}553694 r$, dass nun aber mit λ C_r zwar beständig wächst, aber doch in immer mehr abnehmendem Grade, dass aber erst für $\lambda = \infty$ diese Zunahme unendlich klein wird.

Bei diesen Ergebnissen ist aber nicht ausser Acht zu lassen, dass λ nur im Verhältniss zu r ausgedrückt ist. Nun kann aber λ für sich eine sehr kleine Grösse sein und doch im Verhältniss zu r sehr gross. Sehen wir daher einmal, wie sich IV) oder C_r ändert, wenn zwar das Verhältniss von λ zu r dasselbe bleibt, dagegen der absolute Werth von λ durch Abnehmen von r kleiner wird.

Da das Verhältniss von λ zu r unverändert bleiben soll, so setzen wir

$$\lambda = m r,$$

in welcher Gleichung m ein constanter Factor ist. Setzen wir diesen Werth von λ in IV), so erhalten wir

$$\text{V)} \quad C_r = \pm 2 f . \mu^2 . \pi^2 . r^4 \left[- m^2 - m\sqrt{m^2+1} + m\sqrt{4m^2+1} - \tfrac{1}{2} l \frac{\sqrt{m^2+1}+m}{\sqrt{m^2+1}-m} + \tfrac{1}{4} l \frac{\sqrt{4m^2+1}+2m}{\sqrt{4m^2+1}-2m} \right] = 2 f . \mu^2 . \pi^2 . r^4 . M.$$

Demnach scheint C_r proportional der vierten Potenz von r zu sein. Dabei ist aber zu beachten, dass sich λ in demselben Verhältniss ändert, wie r; wenn also r grösser oder kleiner wird, so wird in demselben Verhältniss λ grösser oder kleiner. Je grösser aber m ist, um so geringer ist der Einfluss, den das Wachsen oder Abnehmen von λ auf C_r ausübt. Ist z. B. $m = 10000$, so muss λ um mehr als das Zehnfache seiner Grösse wachsen, damit C_r bei unverändertem r nur um $\frac{1}{4}$ seiner Grösse zunehme (s. S. 131). Ist also λ im Vergleiche zu r sehr gross, so ist C_r der vierten Potenz von r proportional.

C_r nimmt also, wenn die Dichtigkeit μ constant bleibt, mit r sehr schnell ab. Denken wir uns aber die Masse eines Cylinders derart verdichtet, dass der Radius $r = \varrho$ wird, so nimmt μ zu. Es sei

$$\varrho = \frac{r}{p};$$

alsdann ist, da die Masse des Cylinders mit dem Radius ϱ dieselbe ist, wie die des ursprünglichen Cylinders mit dem Radius r, die Länge aber ebenfalls unverändert geblieben ist:

$$\pi \cdot r^2 \cdot \mu = \pi \varrho^2 \delta,$$

wenn δ die Dichtigkeit des Cylinders mit dem Radius ϱ ist. Folglich

$$\delta = \frac{r^2}{\varrho^2} \cdot \mu,$$
$$= p^2 \cdot \mu.$$

Ist aber der Radius eines Cylinders ϱ, die Dichtigkeit δ, die halbe Länge oder $\lambda = m\varrho$, so ist nach IV) und V)

$$C_r = 2f \cdot \delta^2 \cdot \pi^2 \cdot \varrho^4 \cdot M.$$

Setzen wir nun für δ und ϱ die obigen Werthe, so ist

$$C_r = 2f \cdot p^4 \mu^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{r^4}{p^4} \cdot M,$$
$$= 2f \cdot \mu^2 \cdot \pi^2 \cdot r^4 \cdot M.$$

Es ist dieses aber genau derselbe Werth, den man für C_r erhält, wenn der Radius des Cylinders r, die Dichtigkeit μ, die halbe Länge mr ist. $m\varrho$ ist aber p mal kleiner als mr. So kommen wir zu dem für unsern Zweck entscheidenden Ergebnisse:

VI) „Verdichtet sich ein Cylinder mit dem Radius r zu einem solchen mit dem p mal kleineren Radius ϱ, wird alsdann der verdichtete Draht in p gleiche Theile getheilt, so ist die (berechnete) Cohäsionskraft in der Mitte eines Theiles gerade so gross, wie in der Mitte des ursprünglichen Cylinders."

Nimmt man von dem verdichteten Cylinder und dem ursprünglichen gleiche Längen, so ist die Masse des einen Cylinders so gross, wie die des andern. Da nun aber von dem verdichteten ein p mal kürzeres Stück zu nehmen ist, so ist auch die Masse p mal kleiner. Somit haben wir mit p mal weniger Masse und p mal kürzerem Cylinder dieselbe Cohäsionskraft erzielt.

Da aber ein Cylinder mit messbarem Querschnitt nicht aus einer Reihe von Moleculen bestehen kann, so haben wir an Stelle des einen Drahtes mit dem Radius r ein Drahtbündel zu betrachten, welches s gleiche Einzeldrähte enthält, die sich berühren. Der Radius des Bündels sei r, seine Dichtigkeit μ, der Radius des Einzeldrahtes ϱ', die Dichtigkeit desselben δ'. Alsdann ist

$$s = \frac{\pi r^2}{4\varrho'^2}, \quad \varrho' = r \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s}};$$

ferner

$$\pi \cdot \varrho'^2 \cdot s \cdot \delta' = \pi \cdot r^2 \cdot \mu, \quad \delta' = \frac{4}{\pi} \cdot \mu.$$

Ist nun wiederum $\lambda = m\varrho'$, so ist nach IV) die Cohäsionskraft in der Mitte des Einzeldrahtes, wenn die Anziehungskraft zwischen den verschiedenen Drähten ausser Acht gelassen wird, gleich

$$2f \cdot \pi^2 \cdot \delta'^2 \cdot \varrho'^4 \cdot M$$

oder, wenn wir für δ' und ϱ' die obigen Werthe setzen:

$$2f \cdot \pi^2 \cdot \mu^2 \cdot r^4 \cdot M \cdot \frac{1}{s^2}.$$

Da wir nun s Einzeldrähte haben, so erhalten wir bei dem Bündel, dessen Länge $mr \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$, dessen Radius r und dessen Dichtigkeit μ ist:

$$C_r = 2f \cdot \pi^2 \cdot \mu^2 \cdot r^4 \cdot M \cdot \frac{1}{s}.$$

Wir wollen nun untersuchen, wie lang ein cylinderförmiger Draht von der Dichtigkeit μ und dem Radius r sein müsste, wenn derselbe aus s gleichen sich berührenden Drähten besteht, innerhalb derer die Materie gleichmässig vertheilt ist, damit die Rechnung bei Zugrundelegung der Newton-schen Anziehungskraft dieselbe Cohäsion liefert, welche thatsächlich nach der Beobachtung vorhanden ist. Nun ist bei einer Länge von $mr \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s}}$

$$C_r = 2f \cdot \pi^2 \cdot \mu^2 \cdot r^4 \cdot M \cdot \frac{1}{s}$$

und nach S. 134 ist bei einer Zugfestigkeit von Z Kilogrammen die thatsächliche Cohäsionskraft

$$C_w = \frac{M_c \cdot Z}{R^2}.$$

Wir haben also, da $f = 1$ ist (S. 134):

$$2\pi^2 \cdot \mu^2 \cdot r^4 \cdot M \cdot \frac{1}{s} = \frac{M_c \cdot Z}{R^2},$$

folglich

$$M = \frac{s \cdot M_c \cdot Z}{2\pi^2 \cdot \mu^2 \cdot r^4 \cdot R^2}.$$

Nach S. 130 wächst M, wenn λ $n$mal grösser wird, um $\frac{1}{2} ln$.

Ist nun für $\lambda = m'.r$ die Grösse $M = M'$, so fehlt noch an der zu erzielenden Grösse

$$\frac{s \cdot M_c \cdot Z - 2\pi^2 \cdot \mu^2 \cdot r^4 \cdot M' \cdot R^2}{2\pi^2 \cdot \mu^2 \cdot r^4 \cdot R^2}.$$

So oft nun $\frac{1}{2} ln$ in diesem Quotienten enthalten ist, mit der sovielten Potenz von n muss $m'r$ multiplicirt werden, damit wir die Länge erhalten, für welche $C_r = C_w$. Für diese Länge ist also

$$m = m'.n^{\frac{s \cdot M_c \cdot Z - 2\pi^2 \cdot \mu^2 \cdot r^4 M' \cdot R^2}{\pi^2 \cdot \mu^2 \cdot r^4 \cdot ln \cdot R^2}},$$

Mithin ist die gesuchte Länge

$$L = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \cdot r \cdot m'.n^{\frac{s \cdot M_c \cdot Z - 2\pi^2 \cdot \mu^2 \cdot r^4 M' \cdot R^2}{\pi^2 \cdot \mu^2 \cdot r^4 \cdot ln \cdot R^2}}.$$

Der thatsächliche Durchmesser der Wirkungssphäre der Cohäsionskraft sei d. Damit nun bei der Länge d eines Drahtes dieselbe berechnete Cohäsionskraft sich ergiebt, wie bei gleicher Massenvertheilung in den Ein-



zeldrähten, wenn die Länge L ist, muss der Durchmesser $r\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ des Einzeldrahtes in demselben Verhältniss kleiner angenommen werden, als d kleiner als L ist. Nennen wir nun den Durchmesser des verdichteten Einzeldrahtes d', so erhalten wir die Proportion

$$L : d = r\sqrt{\frac{\pi}{s}} : d',$$

mithin ist

$$d' = \frac{d \, . \, r\sqrt{\frac{\pi}{s}}}{L}.$$

Schon S. 135 haben wir gesehen, dass man wenigstens nach drei verschiedenen Richtungen drahtähnliche Verbindungen, die wir Reihenverbindungen nennen wollen, annehmen muss. Es kommt also der Cohäsion in der Richtung der Cylinderaxe nur $\frac{1}{3}$ der Masse zu gute, wofern wir die Voraussetzung machen, dass jene drei Richtungen aufeinander senkrecht stehen. Wir haben also in dem Ausdruck für L statt μ zu setzen $\frac{\mu}{3}$. Es ist also

$$\text{VII)} \qquad L = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \, . \, r \, . \, m' \, . \, n^{\frac{9 s M_e . Z - 2\pi^2 . \mu^2 . r^4 . M' . R^2}{\pi^2 . \mu^2 . r^4 . ln . R^2}}$$

und

$$\text{VIII)} \qquad \begin{cases} d' = \dfrac{d \, . \, r\sqrt{\frac{\pi}{s}}}{L} \\[2ex] \quad = \dfrac{d}{m'} \, . \, n^{-\frac{9 s M_e . Z - 2\pi^2 . \mu^2 . r^4 . M' . R^2}{\pi^2 . \mu^2 . r^4 . ln R^2}} . \end{cases}$$

Die vorstehende Grösse oder der Durchmesser der verdichteten Einzeldrähte ist gegen $r\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ oder den Abstand der Einzeldrähte, wofern Z, wie es bei festen und flüssigen Körpern der Fall ist, eine messbare Grösse ist, fast verschwindend klein.

Es ist also der Durchmesser der Atome oder sogar der Molecule gegen ihre Entfernung nach fast allen Richtungen eine verschwindend kleine Grösse. Nur nach einigen Richtungen rücken die Molecule näher zusammen zu Reihenverbindungen, die wenigstens bei festen Körpern durch den ganzen Körper sich durchziehen. Diese Reihenverbindungen zerfallen wenigstens bei krystallisirten Körpern in drei Gruppen. Die Reihenverbindungen derselben Gruppe sind unter sich ganz oder nahezu parallel, dagegen bilden die Gruppen Winkel mit einander, die mit Ausnahme zweier Gruppen des Hexagonal- und monoclinischen Systems und den Gruppen

des triclinischen Systems rechte Winkel sind. In der obigen Entwickelung haben wir diese Reihenverbindungen wie Cylinder angesehen, innerhalb deren die Masse stetig vertheilt sei. Dieses ist nun aber unwesentlich. Wesentlich ist für unsern zunächstliegenden Zweck, dass die mittlere Dichtigkeit in der Richtung der Reihe und zwar durchgehend auf relativ grosse Entfernungen enorm gross sei gegen die mittlere Dichtigkeit in den auf den Reihenverbindungen senkrechten Richtungen. Wir haben uns daher keine starren Reihen vorzustellen, sondern wie die Himmelskörper kreisen Atome und Molecule um einander, da sie ja demselben Gesetze gehorchen, wie jene. Aus diesem Grunde muss nun überhaupt die Anordnung und Bewegung der Molecule und Atome im Kleinen sein, was wir im Grossen im Weltenraume vor uns haben und vielfach berechnen können.

Einen nicht schwachen Beweis für die Richtigkeit der gefundenen Sätze über die Anordnung der Materie ist nun die von Herschel zuerst bemerkte Thatsache, dass die Nebelflecken Lager (Strata) bilden, von welchen eines sehr ausgedehnt und fast senkrecht auf der Milchstrasse steht. (Arago, Populäre Astronomie, Bd. I S. 440, 2. Aufl., herausgegeben von Hankel.) Das Milchstrassensystem wäre demnach wohl ein Molecul einer Reihenverbindung.

Ich übergebe nun die Abhandlung dem Urtheile der Fachgelehrten und werde bei einer günstigen Aufnahme verwandte, auf demselben Princip beruhende Abhandlungen über Undurchdringlichkeit, Beharrungsvermögen, Aggregatzustände, Krystallisation und Wärme liefern.

V.

Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen.

Von

Prof. Dr. WITTWER
in Regensburg.

Unter denjenigen physikalischen Disciplinen, die sich gegenwärtig vorzugsweise der Aufmerksamkeit der Fachmänner erfreuen, nimmt die Lehre von der Wärme einen der ersten Plätze, wenn nicht geradezu den ersten ein, und dieselbe hat denn auch einen hohen Grad der Ausbildung erreicht. Trotzdem glaube ich, dass die Lösung der Frage, mit was man es bei der Wärme eigentlich zu thun habe, noch viel zu wünschen übrig lasse, und doch muss gerade diese Frage an Wichtigkeit alle andern übertreffen, denn am Ende ist es immer die Theorie, die dem Zusammenfassen der Gesammtheit der Erscheinungen nothwendig zu Grunde liegen muss. Es möge mir gestattet sein, im Nachstehenden meine Bedenken über die gegenwärtig allgemein herrschende Art der Beantwortung vorstehender Frage zu äussern und eine Erklärungsweise vorzuschlagen, welche sich nach meinem Dafürhalten besser an die Naturerscheinungen anschliesst. Ich bin weit entfernt, zu glauben, dass meine Theorie eine endgiltige sei, bin vielmehr fest überzeugt, dass an ihr noch Manches zu ändern sein werde; es soll mir aber genügen, wenn es mir gelingt zu zeigen, dass die gegenwärtig herrschende Ansicht denn doch nicht über alle Zweifel erhaben ist, und wenn ich es dahin bringe, die Aufmerksamkeit der Physiker auf die fraglichen Punkte zu richten.

Für die Erklärung der Wärmeerscheinungen der Gase gilt bekanntlich allgemein die Annahme Krönig's, dass die Luftarten aus elastischen Atomen bestehen, die ohne alle Fernewirkung sich so lange in gerader Richtung bewegen, bis sie an andere oder an die Wandungen des einschliessenden Gefässes oder an andere Körper anstossen, worauf sie reflectirt werden, um bei einem neuen Zusammenstosse eine abermals veränderte Richtung und Geschwindigkeit zu erlangen. Die Temperatur des Gases ist der mittleren lebendigen Kraft der Atome proportional, und eine

mechanische Leistung des Gases geschieht auf Kosten der Atomgeschwindigkeit, also der Temperatur.

Neben dieser fortschreitenden Bewegung nimmt Clausius noch schwingende und drehende an, auf deren Rechnung ein Theil der gesammten den Gasen innewohnenden lebendigen Kraft kommt, und diese schwingenden und rotirenden Bewegungen setzt derselbe Forscher auch für die tropfbaren Flüssigkeiten und für die festen Körper voraus, während er die Arbeit der Wärme in eine äussere und eine innere theilt, von denen die erstere Lasten hebt und andere mechanische Effecte erzielt, indessen die andere zu den Molecularänderungen im Innern der Körper benutzt wird.

Was die fortschreitende Bewegung anbelangt, so möge es mir gestattet sein, gegen dieselbe das Bedenken auszusprechen, dass bei ihr der sogenannte Aether gänzlich unberücksichtigt bleibt.

Man kann wohl nicht zweifeln, dass die Erscheinungen des Lichtes auf Oscillationsbewegungen beruhen. Zu einer solchen braucht man ein Medium, dessen Theilchen vibriren können. Da nun das Licht von den fernsten Himmelsräumen bis zu uns gelangt, muss das Medium, das als Träger desselben dient, durch den ganzen Weltenraum verbreitet sein. Die Geschwindigkeit des Lichtes erheischt einen hohen Grad von Elasticität dieses Mediums, dessen einzelne Theilchen sich demgemäss mit ungeheurer Energie abstossen oder einander ausserordentlich nahe stehen müssen. Keiner der sogenannten chemischen Stoffe erfüllt eine dieser Bedingungen in genügender Weise. Die atmosphärische Luft oder irgend eine andere Gasart, die unter den von den Chemikern recipirten Stoffen einzig und allein hier in Betracht kommen können, entbehren des hohen Grades von Elasticität derartig, dass sie nicht entfernt im Stande sind, als Medium des Lichtes zu dienen. Es muss also der Träger des Lichtes ein anderer Stoff sein, als einer von denen, die man in den Chemiebüchern verzeichnet findet, und dieser andere Stoff wird von den Physikern Aether genannt.

Zu einem ähnlichen Schlusse führt die Betrachtung der Wärme. Nach dem Mariotte'schen Gesetze, der Strahlenbrechung des Lichtes u. s. w. ist die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft im Weltenraume, wenn sie je in demselben zu finden ist, so gering, dass sie von derjenigen der Luft am Meeresniveau viele tausend millionenmal übertroffen wird. Es müssen also die einzelnen Atome derselben, und wenn man sie sich auch noch so klein denkt, schon ziemlich weit auseinander sein. Andererseits ist die Sonne für uns die Hauptwärmequelle, und die mechanische Kraft der von der Sonne unserer Erde allein gespendeten Wärme beträgt nach Klein* in der Minute nicht weniger als 228 Billionen Pferdekräfte. Die Wärmestrahlen beruhen nun ebenso wie die des Lichtes auf Schwingungen eines Mediums,

* Gaea VIII, 11, 674.



und wenn dieses Medium die äusserst dünne Luft des Weltenraumes sein sollte, so müsste zur Vermittelung der ungeheuren mechanischen Kraft eine Bewegung der Gastheilchen vorausgesetzt werden, die über alle Begriffe geht.

Aus diesen Gründen halte ich die Annahme eines besonderen, von den der heutigen Chemie bekannten Stoffen verschiedenen, den ganzen Weltenraum erfüllenden Mediums, des sogenannten Aethers, für unerlässlich.

Da die Sonne unsere Hauptwärmequelle ist, so ist der Aether auch der Hauptvermittler der Wärme. Was zunächst die Gase anbelangt, so haben wir dieselben als Gemenge von Aether und den chemischen Atomen der jeweiligen Luftart zu betrachten, und die Vermittelung der Wärme geht in der Weise vor sich, dass die Schwingungen der Aethertheilchen Bewegungen der Atome hervorrufen. Soll dieses möglich sein — und dass es möglich ist, lehrt die Beobachtung —, so dürfen die Atome den Aethertheilchen an Quantität der trägen Substanz nicht unendlich überlegen sein. Man nimmt nach Redtenbacher's Vorgang gewöhnlich die Aethertheilchen als den Atomen gegenüber ausserordentlich klein an, so dass die Atome so von Aethersphären umgeben sind, dass sie im Kleinen ein Bild unserer Erde mit ihrer Atmosphäre darstellen. Unter diesen Umständen dürfte es wohl unmöglich sein, eine erkleckliche Bewegung des Gasatomes als Folge der Schwingungen der umgebenden Aethertheilchen abzuleiten; es wird diese Bewegung so wenig eintreten, als eine Bewegung der Erde (im Ganzen) infolge der Schwingungen der umgebenden Lufttheilchen möglich ist. Die Quantität der trägen Substanz eines Aethertheilchens kann beträchtlich kleiner sein als die eines Gasatomes, sie kann aber nicht gegen letztere verschwinden.

Die Atome der Gasarten schwimmen zwischen den Aethertheilchen und werden durch deren Schwingungen in Bewegung gesetzt. Befindet sich nun auf der einen Seite eines Atomes ein Aethertheilchen oder eine Gruppe von solchen, und bekommt es durch den Stoss des Aethers eine Bewegung in der einen Richtung, so muss es auf der entgegengesetzten Seite wieder auf ein oder mehrere Aethertheilchen stossen, und so gut die Aethertheilchen der einen Seite die Bewegung mittheilen konnten, so gut können die der anderen Seite diese Bewegung wieder nehmen, und es kann auf diese Weise wohl eine schwingende Bewegung des Atomes eintreten, niemals aber eine progressive, wie die Krönig'sche Theorie sie voraussetzt. Eine progressive Bewegung eines Atomes tritt hier ebenso wenig ein, als bei einem Holzscheite, das auf einer in Wellenbewegung befindlichen Wasserfläche schwimmt. Es mögen allerdings durch Strömungen progressive Bewegungen der Atome eintreten, diese sind aber erst die mittelbare, nicht die unmittelbare Folge der die Wärme bedingenden Bewegung, sie folgen auf die von der Wärme abhängende Ausdehnung und sind auch zu schwach, um mit der Wärmebewegung verwechselt werden zu können.

Es möge mir gestattet sein, aus meiner Schrift „Die Moleculargesetze" einige Sätze als gegeben anzuführen, bezüglich deren Beweis ich mich auf die genannte Schrift berufe.

1. Es giebt zwei verschiedene, träge, materielle Substanzen, den Aether und die Massentheilchen*.

2. Gleichartiges stösst sich ab, Ungleichartiges zieht sich an.

3. Sämmtliche Wirkungen nehmen ab, wie das Quadrat der Entfernung wächst.

Ausser diesen drei Fundamentalgesetzen citire ich aus der genannten Schrift (S. 35) folgenden Lehrsatz: Ist in dem Raume irgend ein Theil von Aether entleert, so ist die Wirkung, die dadurch auf irgend ein Aethertheilchen, befinde sich dieses wo es wolle, ausgeübt wird, genau die nämliche, als sei der allgemeine Raum von Aether leer, und als sei nur die wirklich leere Stelle von einer Substanz erfüllt, die nach demselben Gesetze, aber in entgegengesetztem Sinne, als der Aether wirkt.

Ist ein gegebener Raum nur zum Theile entleert, so ist die Wirkung so, als sei der Raum in mehrere kleinere getheilt, von denen die einen ganz erfüllt, die anderen leer sind.

Da die ursprüngliche Wirkung der Aethertheilchen eine im umgekehrten Verhältnisse zum Quadrate der Entfernung stehende Abstossung ist, so wächst für einen grösseren leeren kugelförmigen Raum die Anziehung der ersten Potenz des Radius direct proportional.

Ich habe diese Wirkung „Druck des äussern Aethers" genannt, sie spielt in allen Vorgängen in der Molecularwelt eine Hauptrolle.

Befindet sich ein Massenatom im Raume gleichzeitig mit ungezählten Aethertheilchen, so übt es auf diese eine Anziehung aus, und infolge dieser Anziehung wird sich eine Anzahl von Aethertheilchen unmittelbar an das Massenatom anlagern. Sind es der Aethertheilchen viele, so bilden sie um das Atom eine mehr oder weniger dicke Rinde, und je dicker diese ist, je grösser also die Zahl der angelagerten Aethertheilchen wird, um so mehr ist man zur Annahme berechtigt, sie seien sammt und sonders im Mittelpunkte des Massentheilchens vereinigt. Sind m und μ die Quantitäten träger Substanz von Massen- und Aethertheilchen, ist n die Zahl der letzteren, a die Anziehungsconstante von Aether- und Massentheilchen, b die Abstossungsconstante der ersteren je für die Einheit der Entfernung und

---

* Unter der Bezeichnung „Massentheilchen" ist hier das gemeint, was man gewöhnlich „schwere Theilchen" nennt. Ich habe das Wort „schwer" vermieden, weil man damit eine gegenseitige Anziehung der Körper zu bezeichnen pflegt; die Massentheilchen für sich stossen sich aber gegenseitig ab, und eine Anziehung kommt erst bei den Verbindungen von Massen- und Aethertheilchen zum Vorschein. (Mol.-Ges. 54.)



der Quantität der trägen Substanz, so wird die Anziehung so lange fortdauern, bis

$$1) \qquad a m \mu = b n \mu^2 \text{ oder } n = \frac{a m}{b \mu}$$

ist. Sowie n diesen Werth erreicht, hört jede weitere Wirkung auf, da die Abstossung der bereits gebundenen Aethertheilchen auf ein noch freies gerade so gross ist als die von dem Massenatom ausgehende Anziehung. Es würden sich dann infolge des äussern Aetherdruckes noch so viele Aethertheilchen auf der ganzen Combination sammeln, als letztere infolge ihres Volumens verdrängt, und hierauf wäre die ganze Verbindung für die übrige Welt wie gar nicht vorhanden.

Nach Cauchy ist die Geschwindigkeit des Lichtes in den Medien ohne Farbenzerstreuung der Quadratwurzel der Dichtigkeit des Aethers proportional. Es giebt nun wohl keinen Grund zur Annahme, für die Medien mit Farbendispersion gelte die entgegengesetzte Norm, wie für die Medien ohne die letztere, und da die Erfahrung zeigt, dass da, wo eine grössere Quantität von Massensubstanz in engen Räumen vereinigt ist (in den tropfbarflüssigen und in den festen Körpern), die Lichtgeschwindigkeit geringer ist als im allgemeinen Raume, so ergiebt sich, dass der Aether in der unmittelbaren Nähe der Massentheilchen weniger dicht ist als ferne davon. Ich weiss wohl, dass dieser Satz den Lehren sämmtlicher Physikbücher widerspricht, berufe mich aber darauf, dass das Licht durch den Aether nicht hindurchgeht, wie die Kugel durch ein Brett, sondern dass der Aether der Träger des Lichtes ist.

Die Aethertheilchen sind kleine Körper, die je von einander getrennt sich über den Raum verbreiten. Sie wirken abstossend auf einander und die von einem einzelnen derselben ausgeübte Thätigkeit ist nach allen Richtungen die gleiche. Wäre dieses nicht der Fall, so müsste eine Anordnung derselben im Raume zum Vorschein kommen, die sich jedenfalls in einer Weise zeigen würde, die der bei den doppeltbrechenden Krystallen beobachteten analog wäre. Man kann darum die Gestalt der Aethertheilchen als die der Kugel setzen, da deren Fernewirkung die nämliche ist. Die Anordnung dieser Kugeln im Raume ist eine derartige, dass sämmtliche auf eine derselben von allen übrigen ausgeübten Wirkungen in der Ruhelage sich aufheben, und dass die absolute Summe aller dieser Wirkungen, verglichen mit der einer andern Vertheilung entsprechenden, einen kleinsten Werth hat. Dieses Minimum wird dann eintreten, wenn alle Distanzen zwischen je zwei einander benachbarten Aethertheilchen unter sich ganz oder möglichst nahe gleich sind. Je ungleicher die Entfernungen sind, um so grösser ist bei gleicher Dichtigkeit die absolute Summe der auf ein Aethertheilchen ausgeübten Abstossungen, oder um so grösser ist bei gleicher Abstossung das von einer gegebenen Anzahl beanspruchte Volumen. Welche Anordnung diese der kleinsten Abstossung sei, das ist

meines Wissens zur Zeit unbekannt. Nahe an dem Minimum, ohne es jedoch ganz zu erreichen, ist diejenige Stellung, in welcher um ein gegebenes Aethertheilchen herum die Nachbarn in der Weise gruppirt sind, wie man dieses bei den Ecken derjenigen Combination von Würfel und Octaeder findet, bei welcher alle Kanten gleich lang sind, oder was dasselbe ist, die Anordnung gleich grosser Kugeln zu drei- oder vierseitigen Pyramiden. Bei dieser Gruppirung ist die Zahl der unmittelbaren Nachbarn eines Aethertheilchens zwölf. Ist bei irgend einer andern Anordnung die absolute Summe der Abstossungen oder die Verschiedenheit der Entfernungen grösser als bei der erwähnten, so ist sie jedenfalls auch grösser als bei der Minimalstellung.

Wenn in Gleichung 1) n einen grossen Werth hat, so bildet sich, wie bereits oben erwähnt, eine mehr oder weniger dicke Rinde von auf einander gelagerten Aetherkugeln um ein Massentheilchen, das ich zunächst als kugelförmig voraussetzen will, und von einer Verdünnung des Aethers kann hier keine Rede sein.

Es sei nun angenommen, in Gleichung 1) habe n den Werth 3. In diesem Falle werden zunächst drei Aethertheilchen sich unmittelbar auf der Massenkugel niederlassen, und da sie sich wegen ihrer gegenseitigen Abstossung möglichst weit von einander entfernen, nehmen sie in der Ruhelage die Ecke eines gleichseitigen Dreieckes ein, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Massenkugel geht. Fragt man, ob letztere im Stande sei, noch ein viertes Aethertheilchen aufzunehmen, so ergiebt sich für ein solches, welches sich in der Geraden befindet, die man durch den Mittelpunkt der Massenkugel senkrecht auf der Ebene des Aetherdreieckes errichtet:

$$2)\qquad W = \frac{a\,m\,\mu}{R^2} - \frac{3\,b\,\mu^2\,R}{(R^2 + r^2)^{3/2}},$$

wenn W diese Wirkung (Anziehung positiv), R die Entfernung des Mittelpunktes der Massenkugel von dem des freien Aethertheilchens und r die Entfernung des Massenkugelmittelpunktes von dem eines der auf der Kugel befindlichen Aethertheilchens, also die Summe der beiden Halbmesser bedeutet. Unter Berücksichtigung von 1) wird 2):

$$3)\qquad W = \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right)^{3/2}}\right)\frac{3\,b\,\mu^2}{R^2}.$$

So lange r^2 gegen R^2 vernachlässigt werden kann, so lange ist $W = 0$ wenn aber $\frac{r^2}{R^2}$ einen zu berücksichtigenden Werth hat, so ist $W > 0$, bedeutet also eine Anziehung, und es wird daher noch ein viertes Aethertheilchen incorporirt. Sobald dieses vierte Aethertheilchen einverleibt wird, rücken wegen der gegenseitigen Abstossung die ersten drei aus ihrer bisherigen Stellung, und es tritt wieder Gleichgewichtslage ein, wenn die Mittelpunkte der vier Aetherkugeln die Ecke eines Tetraederchens bilden, dessen Mittelpunkt mit dem der Massenkugel zusammenfällt.

Die Frage, ob noch ein fünftes Aethertheilchen aufgenommen werden könne, muss verneint werden, denn in derjenigen Stellung des aufzunehmenden Aethertheilchens, in der dieses noch am ehesten möglich wäre, in der letzteres in einer Geraden ist, die normal auf einer Tetraederfläche steht und durch den Mittelpunkt der Massenkugel geht, ist die Wirkung:

$$4) \qquad W = b\,\mu^2 \left(-R^{-2} + \tfrac{80}{9} R^{-5} r^3 - \tfrac{140}{27} R^{-6} r^4 + \ldots\right),$$

so dass also eine Abstossung stattfindet, so lange der Werth von $\frac{R}{r}$ nicht bedeutend unter 2 sinkt, was als höchst unwahrscheinlich hier nicht weiter untersucht werden soll.

Die ganze so entstandene Verbindung eines Massentheilchens mit vier Aetherkugeln wirkt nun auf den umgebenden Aether ein. Nehmen wir zuerst solchen Aether, der in verhältnissmässig grosser, wenn auch immerhin noch unmessbar kleiner Entfernung sich befindet, so wird dieser von dem Massentheilchen angezogen, von den Aetherkugeln dagegen abgestossen, und da die Abstossung dreier der letzteren ebenso gross ist als die Anziehung des Massentheilchens, so tritt für diese Compensation ein und es bleibt nur noch die Wirkung des vierten Aethertheilchens übrig. Diese Wirkung ist eine Abstossung und um dieser willen würde der umgebende Aether sich entfernen. Die Verbindung nimmt jedoch einen Raum ein und an ihrer Stelle wäre bei ihrer Abwesenheit ein Aethertheilchen, das gerade so in die Ferne wirken würde wie sie, und das ganze Ergebniss wäre, dass im allgemeinen Raume unter dem übrigen Aether statt eines Aethertheilchens eine gleichwirkende Verbindung von Massen- und Aethertheilchen wäre. Man hätte also Ruhe. Gehen wir auf geringere Entfernungen von unserer Verbindung über, so ist es nicht gleichgiltig, ob man die vier Aethertheilchen je zu drei Viertheilen compensirt an den Ecken eines Tetraeders habe, oder ein einziges Aethertheilchen in dessen Mittelpunkte. Es ist gerade so, als sei an jedem Ecke ein Viertheil eines Theilchens thätig, und dieser Umstand muss von Einfluss auf die Gruppirung des benachbarten Aethers sein. Da das Massentheilchen nur drei Aethertheilchen neutralisirt, bleibt eine Abstossung übrig, und wäre diese allein thätig, so würde der umgebende Aether sich bis in unendliche Entfernung wegbegeben. Dadurch würde um die Verbindung herum ein ätherleerer Raum entstehen, und nach dem oben angeführten Lehrsatze vom Aetherdrucke muss dieser letztere mit der Vergrösserung des ätherleeren Raumes wachsen, während die von der Verbindung ausgehende Abstossung immer kleiner wird, je mehr die Entfernung zunimmt. Es muss darum endlich einmal eine Entfernung kommen, in der beide Wirkungen sich aufheben. Man kann sich um die Verbindung herum Flächen gleicher Abstossung gezogen denken. Diese Flächen werden solche von doppelter Krümmung sein, und eine solche, die einer kleineren Abstossung entspricht, wird eine Fläche grösserer Abstossung einhüllen. Die Gestalt der Flächen ändert sich in der Weise, dass

sie von der ausgesprochenen tetraedrischen in grösserer Entfernung nach und nach in die Kugelform übergeht.

Denken wir uns für einen Augenblick, ein Aetherteilchen sei an der Stelle, wo die Fläche dem Tetraedermittelpunkte möglichst nahe ist, und es sei dort in Ruhe, weil die Abstossung von innen gerade so gross ist als der von aussen in diametral entgegengesetzter Richtung wirkende Aetherdruck! Lässt man nun das Aetherteilchen über die Fläche gleicher Abstossung hingleiten, so ist es allenthalben weiter von dem Mittelpunkte entfernt; diese grössere Entfernung entspricht aber einem bedeutenderen Drucke, während die Abstossung die gleiche geblieben ist, und das Aethertheilchen geht also an seine alte Stelle zurück. Dasselbe tritt ein, wenn das Aethertheilchen in normaler Richtung von der Fläche entfernt wird. Infolge dieses Umstandes wird das Aethertheilchen in einer bestimmten Entfernung von dem Tetraedermittelpunkte in der über einer Fläche desselben errichteten Normalen, die durch den Mittelpunkt geht, seine Ruhelage finden. Rings um das Tetraeder kommen vier solche Stellen vor, und es bildet sich daher um das erste ein einhüllendes zweites, und beide sind so gestellt, dass dem Ecke des einen der Mittelpunkt der Fläche des andern gegenübersteht. Um die erste Hülle bildet sich eine zweite u. s. w.; aber mit zunehmender Entfernung vermindert sich der Einfluss des innern Tetraeders mehr und mehr, und endlich tritt die normale Gruppirung des Aethers im allgemeinen Raume ein.

Es wurde oben darauf hingewiesen, dass die Aethervertheilung im allgemeinen Raume eine derartige sein müsse, dass die Entfernungen zwischen je zwei benachbarten Theilchen eine möglichst gleiche sei. Geht, wie dieses bei dem vorstehenden Beispiele der Fall ist, die ursprünglich tetraedrische Anordnung allmälig in die normale über, so ist es gar nicht anders möglich, als dass die Entfernungen unter einander grössere Verschiedenheiten bieten, als dieses bei einer durchaus normalen Anordnung der Fall ist, und es folgt daraus, dass eine gegebene Anzahl von Aethertheilchen bei gleichem Drucke ein grösseres Volumen einnehmen oder bei gleichem Volumen einen grösseren Druck ausüben, also sich von einander entfernen müsse. Es ist die Verpackung nicht mehr so rationell als bei der normalen Anordnung, und daraus folgt, dass in dem gleichen Raume nicht mehr so viele Theilchen Platz haben als früher. Es ergiebt sich aus dem Vorstehenden, dass der ein Massenatom zunächst umgebende Aether weniger dicht ist als der Aether des allgemeinen Raumes, denn die mit dem Massentheilchen unmittelbar verbundenen Theilchen machen, was Dichtigkeitsverhältnisse anbelangt, einen integrirenden Bestandtheil der Verbindung aus, bewegen sich mit derselben u. s. w. Die Ursache der geringeren Dichtigkeit ist in dem eingeschlossenen Tetraeder zu suchen, und darum muss auch die Dichtigkeit mit wachsender Entfernung von demselben zunehmen. Es beansprucht so das Tetraeder mit seiner Hülle einen grösseren Raum als eine

gleiche Anzahl von Aethertheilchen im allgemeinen Raume, hier ist also ein ätherverdünnter Raum, und nach dem Lehrsatze von dem Aetherdrucke muss Aether von dem allgemeinen Raume gegen die ganze Gruppe hindrängen, es muss daher sogar endlich einmal eine Entfernung von dem Tetraeder geben, in der der Aether sogar etwas dichter ist, als im allgemeinen Raume, und von dieser Stelle an nimmt die Dichtigkeit wieder ab, bis die ganze Anordnung der Aethertheilchen der des allgemeinen Raumes gleich und die ganze Combination, die ich nach Redtenbacher's Vorgang eine Dynamide nenne, abgeschlossen ist. Streng genommen würde dieser Abschluss allerdings erst in unendlicher Entfernung stattfinden, aber bei dem unbeträchtlichen Werthe von $\frac{r}{R}$ und R, auf welche Grössen hier Alles ankommt, können wir annehmen, dass der Abschluss der ganzen Dynamide schon in unmessbar kleiner Entfernung erfolge.

Nach Abzug des zur Neutralisirung des Massentheilchens nöthigen und dadurch selbst neutralisirten, also nicht weiter zu berücksichtigenden Aethers ist in der ganzen Dynamide genau ebensoviel des letzteren enthalten, als in dem gleichen Volumen des allgemeinen Raumes, aber rücksichtlich der Anordnung der Aethertheilchen bietet die Dynamide gegen diesen einen Unterschied.

Zur Vermeidung von Umschreibungen und Wiederholungen habe ich nachstehende Bezeichnungen gewählt: Gebundener Aether (diejenigen Aethertheilchen, welche mit dem Massenatome in unmittelbarer Berührung sind), Sättigungsäther (derjenige Theil des gebundenen Aethers, welcher nach Gleichung 1] von dem Massentheilchen neutralisirt wird), überzähliger Aether (derjenige Theil des gebundenen Aethers, der nach Gleichung 3] angezogen wird), Kern der Dynamide (Massenatom und gebundener Aether zusammen), Hüllenäther (diejenigen Aethertheilchen der Hülle, deren Gruppirung von der normalen, im allgemeinen Raume stattfindenden abweicht), freier Aether (der Aether des allgemeinen Raumes).

Die ganze Hülle enthält also soviel Aether, als sich nach Abzug des überzähligen Aethers in einem gleichen Volumen des allgemeinen Raumes befindet, und da der gebundene Aether sich nicht selbstständig bewegen kann, zeigen die auf Aetherbewegung beruhenden Erscheinungen stets eine Aetherverdünnung als Resultat der Einwirkung der Massentheilchen an. Denkt man sich von aussen gegen den Kern zu rings um diesen mehr und mehr Aether weggenommen, so wird die durchschnittliche Dichtigkeit des Restes immer kleiner, denn bis zu dem Maximum der Dichtigkeit herein sind die weggenommenen Schichten dichter als die durchschnittliche Dichtigkeit der übrigen Hülle, und von dem Maximum an ist jede äussere Schichte wieder dichter als jede von ihr eingeschlossene.

Es wurde bisher angenommen, dass das Massentheilchen durch drei Aethertheilchen genau neutralisirt sei. Durch Nichterfüllung dieser Be-

dingung wird an der ganzen Reihenfolge von Wirkungen keine wesentliche Aenderung hervorgebracht. Lässt man nämlich *m* nach und nach grösser werden, so wird endlich einmal ein Werth desselben zum Vorschein kommen, bei dem fünf Aetheratome statt vier aufgenommen werden. Wächst *m* noch weiter, so kommen sechs Aethertheilchen u. s. f. bis etwa zwölf. Stets wird ein Uebergang von der einen Aetheranordnung zur andern, d. i. von der durch die Zahl der gebundenen Aethertheilchen angegebenen zur normalen stattfinden, und infolge dessen auch eine Aenderung der Dichtigkeit, welche Aenderung aber um so geringer ausfallen muss, je bedeutender die Zahl der gebundenen Aethertheilchen ist. Würde *m* abnehmen, statt, wie eben angenommen, zu wachsen, so würde eben die Zahl der gebundenen Aethertheilchen kleiner, aber die Aenderung der Dichtigkeit des Aethers der Dynamidenhülle von innen nach aussen würde nicht ausbleiben.

Sind die Dynamiden vollständig und mit mehr oder weniger freiem Aether untermischt, so entsteht ein Gas; sind dagegen von den Hüllen mehr oder weniger Schichten abgestreift, so haben wir eine Molecularwirkung der Dynamiden auf einander zu erwarten, und es entsteht ein tropfbarflüssiger oder ein fester Körper. Es möge mir gestattet sein, bezüglich dieser Wirkungen auf meine Schrift: „Die Molecnlargesetze“ zu verweisen. Ich will hier nur in Kürze darauf aufmerksam machen, dass die Verbindung von Massentheilchen und Aethertheilchen des unvermeidlichen überzähligen Aethers wegen gegen jede andere ähnliche Verbindung, sowie gegen jedes Aethertheilchen abstossend wirkt, diese Abstossungen aber inmitten des allgemeinen Aethers, dessen Theilchen sich ebenfalls abstossen, vorkommen. Anziehungen zwischen Verbindung und Verbindung oder zwischen Verbindung und Aethertheilchen sind in derselben Weise möglich, wie die axiale Stellung diamagnetischer Substanzen, wenn sie umgeben von einem stärker diamagnetischen Medium zwischen den Polen eines Elektromagnetes sich befinden.

Beträgt die Zahl der gebundenen Aethertheilchen drei, so entsteht ein Körper des hexagonalen Krystallsystems; steigt die Zahl auf vier, so bekommt man einen Krystall des tesseralen Systems, und zwar ein Tetraeder bei einigermassen kleinem Werthe von $\frac{r}{R}$ (unter etwa 0,2); wenn der Bruch grösser wird, entsteht ein Octaeder. Bei fünf Aethertheilchen bekommt man einen amorphen Körper, bei sechs einen tesseralen Krystall u. s. w.

Körper, die sich abstossen, verhalten sich wie Körper, die von einem absolut elastischen Polster umgeben sind. Das Polster des einen Körpers reicht bis zu dem des andern, und ist deren eine grosse Anzahl in einem gegebenen Raume vorhanden und noch dazu beweglich, so sucht jeder der Abstossung der übrigen möglichst auszuweichen, jeder einzelne sucht den von den übrigen leergelassenen Platz einzunehmen, und die Folge davon ist,



dass der gegebene Raum allenthalben besetzt ist. Jeder einzelne Körper hat seinen angewiesenen Platz, und nimmt man noch ferner an, dass er mit einem absolut elastischen Polster umgeben ist, so ist der ganze Raum gewissermassen voll. Bewegt sich in diesem Raume ein Theilchen, so kann es nicht weit kommen, ohne anzustossen; denn streng genommen drückt, sobald es anfängt, sich zu bewegen, sein Polster auf diejenigen der Nachbartheilchen, es wird von denselben aufgefangen und reflectirt. Progressive Bewegungen, wie sie die Krönig'sche Theorie voraussetzt, können hier nicht vorkommen, und die Bewegungen müssen sich daher auf Oscillationen zurückführen lassen, denn auch die Drehungen und Wälzungen, wie sie Clausius annimmt, müssen sich dem Vorstehenden zufolge im höchsten Falle bei den Massentheilchen auf geringe Schwankungen reduciren, während sie bei den Aethertheilchen gar nicht vorkommen können, oder wenn sie vorkämen, sich stets auf dasselbe Aethertheilchen beschränken würden, da alle Möglichkeit der Mittheilung fehlt, so dass wir sie als ohne Einfluss nach aussen gar nicht in Betracht zu ziehen haben. Ich muss jedoch, um Missverständnissen vorzubeugen, bemerken, dass wohl infolge irgend einer äusseren Veranlassung Strömungen vorkommen können, welche auf einem Miteinandergehen einer grösseren Anzahl von Theilchen beruhen, wie z. B. bei dem Winde, dass aber ein einzelnes Theilchen ohne eine ganz aussergewöhnliche Ursache bald aufgefangen werden müsse, ohne aus der nächsten Nachbarschaft hinauszukommen. Solche aussergewöhnliche Ursachen sind wenigstens bei Körpern, die sich im thermischen Gleichgewichte befinden, nicht anzunehmen, und auch die Massentheilchen müssen von Aethertheilchen aufgefangen werden können, da sie von denselben (Sonnenstrahlen) auch in Bewegung gesetzt werden.

Stossen zwei absolut elastische Körper auf einander, so wird die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes dadurch in keiner Weise geändert, und dasselbe Verhalten beobachtet man auch bei Körpern, die sich abstossen, nach welchem Gesetze dies auch geschehen möge.

Wenn zwei Körper sich blos unter dem Einflusse einer zwischen ihnen thätigen abstossenden oder anziehenden Kraft befinden, so werden die Geschwindigkeiten, die sie in einem gegebenen Augenblicke besitzen, im umgekehrten Verhältnisse der Quantitäten ihrer trägen Substanz sein. Wäre nun etwa in einem Gase nur ein Massentheilchen und ein ihm benachbartes Aethertheilchen beweglich, so würden beide abwechselnd sich einander nähern oder sich von einander entfernen, die Bewegungsgrössen beider wären gleich, und auf der je sich abgewendeten Seite angelangt, würden sie von dort befindlichen (als fest angenommenen) Theilchen reflectirt. Sind aber diese Theilchen auch beweglich, so müssen sie ebenfalls mitschwingen, und in einer grösseren Quantität schwingender sich abstossenden Körper wird der Gleichgewichtszustand eingetreten sein, wenn die Bewegungsgrösse aller gleich ist. In diesem Falle oscillirt jeder um seine Gleich-

gewichtslage, und die Schwingungsamplitude ist der Quantität der trägen Substanz umgekehrt proportional. Hätte ein Theilchen in dem Augenblicke, in dem es die Gleichgewichtslage passirt, eine grössere Geschwindigkeit, als die normale, so würde es sich auch über die normale Amplitude hinaus entfernen, würde dann auf die gegenüberstehenden Theilchen einen stärkeren Stoss ausüben, sie also zu stärkerer Oscillation veranlassen und daher selbst verlieren. Im entgegengesetzten Falle wird ein Gewinn von Geschwindigkeit die Folge sein. Schwingen also nach Eintritt des thermischen Gleichgewichtes alle Theilchen um ihre Ruhelage, so werden auch die Bewegungsgrössen gleich sein.

Ich halte dafür, dass der vorstehende Satz durch Vernunftschlüsse klar gemacht werden kann, dass es aber zur Zeit sehr schwierig sein dürfte, ihn durch mathematische Formeln zu beweisen, denn die Integralrechnung ist nicht ausreichend, wenn es sich nicht um Stösse handelt, die aus allen Richtungen kommen, welche Bedingung hier nicht erfüllt ist, und da die Gruppirung der einzelnen Theilchen wenigstens in der Nähe der Massentheilchen von Körper zu Körper verschieden ist, lässt sich auch nicht wohl eine auf eine räumliche Anordnung discreter Theilchen gestützte allgemeine Formel aufstellen.

Im Falle des thermischen Gleichgewichtes wird ein schwingendes Theilchen von den benachbarten reflectirt wie von einer festen Wand, und es sei zunächst angenommen, wir haben einen solchen Körper, der sich zwischen zwei ihn abstossenden Wänden oder, wenn man will, festen Punkten hin und her bewegt. Die Abstossung sei ausgedrückt durch

$$5)\qquad f(r) = -\left(\frac{b}{r^n} + \frac{\gamma}{r^p} + \frac{\delta}{r^q} + \dots\right),$$

wenn $b, \gamma, \delta \dots$ positive oder negative, $n, p, q \dots$ positive Constante vorstellen. Je nachdem wir mit einer Abstossung oder Anziehung zu thun haben, ist $b, \gamma, \delta \dots$ positiv oder negativ. Bedeutet x die Entfernung des schwingenden Theilchens von der Gleichgewichtslage, r die Entfernung der letzteren von einer der beiden Wände, so wird

$$6)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -b\left(\frac{1}{(r-x)^n} - \frac{1}{(r+x)^n}\right) - c\left(\frac{1}{(r-x)^p} - \frac{1}{(r+x)^p}\right) + \dots.$$

Ist V die Geschwindigkeit, wenn $x=0$, v die jeweilige Geschwindigkeit, und setzt man

$$7)\qquad \frac{2bn}{r^{n+1}} + \frac{2\gamma p}{r^{p+1}} + \dots = \frac{2bn}{r^{n+1}}\left(1 + \frac{\gamma p}{bnr^{p-n}} + \dots\right) = \varphi,$$

$$8)\qquad \frac{bn(n+1)(n+2)}{2.3r^{n+3}}\left(1 + \frac{\gamma p(p+1)(p+2)}{bn(n+1)(n+2)r^{p-n}} + \dots\right) = \psi,$$

so ergiebt die Integration von 6)

$$9)\qquad V^2 - v^2 = \varphi x^2 + \psi x^4 = \varphi x^2\left(1 + \frac{\psi}{\varphi}x^2\right) = \frac{\varphi x^2}{1 - \frac{\psi}{\varphi}x^2}$$

und

$$10) \qquad (V^2 - v^2)\left(1 - \frac{\psi}{\varphi}x^2\right) = \varphi x^2,$$

wobei die höheren Potenzen von x als sehr kleine Grössen repräsentirend weggelassen sind. Wächst x, so wird v kleiner, und x erreicht einen grössten Werth x_0, wenn $v = 0$ ist. Dieser Maximalwerth ist

$$11) \qquad x_0^2 = \frac{V^2\varphi}{\varphi^2 + V^2\psi} = \frac{\varphi}{\frac{\varphi^2}{V^2} + \psi}.$$

Setzt man in 10) für v den ursprünglichen Werth $\frac{dx}{dt}$ ein, so ergiebt sich

$$12) \qquad dt = \frac{dx\sqrt{1 - \frac{\psi}{\varphi}x^2}}{V\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}}},$$

und durch Integration von $x = 0$ bis $x = x_0$ findet man

$$13) \qquad t = \frac{x_0}{V}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{\psi x_0^2}{4\varphi} - \ldots\right)$$

oder, wenn man für x_0, φ und ψ die Werthe einsetzt:

$$14) \qquad t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r^{n+1}}{2bn}}\left[\left(1 - \frac{\gamma p}{2bnr^{p-n}} + \ldots\right) - \frac{(n+1)(n+2)}{32bn}V^2 r^{n-1}\left(1 + \frac{\gamma p(p+1)(p+2)}{bn(n+1)(n+2)r^{p-n}} - \frac{5\gamma p}{2bnr^{p-n}}\right)\right].$$

Es bedeutet hier t die Zeit, welche der Körper braucht, um aus der Gleichgewichtslage bis x_0 zu kommen, und die ganze Schwingung ist das Vierfache dieser Zeit.

Aus Gleichung 11) ergiebt sich, da φ und ψ positiv, dass der Werth von x_0, also die Schwingungsamplitude, mit der Geschwindigkeit wächst, mit welcher der Körper die Gleichgewichtslage passirt. Die Schwingungszeit ist constant, so lange man in 14) das zweite Glied unberücksichtigt lassen kann; ist dieses aber nicht mehr gestattet, so ergiebt sich, dass die Schwingungszeit bei zunehmender Geschwindigkeit des Körpers kleiner wird, und bei fortdauernder Abnahme der Schwingungszeit muss es endlich einmal dahin kommen, dass die von diesen Schwingungen eingeleiteten Aetheroscillationen sichtbar werden, und der Körper glüht. Das Glühen beginnt mit derjenigen Farbe, deren Schwingungszeit die bedeutendste ist, mit der rothen.

Der schwingende Körper übt seinerseits auch einen Druck auf die Wände aus. Bezeichnet man diesen auf eine Wand ausgeübten Druck mit W, so hat man

$$15) \qquad W = -\int\left[b\left(\frac{1}{(r-x)^n} + \frac{1}{(r+x)^n}\right) + \gamma\left(\frac{1}{(r-x)^p} + \frac{1}{(r+x)^p}\right) + \ldots\right]dt,$$

in welcher Gleichung das Integral von dem Augenblicke zu nehmen ist, in dem der Körper die Gleichgewichtslage passirt, bis zu dem, in welchem er in x_0 angekommen ist. Das Integral gilt dann für die Zeit, welche der

Körper braucht, um von $+x_0$ nach $-x_0$ oder umgekehrt zu gelangen. — Setzt man

$$16)\quad \lambda = \frac{2b}{r^n}\left(1 + \frac{\gamma}{b\, r^{p-n}} + \ldots\right),$$

$$17)\quad \mu = \frac{bn(n+1)}{r^{n+2}}\left(1 + \frac{\gamma p(p+1)}{bn(n+1)\, r^{p-n}} + \ldots\right),$$

wird ferner in 15) aus 12) der Werth von dt eingesetzt, so bekommt man

$$18)\quad W = -\frac{1}{V}\int_0^{x_0} (\lambda + \mu x^2)\, dx \sqrt{\frac{1 - \frac{\psi x^2}{\varphi}}{1 - \frac{x^2}{x_0^2}}}.$$

Die Integration giebt

$$19)\quad W = -\frac{\pi}{2}\frac{x_0}{V}\left[\lambda + \tfrac{1}{2}\left(\mu - \frac{\lambda\psi}{2\varphi}\right)x_0^2 + \ldots\right].$$

Die Gleichung 13) giebt den Werth der Zeit, während welcher der Körper von 0 bis x_0 geht; dividirt man also W in 19) durch den doppelten Werth von t in 13), so erhält man denjenigen Druck, welcher der Zeit einheit entspricht. Dieser ist

$$20)\quad \begin{aligned} W &= -\left[\frac{\lambda}{2} + \tfrac{1}{4}\mu x_0^2 + \ldots\right], \\ &= -\left[\left(\frac{b}{r^n} + \frac{\gamma}{r^p} + \ldots\right) + \frac{(n+1)V^2}{8r}\left(1 + \frac{\gamma p}{bn\, r^{p-n}}\left(\frac{p-n}{n+1}\right)\right) + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Dieser Werth des Druckes besteht aus zwei Theilen, von denen der eine von der Oscillationsgeschwindigkeit unabhängig ist, während der andere wie das Quadrat von V wächst. Der erste Theil ist derjenige Druck, der durch den von aussen herein wirkenden Aether aufgehoben wird. Ist der schwingende Körper ein im allgemeinen Raume befindliches Aethertheilchen, so ist, weil die Aethertheilchen sich mit einer Kraft abstossen, die im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung steht, b die Abstossungsconstante, $n=2$, $\gamma \ldots = 0$; für Massentheilchen oder Aethertheilchen in deren Nähe kann der Angriffspunkt der Abstossung aus dem oben angegebenen Grunde nicht mehr in den Mittelpunkt des Massentheilchens gelegt werden, und es sind daher die Werthe von γ, $\delta \ldots$ nicht mehr gleich Null; sie sind es aber auch nicht für den von aussen herein wirkenden Aetherdruck, und für den Fall der Ruhe heben beide Wirkungen sich auf. Würde man etwa die Gleichung 20) auf die in 4) angeführte Stellung anwenden, so hätte man, wenn man in 4) μ als Einheit der Quantität träger Substanz und r als Einheit der Entfernung setzt, $b=b$, $\gamma = -b\,\frac{80}{9}$, $\delta = b\,\frac{140}{27}$, $n=2$, $p=5$, $q=6$.

Tritt nun eine Oscillation auf, so erscheint eine neue Abstossung, ein neuer Druck, der durch den Aetherdruck nicht compensirt wird, und diesen haben wir als die Folge der Wärme zu betrachten.

Entsprechen sich für zwei gleiche Körper die Drucke p, p_1 und die Geschwindigkeiten V und V_1, so hat man

21) $$V^2 : V_1^2 = p : p_1.$$

Es ist Erfahrungssatz, dass die absolute Temperatur dem Drucke proportional ist oder, wenn man will, man setzt die absolute Temperatur dem Drucke proportional; es wird also

22) $$\frac{V^2}{V_1^2} = \frac{p}{p_1} = \frac{\tau}{\tau_1},$$

wenn τ und τ_1 2 verschiedene Temperaturen bezeichnen. Ist ε eine Constante, so hat man für die Temperatur τ_1

23) $$p_1 = \frac{\varepsilon \tau_1}{r}.$$

Denkt man sich c Theilchen in eine Reihe gestellt, so erhält man ein Prisma, dessen Querschnitt die Einheit, dessen Länge cr ist. Wächst nun τ_1 um τ, so nimmt r um s zu, und wenn der Druck p_1 der gleiche bleibt, so ist

24) $$\frac{\varepsilon(\tau_1 + \tau)}{r + s} = \frac{\varepsilon \tau_1}{r}.$$

Es wird so

25) $$s = \frac{r\tau}{\tau_1}.$$

War das Volumen vorher cr, so ist es jetzt $c(r+s) = cr\left(1 + \frac{\tau}{\tau_1}\right)$. Gelten r und τ_1 für 0° irgend einer Scala, so ist cr das Volumen bei 0° und $\frac{1}{\tau_1}$ der Ausdehnungscoefficient. Bezeichnet man das Volumen des Gases bei τ^0 und 0^0 mit V_τ und V_0, dann den Bruch $\frac{1}{\tau_1}$ mit α, so wird

26) $$V_\tau = V_0 (1 + \alpha \tau).$$

Die Annahme, die absolute Temperatur sei dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, entspricht, wie man sieht, der Beobachtung, so lange sich die Untersuchung auf gleichartige Theilchen beschränkt. Vergleicht man verschiedene Körper, so muss auch die Quantität der trägen Substanz der schwingenden Theilchen in Berücksichtigung gezogen werden. Nun haben wir aber den Satz, dass für den Fall des thermischen Gleichgewichtes die Producte aus Geschwindigkeit und Quantität für die verschiedenen Theilchen gleich sein müssen, und es muss daher als Ausdruck für die absolute Temperatur eines Atomes gesetzt werden

27) $$\tau = k(-mV)^2,$$

wenn k eine Constante, m die Menge träger Substanz des schwingenden Atomes darstellt.

Die vorstehenden Gleichungen gelten allgemein für die Körper aller Aggregatzustände.

Bezüglich der Gase liegt der Gedanke nahe, die Grösse r der Formel 23) mit dem Mariotte'schen Gesetze in Verbindung zu bringen, da bekanntlich dieses Gesetz sich aus einer der Entfernung umgekehrt proportionalen Abstossung ableiten lässt. In diesem Falle wäre also das r der

Formel 20) die mittlere Entfernung zweier Gasatome. Macht man diese Annahme, wie ich in meiner Schrift „Moleculargesetze" gethan habe, so muss man nach dem Vorgange Redtenbacher's bezüglich der Aethertheilchen voraussetzen, dass in den Dynamiden radiale Schwingungen des Hüllenäthers gegen den Kern stattfinden. Soviele Vortheile diese Annahme in mancher Hinsicht bietet, so ist mir der Umstand störend, dass sich die Nothwendigkeit dieser radialen Schwingungen nicht gut motiviren lässt, und ich will daher im Nachstehenden das Mariotte'sche Gesetz unter der naturgemässesten Voraussetzung, dass r die mittlere Entfernung zweier Aethertheilchen oder eines solchen und eines Massentheilchens sei, abzuleiten versuchen.

Unter dieser Annahme wird durch eine Verdünnung oder Verdichtung eines Gases eine wesentliche Aenderung von r nicht hervorgebracht, und es unterscheidet sich das dünnere Gas von dem dichteren nur dadurch, dass im ersteren eine gegebene Quantität von Atomen mit mehr Aether untermischt ist, im letzteren mit weniger, und Verdichtung eines Gases ohne Temperaturänderung ist gleichbedeutend mit Abscheidung von Aether. * Die Erwärmung eines Gases ist im Gegensatze hiervon verbunden mit einer Vergrösserung von r.

Bekanntlich ist die Toricelli'sche Leere durchsichtig, was beweist, dass dieselbe Aether enthält. Neigt man das Barometer, so läuft das Quecksilber bis an das Ende der Röhre vor, und da diese jetzt mit Quecksilber erfüllt ist, muss der Aether sich entfernt haben. So sicher dieses ist, so wenig lässt sich zur Zeit angeben, welchen Weg der sich entfernende Aether genommen habe. Er kann durch das Glas, durch das Quecksilber oder der Berührungsfläche beider entlang gegangen sein; augenscheinlich ist ihm auf dem Wege kein grosses Hinderniss entgegen getreten; denn man beobachtet kein Blasen oder eine sonstige Erscheinung, die auf Schwierigkeiten schliessen liesse. Wenn aber der Aether auf seinem Wege kein Hinderniss erfährt, so kann er auch auf Glas und Quecksilber nicht drücken, d. h. nicht in dem Sinne drücken, in dem es allenfalls eingeschlossene Luft thun würde, denn der Druck setzt das Hinderniss voraus. Würde man irgend einen derartigen Druck annehmen, so würde eine Aetherverdichtung in der Toricelli'schen Leere die unmittelbare Folge einer etwaigen Neigung des Barometers sein, und es wäre wohl schwer, die Unabhängigkeit der beiden Quecksilberniveaux von der Grösse der Toricelli'schen Leere und von der Abweichung der Barometerröhre von der Verticalrichtung zu erklären.

Es ergiebt sich aus dem Vorstehenden, dass der in dem Raume über dem Quecksilber in der langen Röhre des Barometers befindliche Aether auf die Höhe der Quecksilbersäule ohne Einfluss ist, und wenn man bei Anwesenheit von Gas in diesem Raume eine Verkürzung der Quecksilber-

* Mol.-Ges. 90.

säule beobachtet, so kann diese nur von der Wirkung der in dem Gase befindlichen Massentheilchen herrühren. Nehmen wir nun an, es befinde sich oberhalb des Quecksilbers ein Gas, so werden dessen Massentheilchen das Quecksilber herabdrücken. Die einzelnen Gastheilchen werden in irgend einer Richtung oscilliren, und der hieraus sich ergebende Druck wird sich in eine horizontale und in eine verticale Componirende zerlegen lassen. Die erstere wird durch den Widerstand des Glases aufgehoben, letztere drückt das Quecksilber herab, und dieser Druck muss bei unveränderter Temperatur, also gleichbleibender Geschwindigkeit der Massentheilchen um so bedeutender sein, je dichter die an das Quecksilber stossenden Massentheilchen sind, je geringer das Volumen ist, und so erklärt sich das Mariotte'sche Gesetz. Es hat dieser Vorgang einige Aehnlichkeit mit dem Dalton'schen Gesetze des Gasdruckes, wo je nach Umständen der eine Theil eines Gasgemenges drückt, der andere nicht. Um jedoch Missverständnissen vorzubeugen, will ich hier bemerken, dass der Aetherdruck, von dem ich immer spreche, sich bemerkbar macht, wenn irgendwo ein ätherleerer oder ätherverdünnter Raum ist; diese Bedingung ist aber hier nicht erfüllt.

Es wäre noch eine weitere Möglichkeit, das Mariotte'sche Gesetz zu erklären, da, und diese beruht auf dem Umstande, dass die Hüllen der Dynamiden einen Widerstand leisten, wenn bei fortschreitender Verdichtung mehr und mehr Aethertheilchen abgesondert werden. Dieser Widerstand, der dann dem Volumen umgekehrt proportional gesetzt werden müsste, beruht darauf, dass die Aethertheilchen dem oben Gesagten zufolge einen bestimmt angewiesenen Platz in der Dynamidenhülle einnehmen, und dass sie aus diesem erst entfernt werden müssen. Bei der verschiedenartigen Gruppirung der Aethertheilchen der Hüllen in den einzelnen Gasen ist jedoch schwer einzusehen, wie gerade dieser Widerstand ein so einfaches Gesetz befolgen sollte. Eher lässt sich denken, dass die Abweichungen der Gase von dem Mariotte'schen Gesetze auf einen derartigen Widerstand zurückzuführen wären.

Der Druck der Gastheilchen hängt, wie sich aus 27) ergiebt, von der Geschwindigkeit ab, mit der die Atome die Gleichgewichtslage passiren, also von der Temperatur. Mit Abnahme der letzteren muss also der der Verdichtung geleistete Widerstand kleiner werden, und bei gehörig niedriger Temperatur und gehörigem Drucke muss man endlich zu einem Punkte kommen, bei dem nur noch die inneren charakteristischen, weil von der Kugelform abweichenden Theile der Hülle vorhanden sind, und es folgt darauf eine Molecularanziehung, eine Condensation des Gases. Diese wird also um so eher eintreten, je niedriger die Temperatur, je grösser der Druck ist; es möge mir jedoch gestattet sein, bezüglich dieser Actionen auf meine „Moleculargesetze" zu verweisen.

Wenn auch bei den Versuchen über das Mariotte'sche Gesetz eine Verdünnung oder Verdichtung des Aethers nicht nachweisbar ist, so ist es

darum doch denkbar, dass, wenn rasche Verdünnung oder Verdichtung und Beobachtung nahe zusammenfallen, eine Dichtigkeitsänderung des Aethers nachweisbar wäre. Ausdehnung zieht, wie weiter unten gezeigt werden soll, eine Abnahme der Temperatur nach sich, Verdichtung eine Erwärmung, und es wäre nicht unmöglich, dass die Temperaturänderungen einerseits bei raschem Auspumpen der Luft vermittelst der Luftpumpe, andererseits bei dem pneumatischen Feuerzeuge nebenbei die Folge einer Aenderung der Aetherdichtigkeit wären. Bei den Versuchen über das Mariotte-sche Gesetz kommen derartige rasche Aenderungen nicht vor, denn es ist bekanntlich Bedingung bei denselben, dass vor der Untersuchung von Druck und entsprechendem Volumen gewartet werden muss, bis alle Temperaturverschiedenheiten verschwunden sind.

Die Wärme eines Atomes beruht auf dessen Bewegung. Wird dieser Satz als Ausgangspunkt genommen, und setzt man ausserdem Schwingungen des Körpers voraus, so kann seine Wärme (eigentlich seine Wirkung auf benachbarte Körper, aus der wir aber auf die Wärme zurückschliessen) nur abhängig sein von der Geschwindigkeit V, mit welcher das Atom die Gleichgewichtslage passirt, von der Quantität m seiner trägen Substanz und von der Zahl c der Stösse, die in der Zeiteinheit gemacht werden. Bezeichnet also W die Wärmemenge, so ist

$$W = f(V, m, c). \tag{28}$$

Welcher Art diese Function sei, lässt sich meines Erachtens *a priori* nicht angeben, man muss dieselbe suchen, indem man geeignet scheinende Voraussetzungen macht, und dann die Resultate mit denen der Beobachtung vergleicht. Wäre die gesuchte Function eine sehr complicirte, so würden wir wohl wenig Aussicht haben, sie aufzufinden; doch sind glücklicherweise alle Vorgänge in der Natur auf ganz einfache Gesetze zurückzuführen, und unter diesen ist im vorliegenden Falle die Wahl nicht gross.

Was zunächst die Grösse c anbelangt, so kann die Wirkung eines schwingenden Körpers nach aussen nicht wohl etwas Anderes sein, als ein der Grösse c proportionales Product, andererseits sind m und V derartig mit einander verbunden, dass für verschiedene Körper, aber für die nämliche Temperatur das Product mV dasselbe ist, und so hat man eigentlich nur mit einer Function der Bewegungsgrösse mV zu thun. Es wird also

$$W = cf(mV). \tag{29}$$

In meinen Moleculargesetzen habe ich $f(mV) = mV$ gesetzt. Es ist also die Wärme gleich cmV. Obwohl ich, wie später gezeigt werden soll, dies nicht ohne Grund gethan habe, so habe ich doch in neuerer Zeit mich veranlasst gesehen, davon abzugehen und die zweite Potenz von mV zu versuchen, und ich glaube in der That Resultate erzielt zu haben, die den Beobachtungen besser entsprechen. Sind also in einer gegebenen Quantität



Gas allenfalls in der Gewichtseinheit q Massentheilchen und s Aethertheilchen, so ist die Wärmemenge des Gases

30) $$W = (q+s)\, c\, m^2 V^2.$$

Nach Gleichung 14) ist, wenn die Glieder von untergeordneter Bedeutung ausser Acht gelassen werden, die (ganze) Schwingungszeit eines Theilchens ausgedrückt durch

31) $$t = 2\pi \sqrt{\frac{r^{n+1}}{2bn}},$$

und die Zahl der in der Zeiteinheit ausgeführten Schwingungen ist

$$\frac{\alpha}{2\pi}\sqrt{\frac{2bn}{r^{n+1}}},$$

wenn α eine Constante bedeutet. Dadurch wird

32) $$W = \frac{\alpha}{2\pi}(q+s)\, m^2 V^2 \sqrt{\frac{2bn}{r^{n+1}}},$$
$$= \beta\,(q+s)\, m^2 V^2 r^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

wenn man die constanten Grössen $\frac{\alpha}{2\pi}\sqrt{2bn}$ durch β ersetzt.

Wird das Gas ohne Ausdehnung erwärmt, so dass seine Wärmemenge auf $W + \Delta W$ steigt, so muss die Geschwindigkeit V auf $V + \Delta V$ erhöht werden; es ergiebt sich also

33) $$W + \Delta W = \beta (q+s)\, r^{-\frac{n+1}{2}}\, m^2 (V + \Delta V)^2,$$

woraus

34) $$\Delta W = 2\beta\,(q+s)\, r^{-\frac{n+1}{2}}\, m^2 V \Delta V$$

folgt. Aus 27) ergiebt sich

35) $$\Delta\tau = 2k\, m^2 V \Delta V.$$

Ersetzt man in 34) $V\Delta V$ durch $\Delta\tau$, so ergiebt sich

36) $$\Delta W = \frac{\beta}{k}(q+s)\, r^{-\frac{n+1}{2}}\, \Delta\tau.$$

Die Wärmezunahme ist also der Temperaturzunahme proportional. Hat man mit der Gewichtseinheit des Gases zu thun, und ist $\Delta\tau = 1^0$, so hat man als specifische Wärme des Gases bei gleichem Volumen

37) $$W_v = \frac{\beta}{k}(q+s)\, r^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Dieser Ausdruck ist von m und τ unabhängig, und es ergiebt sich daraus, dass die specifische Wärme, dasjenige Quantum von Wärme, welches nothwendig ist, um die Temperatur einer gleichen Anzahl von Theilchen um 1^0 zu erhöhen, für alle Gase eine gleiche sei, dass sie aber auch die nämliche bleibe, welche Temperatur das Gas bereits besitzen mag.

Denkt man sich die Gewichtseinheit der Gastheilchen in eine Reihe gestellt, so ist das von ihnen beanspruchte Volumen gleich dem eines Prismas, dessen Querschnitt die Einheit, dessen Länge $(q+s)r$ ist, dessen Rauminhalt also durch $(q+s)r$ ausgedrückt wird. Wächst die Entfernung von r auf $r+\Delta r$, so wird das Volumen $(q+s)\ (r+\Delta r)$, und dadurch wird nach 14) die Schwingungszeit zu $2\pi\sqrt{\frac{(r+\Delta r)^{n+1}}{2bn}}$, die Schwingungszahl geht über in $\beta(r+\Delta r)^{-\frac{n+1}{2}}$, und dadurch wird die Wärme vermindert.

Die nun vorhandene Wärmemenge ist

$$38)\qquad \begin{aligned} W_1 &= \beta\,(q+s)\,(r+\Delta r)^{-\frac{n+1}{2}}\, m^2 V^2, \\ &= \beta\,(q+s)\,r^{-\frac{n+1}{2}}\left(1-\frac{n+1}{2}\,\frac{\Delta r}{r}\right) m^2\, V^2. \end{aligned}$$

Führt man durch Vergrösserung von V die Wärme $\Delta_1 W$ zu, so erhält man

$$39)\qquad W_1+\Delta_1 W = \beta\,(q+s)\,r^{-\frac{n+1}{2}}\left(1-\frac{n+1}{2}\,\frac{\Delta r}{r}\right) m^2 (V+\Delta_1 V)^2.$$

Soll die Temperatur in derselben Weise erhöht werden, wie vorhin, so hat man

$$40)\qquad W_1+\Delta_1 W = W+\Delta W.$$

Es wird also

$$41)\qquad \begin{aligned} &\beta\,(q+s)\,r^{-\frac{n+1}{2}}\left(1-\frac{n+1}{2}\,\frac{\Delta r}{r}\right) m^2\ (V+\Delta_1 V)^2 \\ &\qquad = \beta\,(q+s)\,r^{-\frac{n+1}{2}}\, m^2\,(V+\Delta V)^2 \end{aligned}$$

oder

$$42)\qquad \Delta_1 V = \Delta V + \frac{n+1}{4}\,\frac{\Delta r}{r}\,.\,V.$$

Nach der Erwärmung ist, wenn man diesen Werth von $\Delta_1 V$ in 39) einsetzt, die Gesammtwärme

$$43)\qquad W_1+\Delta_1 W = \beta\,(q+s)\,m^2 r^{-\frac{n+1}{2}}\,(V^2+2V\Delta V),$$

vor der Erwärmung, jedoch nach der Ausdehnung war sie

$$44)\qquad W_1 = \beta\,(q+s)\,m^2 r^{-\frac{n+1}{2}}\left(1-\frac{n+1}{2}\,\frac{\Delta r}{r}\right) V^2,$$

und die Differenz beider Wärmen ist

$$45)\qquad \Delta_1 W = 2\beta\,(q+s)\,m^2 r^{-\frac{n+1}{2}}\left(V\Delta V+\frac{n+1}{4}\,\frac{\Delta r}{r}\,V^2\right).$$

Drückt man nach 27) V und ΔV durch τ und $\Delta\tau$ aus, so hat man

$$46)\qquad \Delta_1 W = \frac{\beta}{k}(q+s)\, r^{-\frac{n+1}{2}}\left(\Delta\tau + \frac{n+1}{2}\,\frac{\tau}{r}\,\Delta r\right).$$

Wird nun noch nach 28) $\frac{\tau}{r}$ durch $\frac{p}{\varepsilon}$ ersetzt, so wird

$$47)\qquad \Delta_1 W = \frac{\beta}{k}(q+s)\, r^{-\frac{n+1}{2}}\left(\Delta\tau + \frac{n+1}{2}\cdot\frac{p}{\varepsilon}\,\Delta r\right).$$

Nimmt man in dieser Gleichung $\Delta\tau = 1^0$, so erhält man die specifische Wärme bei gleichem Drucke:

$$48)\qquad W_d = \frac{\beta}{k}(q+s)\, r^{-\frac{n+1}{2}}\left(1 + \frac{n+1}{2}\,\frac{p}{\varepsilon}\,\Delta r\right).$$

Es ergiebt sich hieraus, dass die specifische Wärme bei gleichem Drucke grösser ist, als diejenige für gleiches Volumen. Es wird demgemäss eine gewisse Quantität von Wärme latent und diese ist

$$49)\qquad W_d - W_v = W_l = \frac{\beta}{\varepsilon k}(q+s)\, r^{-\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n+1}{2}\right) p\,\Delta r.$$

Die verschwundene Wärme ist also dem Producte aus p und Δr, also der geleisteten Arbeit proportional.

Die im Vorstehenden angegebenen Ausdrücke zeigen, dass die Wärme der Summe der Aether- und Massentheilchen proportional sei. Da nun in gleichen Raumtheilen diese Summe die nämliche ist, so würde sich hieraus ergeben, dass die zu einer Temperaturerhöhung von 1° nöthige Wärme unabhängig von dem Luftdrucke und der Art des Gases dem Volumen proportional sei. Dieses widerspricht der Beobachtung insofern, als nach letzterer die zur gleichen Temperaturerhöhung erforderliche Wärme unabhängig von dem Volumen dem Gewichte, also der Zahl der Massentheilchen proportional ist. Die Beobachtung giebt nur die Wärme der Massentheilchen; es ist aber sicher, dass, wenn neben diesen noch Aether in einem gegebenen Raume sich befindet, letzterer nicht ruhig bleiben kann, wenn erstere sich bewegen. Es giebt wohl unter den Theorien, die den Aether überhaupt zugeben, keine, welche nicht annähme, dass in einem verdünnten Gase mehr Aether sei, als in einem dichten von gleichem Gewichte. Muss denn dieser nicht auch Wärme in Anspruch nehmen, wenn das Gas erwärmt wird? Hat der Aether im Vacuum keine Temperatur, oder nimmt er ohne Aufwand von Wärme jede beliebige an? Es würde wohl schwer sein, letztere Frage zu bejahen. Wenn aber Wärme nöthig ist, um diesen Aether zu erwärmen, so wird auch Wärme nothwendig sein, um den Aether, der sich in den Gasen neben den Massentheilchen befindet, zu erwärmen. Die Beobachtungen geben uns über diese Aetherwärme keinen Aufschluss. Ich will mich hier enthalten, über die Ursache dieses Umstandes eine Erklärung zu geben,

ich halte mich aber für berechtigt, einen Unterschied zwischen der wahren und der scheinbaren specifischen Wärme der Gase zu machen. Die wahre specifische Wärme ist diejenige, welche das Gas und sein Aether hat; die scheinbare dagegen ist diejenige ohne den Aether, und letztere ist die der Beobachtungen. In den Gleichungen ist also die wahre specifische Wärme gegeben; setzt man in denselben $s=0$, so erhält man die scheinbare der Beobachtung.

In Gleichung 31) sind die Glieder von untergeordneter Bedeutung aus 14) weggelassen. Ihre Beiziehung würde zu dem Resultate geführt haben, dass die specifischen Wärmen der Gase, sowie ihr gegenseitiges Verhältniss nicht stets dieselben seien, sondern kleinen Schwankungen unterliegen.

Eine weitere Ursache von Verschiedenheiten des genannten Verhältnisses kann in dem Umstande liegen, dass die Annahme, es sei die Grösse m^2V^2 bei der gleichen Temperatur für alle Körper gleich, nicht ganz genau ist. Das thermische Gleichgewicht ist nicht in der Weise zu nehmen, dass die Geschwindigkeit eines die Gleichgewichtslage passirenden Körpers immer die nämliche sei. Es werden ohne Zweifel auch Verschiedenheiten vorkommen, wenn diese auch nicht gross sind, und was für die einzelnen Körper gleich ist, das ist der mittlere Werth von mV. Damit ist jedoch nicht auch der mittlere Werth von m^2V^2 gleich. Es ist allerdings die Annahme berechtigt, dass diese Verschiedenheiten nicht sehr bedeutend sein werden und dass das gegenseitige Verhältniss der Mittelwerthe von m^2V^2 für die verschiedenen Körper ein constantes, von der Einheit wenig abweichendes sein werde; aber auf das gegenseitige Verhältniss der beiden specifischen Wärmen kann dieser Umstand doch einen Einfluss ausüben, und daraus kann die Verschiedenheit der in den Büchern sich findenden Angaben wenigstens zum Theile abgeleitet werden. Diese mit der Annahme, die Wärme sei der Grösse m^2V^2 proportional, verbundene Unsicherheit hat mich veranlasst, in meinen Moleculargesetzen die Wärme als von der ersten Potenz von mV abhängig zu betrachten; doch glaube ich, dass die im Vorstehenden gesetzte Annahme mit den Resultaten der Beobachtung besser harmonire, und ich bin daher zu dieser übergegangen.

Die Leitung der Wärme in den Gasen habe ich bereits in dieser Zeitschrift, dann in meinen Moleculargesetzen besprochen. Ich habe zur Zeit nichts wesentlich Neues zu derselben hinzuzufügen und könnte mich hier darauf beschränken, darauf zu verweisen. Nach reiflicher Ueberlegung habe ich mich entschlossen, die Hauptzüge meiner Darstellung dieses Gegenstandes hier wiederzugeben, um meine gesammte Wärmetheorie beisammen zu haben, und es möge daher diese Wiederholung entschuldigt werden.

Es ist mir bis jetzt nicht gelungen, das allmälige Anwachsen der Oscillationsgeschwindigkeit eines sich erwärmenden Gases durch eine mathematische Formel anzugeben, und ich habe daher zu einer schematischen

Darstellung meine Zuflucht ergriffen. Gestützt auf den Satz, dass die gegenseitige Wirkung zweier sich abstossenden Körper das nämliche Resultat liefert, wie der Stoss absolut elastischer Körper, denke ich mir eine Anzahl von Massentheilchen und Aethertheilchen so in eine Reihe gestellt, dass je ein Massen- und ein Aethertheilchen mit einander abwechseln. Die Quantität materieller Substanz eines Massentheilchens sei 100 die eines Aethertheilchens 1. Die ersteren bezeichne ich durch A, C, E, G, die letzteren durch b, d, f, h. Sind diese Theilchen unter einander im thermischen Gleichgewichte, so müssen ihre Geschwindigkeiten sich umgekehrt wie ihre Grösse verhalten, und wenn also die Reihe

$$\begin{array}{cccccccc} A & b & C & d & E & f & G & h \\ +10 & -1000 & +10 & -1000 & +10 & -1000 & +10 & -1000 \end{array}$$

ihren Bewegungszustand so vorstellt, dass das Zeichen + eine Bewegung von links nach rechts bedeutet, so ist thermisches Gleichgewicht vorhanden, denn wenn A und b zusammenstossen, so erhält A die Geschwindigkeit -10, b bekommt $+1000$, die Bewegungsgrösse bleibt also bei beiden unverändert. In dem nämlichen Momente, sei angenommen, sind C und d zusammengestossen, und das Resultat ist also das nämliche. In einer zweiten Zeit kommen b und C zusammen, und für beide stellt sich die nämliche Bewegung wieder her, die sie vor dem ersten Zusammentreffen hatten. Nimmt man nun noch an, es sei links von A und rechts von h je eine feste Wand, welche die auffallenden Körper reflectirt, so ergiebt sich, dass die einzelnen Theilchen bald links, bald rechts gehen, dass aber auch ihre Bewegungsgrösse immer die gleiche bleibe. Die Massentheilchen wechseln zwischen der Geschwindigkeit $+10$ und -10 und die Aethertheilchen zwischen -1000 und $+1000$.

Es sei nun angenommen, das erste Theilchen A komme an seiner Wand in Berührung mit einer constanten Wärmequelle, welche in der Weise wirkt, dass A dann, wenn es dort reflectirt wird, nicht die Geschwindigkeit hat, mit der es dort ankam, sondern jedesmal mit der Geschwindigkeit 15,00 zurückkommt, dass also seine Bewegungsgrösse zu einem constanten Werthe erhöht wird.

Das Resultat der verschiedenen Stösse findet sich in umstehender Tabelle angegeben.

Die in einer und derselben Zeile stehenden Ziffern stellen die gleichzeitigen Bewegungszustände der einzelnen Theilchen vor. Dasjenige Theilchen, das die + Richtung hat, stösst in dem gegebenen Augenblicke an das nächste rechts von ihm stehende, und das Ergebniss des Stosses steht in der nächstfolgenden Zeile. Die erste Zeile zeigt, dass A mit der Geschwindigkeit 15,000 auf b stösst, dessen Bewegung durch $-1000,0$ ausgedrückt ist. Daraus geht (zweite Zeile) für A $-5,0901$, für b 1009,9 hervor. In dem nämlichen Augenblicke stösst C an d, E an f, G an h. A kehrt hierauf zurück, um sich von neuem die Geschwindigkeit 15,000 zu verschaffen, und während

dieses geschieht, stösst *b* mit der Geschwindigkeit 1009,9 gegen *C* (—10,000), *d* (1000,0) an *E* (—10,000) u. s. w. Hätte *A* die nämliche Bewegungsgrösse wie die andern Atome, so hätte man, wie bereits gezeigt, thermisches Gleichgewicht. Da aber *A* jedesmal wieder die Geschwindigkeit 15,000 erlangt, so oft es von seiner Wand zurückgeworfen wird, so ergeben sich die mit fetteren Ziffern gedruckten, schief abwärts laufenden Zahlen.

Nummer des Stosses.	Geschwindigkeit und Richtung von							
	A.	*b.*	*C.*	*d.*	*E.*	*f.*	*G.*	*h.*
1	**15,000**	−1000,0	10,000	−1000,0	10,000	−1000,0	10,000	−1000,0
	−5,0991	**1009,9**	−10,000	1000,0	−10,000	1000,0	−10,000	1000,0
2	**15,000**	−1009,7	**10,196**	−1000,0	10,000	−1000,0	10,000	−1000,0
	−5,2911	**1019,4**	−9,8080	**1000,4**	−10,000	1000,0	−10,000	1000,0
3	**15,000**	−1018,6	**10,572**	−1000,4	**10,008**	−1000,0	10,000	−1000,0
	−5,4674	**1028,1**	−9,4476	**1001,5**	−9,9920	**1000,0**	−10,000	1000,0
4	**15,000**	−1026,4	**11,098**	−1001,5	**10,038**	−1000,0	**10,000**	−1000,0
	−5,6219	**1035,7**	−8,9534	**1003,7**	−9,9620	**1000,1**	−10,000	**1000,0**
5	**15,000**	−1033,7	**11,733**	−1003,6	**10,111**	−1000,1	**10,002**	−1000,0
	−5,7525	**1042,3**	−8,3724	**1006,9**	−9,8930	**1000,3**	−9,9982	**1000,0**
6	**15,000**	−1038,2	**12,438**	−1006,5	**10,243**	−1000,3	**10,006**	−1000,0
	−5,8554	**1047,3**	−7,7435	**1011,2**	−9,7674	**1000,8**	−9,9940	**1000,0**
7	15,000	−1041,9	**13,149**	−1010,5	**10,451**	−1000,8	**10,022**	−1000,0
	−5,9287	1051,0	−7,1054	**1016,5**	−9,5736	**1001,7**	−9,9781	**1000,0**
8	15,000	−1044,3	13,847	−1015,4	**10,745**	−1001,6	**10,054**	−1000,0
	−5,9763	1053,4	−6,5345	1022,7	−9,2807	**1003,1**	−9,9465	**1000,1**
9	15,000	−1045,4	14,454	−1020,8	11,154	−1003,0	**10,112**	−1000,1
	−5,9980	1054,4	−6,0456	1029,1	−8,9287	1005,2	−9,8921	**1000,3**
(mv)	10499	10499	10250	10250	10041	10041	10002	10002

A stösst an *b* und das Resultat ist beziehungsweise —5,0991 und 1009,9, dann stösst *b* gegen *C*, und es ergiebt sich —1009,7 und 10,196. Bei dem Zusammenstosse von *C* an *d* erhält man —9,8080 und 1000,4; stossen darauf *d* und *E* auf einander, so hat man —1000,4 und 10,008, und wenn hierauf *E* und *f* zusammentreffen, so erhält man für *E* —9,9920, für *f* (bei Anwendung fünfstelliger Logarithmen) 1000,0. Hat man hierauf Zusammenstoss von *f* und *G*, so ist der Erfolg kein anderer, als er wäre, wenn die Bewegung von *A* gar keine Erhöhung erlitten hätte, und der erste Stoss versiegt also, sowie er sich bis *f* fortgepflanzt hat. Während all dieses geschehen ist, hat sich *A* zum zweiten Male die Geschwindigkeit 15,000 geholt und hat zum zweiten Male auf *b* gestossen. Das Resultat ist —5,2911 für *A*, 1019,4 für *b*. Nun wiederholt sich die Reihenfolge von Erscheinungen und der zweite Stoss versiegt bei *G*, der fünfte bei *h* u. s. w. Die Erhöhung der Bewegung geht immer weiter vorwärts, aber stets nur Schritt für Schritt.

Mit dem Vorschreiten der Stosswirkung ist eine Vergrösserung der Bewegung der vorderen Glieder der Reihe verbunden, wie dieses die unterste Zeile (*mv*) der Tabelle zeigt, welche die mittlere Bewegungsgrösse der einzelnen Theilchen für die zwei letzten berechneten Momente angiebt.

Es ist wohl sicher, dass die im Vorstehenden abgeleiteten Vorgänge alle Analogien mit den Erscheinungen zeigen, die zu Tage treten, wenn ein Körper mit einer constanten Wärmequelle in Berührung steht.

Das, was man als Strahlung der Wärme bezeichnet, erklärt sich aus Stössen elastischer Körper von gleicher Quantität der trägen Substanz; was man aber Leitung der Wärme nennt, tritt dann ein, wenn die stossenden Körper verschieden sind. Hängt die durch Wärmeleitung verzögerte Fortpflanzung von der Verschiedenheit der trägen Substanz der stossenden Körper ab, so muss die Leitung um so rascher vor sich gehen, je geringer die vorstehende Verschiedenheit ist, und darum leitet auch der Wasserstoff die Wärme unter allen Gasen am besten.

Ein Gas besteht aus Aethertheilchen, zwischen welche Massenatome da und dort eingestreut sind. Trifft ein Wärmestrahl auf seinem Wege kein Massentheilchen, so geht die Bewegung nach Art der Strahlung weiter; wird aber ein Massentheilchen getroffen, so muss dieses auch in Bewegung gesetzt werden, von ihm geht die Bewegung in Strahlungsform über eine Anzahl von Aethertheilchen, dann wieder auf ein Massenatom u. s. w. Der Wechsel der Atome bedingt Leitung. Gleichheit der Atome hat Strahlung zur Folge. Je grösser die Wahrscheinlichkeit, dass von einem Strahle Massentheilchen getroffen werden, um so mehr wird die ganze Erscheinung den Charakter der Leitung haben und umgekehrt, je weniger dicht das Gas ist, um so vollkommener wird dessen Diathermansie sein.

Es ist selbstverständlich, dass die Richtung der Stösse nicht immer so central ist, wie sie in obigem Schema angenommen wurde; dieses ändert aber in der ganzen Reihenfolge nichts. Man hat nämlich in der Natur nie mit einer einzigen Reihe zu thun, sondern immer mit einer ganzen Menge, und man kann sich dieselben stets so an einander gelagert denken, dass sie ein Bündel bilden. Ist nun in einer Reihe ein Stoss nicht gerade, so lässt sich seine Wirkung in Componirende zerlegen, von denen die eine in der durch das Schema dargestellten Weise wirkt, während die andere auf die benachbarten Reihen Bewegung überträgt. Dieselbe Erscheinung kommt aber auch in den Nachbarreihen vor und es trägt sich Bewegung auf die erste über. Das Endergebniss kann wohl das sein, dass die Wärme sich allseitig fortpflanzt, dass aber eine wesentliche Abweichung von dem oben geschilderten Zusammenhange von Strahlung und Leitung vorkomme, ist nicht anzunehmen.

Die im Vorstehenden für die Gase entwickelten Sätze lassen sich auch auf die tropfbarflüssigen und die festen Körper anwenden; doch ist die Entwickelung der Theorie darum viel schwieriger, weil hier auf die von der Kugelform abweichende Gestalt der Dynamidenkerne Rücksicht genommen werden muss. Dieses ist der Grund, warum die Formeln alsbald ins Riesenhafte wachsen. Es handelt sich in der gegenwärtigen Abhandlung nicht um die Bestimmung von Constanten, sondern nur um die Untersuchung, in welcher Art und Weise die Wärmeerscheinungen in der Natur vor sich gehen mögen, und es möge mir daher gestattet sein, mich im Nachstehenden auf das Nothwendigste zu beschränken, die denkbar einfachsten Fälle auszusuchen.

Wenn man eines der im Vorstehenden besprochenen kleinen Tetraederchen, die aus einem Massenatome und vier Aethertheilchen bestehen, sich im Raume irgendwo gelagert denkt, so setzen sich um dieses herum in einiger Entfernung vier Aethertheilchen so an, dass sie in der Verlängerung der Normalen stehen, die man von dem Mittelpunkte des Tetraederchens auf eine Fläche desselben zieht. Hier befinden sich die Aethertheilchen im Minimum der Abstossung. Es sei nun angenommen, auf der entgegengesetzten Seite eines dieser Aethertheilchen befinde sich ein zweites Tetraeder wieder im Minimum der Abstossung. Die beiden Tetraeder wenden sich die Flächen zu und sind ebenfalls im Minimum der gegenseitigen Abstossung, wenn das eine gegen das andere um 60° um die die beiden verbindende Gerade gedreht ist. Ich habe in meinen Moleculargesetzen gezeigt, dass auf diese Weise ein Tetraederkrystall entstehe, und es soll daher hier davon Umgang genommen werden. Von den ursprünglichen Dynamidenhüllen können noch mehrere Aethertheilchen auch in dem Krystalle zwischen den beiden Elementartetraedern stehen bleiben; doch will ich um der Einfachheit der Formeln willen davon absehen. Jedenfalls ist so viel sicher, dass die vorgenannte Stellung eine Gleichgewichtslage repräsentirt, welche vorkommen kann, und die Frage, ob noch mehrere andere und welche vorkommen können, zu beantworten, würde ausserhalb des Zweckes der gegenwärtigen Schrift stehen.

In einem Tetraederkrystalle befindet sich, durch hexagonale Zwischenräume getrennt, eine grosse Anzahl von solchen Combinationen von Tetraeder, Aethertheilchen und Tetraeder parallel neben einander, und man kann sich nun aus einem grossen Krystalle eine Platte herausgeschnitten denken, deren parallele Flächen die kleinen Tetraederchen enthalten, während die Aethertheilchen in der Mitte zwischen beiden Flächen sind. Von einer solchen Platte nehme ich nun wieder ein Prisma ausgeschnitten, das eine einzige von den vorgenannten Reihen enthält. Es seien nun a, b und c die Constanten für die Einheit der trägen Substanz und der Entfernung für die gegenseitige Wirkung zwischen Massen- und Aetheratomen (Anziehung) für Aether und Aether (Abstossung) und für Massen- und

Massenatom (Abstossung). Alle Kräfte nehmen ab, wie das Quadrat der Entfernung wächst. Ausserdem hat r dieselbe Bedeutung, wie in Gleichung 2). R ist die Entfernung zwischen dem einen Tetraeder und dem Aetherteilchen, und die Distanz der beiden Tetraeder beträgt also $2R$.

Die gegenseitige Wirkung zwischen einem Tetraeder und dem Aetherteilchen ist

$$50)\quad w = am\mu R^{-2} - b\mu^2 [4R^{-2} - \tfrac{80}{9} R^{-5} r^3 + \tfrac{140}{27} R^{-6} r^4 + \ldots].$$

Die Wirkung zwischen den beiden Tetraedern ist

$$51)\quad \begin{aligned} w_1 &= am\mu\left(2R^{-2} - \frac{5}{9}R^{-5}r^3 + \frac{4,375}{27}R^{-6}r^4 + \ldots\right) \\ &\quad - b\mu^2\left(4R^{-2} - \frac{20}{9}R^{-5}r^3 + \frac{7,5}{27}R^{-6}r^4 + \ldots\right) - \frac{cm^2 R^{-2}}{4}. \end{aligned}$$

Die Wirkung, die nun das eine der Tetraeder von den beiden anderen Bestandtheilen der Combination erfährt, ist

$$52)\quad \begin{aligned} W &= am\mu\,(3R^{-2} - 0,556 R^{-5} r^3 + 0,162 R^{-6} r^4 + \ldots) \\ &\quad - b\mu^2 (8R^{-2} - 11,111 R^{-5} r^3 + 5,833 R^{-6} r^4 + \ldots) - 0,25 cm^2 R^{-2}. \end{aligned}$$

Die Constanten a, b und c sind streng genommen von einander unabhängig; doch kann ein Tetraeder nur bestehen — und dieses ist hier vorausgesetzt —, wenn am wenig von dem Werthe $3b\mu$ verschieden ist. Setzt man, es sei die Gleichung 2) genau erfüllt und $\mu = 1$, so ist $am = 3b$. Bezüglich der Grösse c haben wir die Bedingungsgleichung*, dass $\frac{a^2}{b} - c$ (die Schwerewirkung) gegen die Molecularkräfte a, b und c verschwindend klein sein muss. Sieht man von dieser Wirkung ganz ab, so wird $cm^2 = 9b\mu^2 = 9b$. Nach diesen Vereinfachungen wird

$$53)\quad W = -1,25 b R^{-2} + 9,444 b R^{-5} r^3 - 5,347 b R^{-6} r^4 + \ldots.$$

Ich will nun, um mein Verfahren klarer zu machen, zuerst eine Anwendung dieser Gleichung auf die Elasticitätsverhältnisse des Körpers vorführen.

Geht infolge eines Zuges H die Grösse R in $R + \Delta R$ über, so hat man, wenn man bei der zweiten Potenz von ΔR stehen bleibt und den nun constanten Bruch $\frac{r}{R}$ mit α bezeichnet:

$$54)\quad \begin{aligned} W_1 &= -H + bR^{-2}(-1,25 + 9,443\alpha^3 - 5,347\alpha^4 + \ldots) \\ &\quad - bR^{-3}\Delta R\,(-2,5 + 47,222\alpha^3 - 32,082\alpha^4 + \ldots) \\ &\quad + bR^{-4}\Delta R^2\,(-3,75 + 141,67\alpha^3 - 112,29\alpha^4 + \ldots). \end{aligned}$$

H ist in dieser Gleichung ein Zug, der seiner Wirkung nach einer Vergrösserung der Abstossung gleich zu nehmen ist; es kommt also mit dem Zeichen — auf die rechte Seite des Gleichheitszeichens.

---

* Mol.-Ges. 54.



Durch die Vergrösserung von R ist das oben angenommene Prisma gewachsen, und es fragt sich nun, welche Wirkung der Abstossung, die wir in 54) offenbar haben, entgegenzusetzen sei. Diese Wirkung ist der Aetherdruck. Vor der Ausdehnung war bereits ein solcher da, und dieser war überhaupt Ursache, dass die angenommene Combination von zwei Tetraedern und einem Aethertheilchen dem Lehrsatze vom Aetherdruck zufolge bei einander geblieben ist. Bei der Vergrösserung des Prismenvolums ist kein Aether hineingekommen und da mithin der leere Raum gewachsen ist, so ist auch der Aetherdruck grösser geworden, und es fragt sich nun, wie gross ist derselbe jetzt? Der Aetherdruck ist genau so gross, als sei der allgemeine Raum ätherleer, dafür aber in dem Raume, welchen der Körper einnimmt, eine Substanz ebenso vertheilt, wie sonst der Aether im freien Raume, die aber nach dem nämlichen Gesetze, wie dieser, nicht abstösst, sondern anzieht. So sicher dieser Satz ist, so schwer ist es zur Zeit, anzugeben, wie gross diese Anziehung an einem betreffenden Punkte ist, wenn es sich um sehr kleine Räume handelt, in denen die Art der Gruppirung der Aethertheilchen nicht mehr vernachlässigt werden darf, bei denen es nicht mehr genau ist, wenn man die Aethersubstanz als continuirlich über den ganzen Raum ausgebreitet betrachtet.

Wenn übrigens diese Annahme nicht streng richtig ist, so ist sie doch wenigstens für jetzt nicht zu umgehen, und es ist die Abweichung von der Wahrheit nicht sehr gross, wenn ich zunächst annehme, der von dem Körper eingenommene Raum sei gleich dem Volumen eines Prismas oder Cylinders von dem Querschnitte 1 und einer Länge, die ursprünglich $2R$ beträgt und infolge des Zuges in $2(R+\varDelta R)$ übergeht. Es sei ferner angenommen, der Druck finde gegen den Mittelpunkt des Prismas statt und sei dem Quadrate der Entfernung von diesem Mittelpunkte umgekehrt proportional. Ist $\frac{M}{2}$ eine Constante, welche den Aetherdruck für die Einheit des Volumens angiebt, so ist dieser für das Volumen $2R$ gleich MR, und der auf einen in der Entfernung R vom Mittelpunkte gelegenen Punkt thätige Druck ist angegeben durch $\frac{MR}{R^2} = MR^{-1}$. Geht R in $R+\varDelta R$ über, so wird der Druck

$$M(R^{-1} - R^{-2}\varDelta R + R^{-3}\varDelta R^2 \ldots).$$

Zur Bestimmung der Constanten M haben wir die Gleichung 53), denn es giebt W die Abstossung an, welche in der Gleichgewichtslage auf das eine Tetraederchen ausgeübt wird und durch den Aetherdruck MR^{-1} compensirt werden muss. Es ist also

$$MR^{-1} + W = 0 \text{ oder}$$

$$55) \qquad M = 1{,}25\,b\,R^{-1} - 9{,}444\,b\,R^{-4}r^3 + 5{,}347\,b\,R^{-5}r^4 + \ldots.$$

Dieser Werth von M kann nun auch in 54) benützt werden, denn es ist dort W_1 gleich der Abstossung der Theilchen plus der Wirkung des Zuges; es ist also

56) $$M(R^{-1} - R^{-2}\Delta R + R^{-3}\Delta R^2 \ldots) + W_1 = 0.$$

Im Falle des Gleichgewichtes wird

57) $$\begin{aligned} M(R^{-1} - R^{-2}\Delta R + R^{-3}\Delta R^2 + \ldots) = H \\ + b R^{-2}(1{,}25 - 0{,}444\,\alpha^3 + 5{,}347\,\alpha^4 + \ldots) \\ - b R^{-3}\Delta R(2{,}5 - 47{,}222\,\alpha^3 + 32{,}084\,\alpha^4 + \ldots) \\ + b R^{-4}\Delta R^2(3{,}75 - 141{,}67\,\alpha^3 + 112{,}29\,\alpha^4 + \ldots). \end{aligned}$$

Wird also der Werth von M aus 55) eingesetzt, so ergiebt sich, wenn $\Delta R . R^{-1} = x$ genommen wird:

58) $$\begin{aligned} H = (1{,}25 - 37{,}778\,\alpha^3 + 26{,}737\,\alpha^4 + \ldots)\frac{x}{R^2} \\ - (2{,}5 - 132{,}22\,\alpha^3 + 106{,}94\,\alpha^4 + \ldots)\frac{x^2}{R^2}. \end{aligned}$$

Da der Werth von α nicht wohl über 0,25 sein kann, was hier vorausgesetzt sein soll, so sind die Coefficienten von $x R^{-2}$ und $x^2 R^{-2}$ positiv, und nennt man sie der Kürze wegen A und B, so geht 58) über in

59) $$H R^2 = Ax - Bx^2.$$

Diese Gleichung ergiebt zunächst, dass die Zugkraft H, welche die Atome um einen gleichen aliquoten Theil der ursprünglichen Entfernung auseinanderbringt, dem Quadrate der letzteren umgekehrt proportional ist. Andererseits hat man

60) $$x = \frac{R^2 H}{A - Bx}.$$

Die Ausdehnung, die der Körper erfährt, ist der ziehenden Kraft proportional, so lange erstere überhaupt nur klein ist, so lange man also das Product Bx vernachlässigen kann; hat dagegen x einen so grossen Werth, dass diese Vernachlässigung von Bx nicht mehr statthaft ist, so wächst die Ausdehnung rascher als die ziehende Kraft.

Würde man statt des Zuges einen Druck auf den Körper ausüben, so müsste man in 60) für H und x gleichzeitig die Zeichen ändern, weil jetzt eine Compression entsteht; man hätte also

61) $$x = \frac{R^2 H}{A + Bx},$$

welche Gleichung anzeigt, dass die Compression zuerst dem Drucke proportional ist, dann aber langsamer wächst, als dieser.

Bekanntlich erhält man den Elasticitätscoefficienten eines Körpers, wenn man die Kraft berechnet, welche nothwendig wäre, den Körper auf das Doppelte seiner Länge auszustrecken, vorausgesetzt jedoch, dass sämmtliche Ausdehnungen in der nämlichen Weise erfolgen, wie die ersten ganz kleinen. Man hat also, um diesen Werth, den ich mit E bezeichnen will, zu finden, in 60) das Product Bx wegzulassen und dann x gleich 1 zu setzen. Es ergiebt sich also

62) $$E = \frac{A}{R^2}.$$

Der Elasticitätscoefficient ist demnach zu erhalten, wenn man in der Abstossungsformel noch eine Constante einführt. Auf dasselbe Resultat bin ich übrigens schon früher auf andere Weise gekommen.*

Wenn man an einen Körper ein Gewicht anhängt, so dehnt er sich aus und findet dann eine neue Gleichgewichtslage. Wird das angehängte Gewicht vergrössert, so erfolgt eine neue Ausdehnung, und wenn diese auch schneller wächst, als das Gewicht, so ist doch im Ganzen eine grössere Belastung nothwendig, um sie herbeizuführen, als die kleinere vorausgehende Ausdehnung gebraucht hatte. Bei dieser fortgesetzten Belastung muss endlich das Gewicht, welches der Körper auszuhalten hat, einen grössten Werth erreichen, und bei einer etwaigen Vergrösserung der Belastung muss ein Bruch eintreten, denn um eine grössere Ausdehnung zu erhalten, ist keine Zunahme der Belastung nöthig, da das Maximum bereits erreicht ist. Der Körper dehnt sich also fortwährend aus, dabei werden seine Atome mehr und mehr von einander entfernt, und der an den Seiten des Körpers befindliche äussere Aether drängt sich vermöge des allgemeinen Aetherdruckes zwischen die Atome des Körpers, dessen Zusammenhang, der ja nur auf dem Drucke des äusseren Aethers beruhte, da aufgehoben wird, wo der äussere Aether eindringt. Der Körper bricht, und das Brechen eines Körpers ist analog der Abnahme eines evacuirten Recipienten von dem Teller der Luftpumpe. Man bekommt den Werth von x und den entsprechenden von H aus 59). Es wird

$$x = \frac{A}{2B} \text{ und } H = \frac{A^2}{4BR^2}.$$

Würde man in Gleichung 58) $\alpha = 0{,}1$ setzen, so würde der Bruch erfolgen, sobald $x = 0{,}255$ ist; es müsste also der Körper um etwas mehr als ein Viertheil seiner ursprünglichen Länge gestreckt werden. Dieser Werth von x ist bedeutend grösser, als die Beobachtung ihn angiebt; es wäre übrigens, wenn es nothwendig wäre, offenbar keine grosse Kunst, die Constanten a, b, c, α so zu wählen, dass das Maximum von x einen bedeutend kleineren Werth bekäme. Ich unterlasse dieses, weil ich keinen erheblichen Gewinn darin finde, und weil es dann nöthig wäre, noch die seitliche Contraction des in Rede stehenden Prismas in Rechnung zu ziehen. Wird dasselbe nämlich in die Länge gezogen, so wird die von dem Tetraeder der einen Endfläche auf die seitlich von dem andern stehenden Tetraeder ausgeübte Abstossung kleiner und damit auch die seitliche Componirende, welche diese fernhält. Zieht man also das Prisma länger, so wird es dabei dünner, und das Volumen des ätherleeren Raumes wächst daher etwas langsamer, als die Länge. Da nun das Zerbrechen um so eher eintreten muss, je langsamer der Aetherdruck wächst, muss dieser Umstand dazu beitragen, das Maximum der möglichen Dehnung kleiner zu machen.

---

* Mol.-Ges. 28.

Zieht man das oben angenommene Prisma auseinander, und lässt man es dann rasch los, oder drückt man es durch einen raschen Schlag zusammen, so müssen Oscillationen der einzelnen Theilchen um die Gleichgewichtslage entstehen, und insofern die Wärme auf Schwingungen der Körpertheilchen beruht, muss durch diese mechanische Wirkung eine derselben entsprechende Oscillation, also auch eine angemessene Wärmequantität hervorgerufen werden.

Ich habe oben die Constanten a, b, c und α willkürlich gewählt. Man könnte im ersten Augenblicke glauben, dass dadurch die von mir abgeleiteten Resultate sehr prekär würden; doch ist dieses nicht so arg. Es kann das Verhältniss von a und b möglicherweise nicht genau durch die Gleichung $am = 3b\mu$ ausgedrückt werden, ohne dass darum die Bildung eines Tetraeders beeinträchtigt würde, und so lange ein Tetraeder entsteht, werden die Resultate gelten. Bei einer bedeutenden Verkleinerung von m würde eine Hexagonalpyramide, bei einer Vergrösserung ein amorpher Körper zum Vorschein kommen. Dann müsste die oben vorausgesetzte gegenseitige Stellung der einzelnen Körper geändert werden, und die Aufgabe wäre nun wohl eine andere, sie müsste aber nach Aufstellung der neuen Grundgleichungen ebenso behandelt werden, wie das oben bei dem Tetraeder geschehen ist.

Was die Grösse c anbelangt, so ist sie nicht ganz unabhängig, denn wegen der Schwerewirkung muss $\frac{a^2}{b} - c$ eine nahezu verschwindende Grösse sein. Bei sehr kleinen Werthen von $\frac{R}{r}$ würde ein Octaeder entstehen, und man hätte hier wieder eine andere Aufgabe. Wenn also ein Tetraeder als Ausgangspunkt genommen werden soll, so kann der Werth von $\alpha = \frac{r}{R}$ nicht wohl über 0,25 betragen.

In einem Tetraederkrystalle ist stets den vier Flächen gegenüber ein anderes Tetraeder gestellt, und nach der obigen Voraussetzung des möglichst einfachen Falles befindet sich zwischen je zwei Tetraedern ein Aethertheilchen. Entfernt sich nun ein solches Tetraederchen aus seiner Gleichgewichtslage, so befindet es sich innerhalb einer dreiseitigen Pyramide, deren Spitze durch den Punkt der Gleichgewichtslage selbst gebildet wird, während an den anderen drei Ecken drei weitere kleine Tetraederchen liegen, und auf der Mitte jeder Seite ein Aethertheilchen sich befindet. Die Gesammtwirkung, die nun auf das aus seiner Ruhelage entfernte Tetraederchen ausgeübt wird, ist eine solche, vermöge welcher es auf seinen Platz zurückkehrt. Ist es dort angelangt, so geht es vermöge der Trägheit darüber hinaus, kommt aber dabei in eine andere Pyramide und wird end-

lich wieder zum Umkehren gebracht, das Tetraederchen oscillirt. Im Allgemeinen kann die Oscillationsrichtung eine ganz beliebige sein; allein unter dieser Mannichfaltigkeit von Richtungen ist doch eine, welche besondere Berücksichtigung verdient, und diese ist diejenige, bei welcher sich das Tetraederchen in der auf der Basis der Pyramide errichteten Senkrechten bewegt. Diese Richtung ist bekanntlich diejenige, in welcher die absolute Summe der verschiedenen Abstossungen einen kleinsten Werth erreicht, und in der also das schwingende Tetraederchen bleiben muss, wenn es in derselben angelangt ist, während es dahin getrieben wird, wenn es anderweitig schwingt. Es findet hier für seine Bewegung den geringsten Widerstand. Meinem Grundsatze, zunächst mich auf die Betrachtung der einfachsten Fälle zu beschränken, getreu, will ich im Nachstehenden annehmen, dass die Oscillationen nur in der angegebenen Richtung vor sich gehen. Gesetzt, es stehe ein zusammengesetztes Tetraeder, das aus fünf Elementartetraedern (dem inneren und den vier an den Ecken befindlichen) und aus vier Aetherkugeln zusammengesetzt ist, auf einer horizontalen Fläche auf, und das innere Tetraeder schwinge in der Verticallinie, so macht seine Schwingungsrichtung mit der Verbindungslinie von seiner Gleichgewichtslage und einem der unteren Ecktetraeder einen Winkel von $70^{0}\,31'\,46''$. Der Cosinus dieses Winkels ist $\frac{1}{3}$, und ebenso ist die verticale Componirende der Wirkung eines Seitenäthertheilchens oder unteren Ecktetraeders auf das innere $\frac{1}{3}$ der Wirkungderjenigen des obern Aethertheilchens oder Ecktetraeders. Da solcher seitlichen Aethertheilchen oder Ecktetraeder drei sind, so ist die Wirkung aller drei zusammen gerade so gross, als die Wirkung der betreffenden oberen Theilchen, während die horizontalen Componirenden sich aufheben, und für das schwingende innere Tetraeder ist es daher gerade so, als habe man die Reihenfolge:

Tetraeder, Aether, Tetraeder, Aether, Tetraeder,

jedes in Beziehung auf das mittlere Tetraeder in der Stellung der kleinsten Abstossung. Die Abstossung, welche sich dem schwingenden Tetraeder nach aufwärts hemmend in den Weg legt, ist derjenigen gleich, welche es bei dem Abwärtsgehen aufhält. Selbstverständlich sind alle Schwingungen klein genug zu nehmen, dass eine wesentliche Aenderung des Winkels, den die untere Verbindungslinie mit der Verticalen macht, nicht eintritt.

Die auf das mittlere Tetraeder ausgeübte und ebenso die von ihm ausgehende Thätigkeit ist nach 53), wenn man sich auf die zwei ersten Glieder beschränkt:

$$63)\qquad W = -1{,}25\,b\,R^{-2} + 9{,}444\,b\,R^{-5}\,r^{3}.$$

Für die absolute Temperatur τ geht diese Wirkung zufolge 20) und 27) über in

$$64)\quad W_{\tau} = -1{,}25\,b\,R^{-2} + 9{,}444\,b\,R^{-5}\,r^{3} - 0{,}375\,\frac{\tau}{k}\,R^{-1} + 7{,}082\,\frac{\tau}{k}\,R^{-4}\,r^{3}.$$

Wächst die Temperatur um $\Delta\tau$, so nimmt R um ΔR zu, und bleibt man wieder bei der zweiten Potenz von ΔR stehen, so erhält man

$$\begin{aligned} 65)\quad W_{\tau+\Delta\tau} = &- 1{,}25\, b\, R^{-2} + 9{,}444\, b\, R^{-5} r^3 - 0{,}375 \frac{\tau}{k} R^{-1} + 7{,}085 \frac{\tau}{k} R^{-4} r^3 \\ &+ \left(2{,}5\, b\, R^{-3} - 47{,}222\, b\, R^{-6} r^3 + 0{,}375 \frac{\tau}{k} R^{-2} - 28{,}340 \frac{\tau}{k} R^{-5} r^3\right) \Delta R \\ &- \left(3{,}75\, b\, R^{-4} - 141{,}66\, b\, R^{-7} r^3 + 0{,}375 \frac{\tau}{k} R^{-3} - 70{,}850 \frac{\tau}{k} R^{-6} r^3\right) \Delta R^2 \\ &- \left(0{,}375 \frac{R^{-1}}{k} - 7{,}085 \frac{R^{-4} r^3}{k}\right) \Delta\tau. \end{aligned}$$

Der Wirkung W_τ muss der Aetherdruck A_τ Widerstand leisten. Geht W_τ in $W_{\tau+\Delta\tau}$ über, so erfolgt eine Ausdehnung, der wieder ein vergrösserter Aetherdruck $A_{\tau+\Delta\tau}$ entspricht. Die Bestimmung dieses Aetherdruckes lässt sich in ähnlicher Weise durchführen, wie dieses bereits oben geschehen ist, und es muss hier nur bemerkt werden, dass jetzt die Ausdehnung nicht mehr eine lineare, sondern eine räumliche ist, da das Tetraeder nach allen drei Richtungen wächst. Der Druck nimmt wieder dem Volumen entsprechend zu, und nimmt man in Ermangelung eines besseren Satzes wieder an, es sei die Aethersubstanz continuirlich über den ganzen gegebenen Raum verbreitet, und der Druck sei gegen den Mittelpunkt hin gerichtet, sei also gleich einer von diesem ausgehenden Anziehung, so hat man

$$66)\quad A_\tau = \frac{M R^3}{R^2} = M R$$

und

$$67)\quad A_{\tau+\Delta\tau} = M (R + \Delta R).$$

Zur Bestimmung von M hat man die Gleichung

$$68)\quad M R + W_\tau = 0,$$

woraus sich ergiebt

$$69)\quad M = 1{,}25\, b\, R^{-3} - 9{,}444\, b\, R^{-6} r^3 + 0{,}375 \frac{\tau}{k} R^{-2} - 7{,}085 \frac{\tau}{k} R^{-5} r^3.$$

Bei der erhöhten Temperatur muss der verstärkten Abstossung von innen der verstärkte Aetherdruck von aussen das Gleichgewicht halten, und man hat daher

$$70)\quad M (R + \Delta R) + W_{(\tau+\Delta\tau)} = 0.$$

Setzt man aus 65) und 69) die Werthe ein und wird wieder $r R^{-1} = \alpha$ und $R^{-1} \Delta R = x$ genommen, so bekommt man

$$\begin{aligned} 71)\quad &\left(3{,}75\, b - 56{,}67\, b\alpha^3 + 0{,}75 \frac{\tau}{k} - 35{,}07 \frac{\tau}{k} \alpha^3\right) x - \left(3{,}75\, b - 141{,}66\, b\, \alpha^3 + 0{,}375 \frac{\tau}{k} - 70{,}85 \alpha^3 \frac{\tau}{k}\right) x^2 \\ &= \left(\frac{0{,}375}{k} - \frac{7{,}085\, \alpha^3}{k}\right) R\, \Delta\tau. \end{aligned}$$

Da nun wieder $\alpha < 0{,}25$ zu nehmen ist, so sind die in Klammern ein geschlossenen Ausdrücke positiv, und setzt man an ihre Stelle wieder A und B, so wird

$$Ax - Bx^2 = (0{,}375 - 7{,}085\,\alpha^3)\,\frac{R}{k}\,\Delta\tau \tag{72}$$

und

$$x = \frac{(0{,}375 - 7{,}085\,\alpha^3)}{A - Bx}\,\frac{R}{k}\,\Delta\tau, \tag{73}$$

$$x = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - 4B\,(0{,}375 - 7{,}085\,\alpha^3)\,\frac{R}{k}\,\Delta\tau}}{2B}. \tag{74}$$

Ist die Temperaturzunahme $\Delta\tau = 1^0$, so giebt x den linearen Ausdehnungscoefficienten, und derselbe ist, wenn $\Delta\tau$ andere Werthe annimmt, dieser Grösse proportional, so lange Bx gegen A vernachlässigt werden kann; für grössere Werthe von $\Delta\tau$ dagegen ergiebt sich, dass die Zunahme von R rascher vor sich geht, als die von τ. Es hängt jedoch, wie sich aus der sehr vereinfachten Gleichung 71) ergiebt, diese Zunahme der Ausdehnung von einer ganzen Menge von Grössen ab.

Man kann τ als die absolute Temperatur des Nullpunktes irgend einer Scala betrachten. Thut man dieses, so ist x die Aenderung bis zu $\Delta\tau^0$ bezüglich der Grösse bei 0^0. Setzt man in 71) $\tau = 0$, so giebt $\Delta\tau$ die Ausdehnung von dem absoluten Nullpunkte an.

Wie aus der oben vorgeführten Darstellung der Bildung der Dynamiden hervorgeht, ist die Wirkung eines Tetraeders nicht nach allen Richtungen die nämliche, und die oben erwähnten Flächen gleicher Abstossung werden daher auch von der Kugelgestalt abweichen müssen. Wenn sich nun einem angenommenen ersten Tetraeder gegenüber, wenn auch durch ein Aethertheilchen davon getrennt, ein zweites anlagert, so wird dieses zweite gegen das erste nicht jede beliebige Stellung einnehmen können, sondern es muss sich so stellen, dass beide gegenseitig im Minimum der Abstossung sich befinden, und diese Position der kleinsten Abstossung ist (wenn R nicht $< 4r$) diejenige, in welcher die beiden Elementartetraeder einander die Flächen zuweisen, wodurch dann die Bildung eines grösseren Tetraederkrystalles eingeleitet ist. Dreht man zwei der kleinen Tetraederchen gegen einander, so werden sie, da sie dadurch aus der Lage der kleinsten Abstossung herausgebracht werden, dieser Drehung einen Widerstand leisten, und dieser Widerstand ist das, was man im gewöhnlichen Leben mit dem Worte Härte bezeichnet. Diese Härte kann nur von dem Verhältnisse von $\frac{r}{R}$ [Gleich. 50), 51), 52)] abhängen, und sie wird darum, da r constant, R veränderlich ist, abnehmen, wenn R wächst. Wenn also durch Temperaturerhöhung die Entfernung zwischen zwei Tetraedern wächst, nimmt die Macht derjenigen Thätigkeit, die den Tetraedern ihre speciellen

Stellungen anweist, ab, und darum werden die Körper bei zunehmender Temperatur weicher. Der Wirkung der Tetraeder, die eine gegenseitige Abstossung ist, entgegen ist der Aetherdruck thätig. Sein Bestreben ist die Herstellung der Kugelform des eingeschlossenen Körpers, und seine Macht wächst mit dem Radius der Kugel. Wenn nun die Härte mit zunehmendem R abnimmt, die auf die Kugelform hinarbeitende Aetherwirkung wächst, so muss man endlich zu einem Punkte kommen, wo beide gleich sind, und bei dessen Ueberschreitung die Gestalt eintreten muss, die der Aetherdruck erheischt. Unser Körper geht also von dem Tetraeder in die Kugelform über, es bildet sich ein Tropfen. Für grössere Massen ist noch eine weitere Kraft zu berücksichtigen, und diese ist die Schwerewirkung der Erde, welche wieder die Kugelform modificirt und eine horizontale Oberfläche herstellt. Früher glaubte ich, diese Kraft sei wenn nicht allein, doch in erster Stelle für die Aenderung des festen Aggregatzustandes in den flüssigen massgebend, doch bin ich von dieser Ansicht abgekommen, weil bei ihrer Annahme die Tropfenform unerklärt bleibt. Die Tropfenform macht sich aber früher geltend, als die Horizontalfläche, erhält sich derselben entgegen (Quecksilber) und darum muss der sie bewirkenden Ursache der Vortritt eingeräumt werden. Der feste Aggregatzustand der Körper unterscheidet sich also von dem flüssigen dadurch, dass bei dem ersteren diejenige Kraft überwiegt, vermöge welcher den einzelnen Moleculen (in unserem Falle Tetraedern) ein bestimmter Platz angewiesen wird, was bei den letzteren nicht der Fall ist.

Bei den Gasen ist eine Gleichgewichtslage überhaupt nicht mehr da, die Molecule entfernen sich von einander und jedes versieht sich mit Aetherhüllen, wodurch der Werth $\frac{r}{R}$ so klein wird, dass man ihn als verschwindend betrachten kann.

Unter der Annahme, dass die durch die Wärme veranlasste Ausdehnung des durch 74) ausgedrückten Körpers stets so klein sei, dass man diejenigen Potenzen von x, welche die zweite übersteigen, vernachlässigen kann, lässt sich auch die Temperatur bestimmen, bei welcher der Körper seinen Aggregatzustand verändern muss. Wenn nämlich $\Delta\tau$ immer grösser wird, so muss es endlich einmal dahin kommen, dass [Gleich. 74)]

$$75)\qquad 4\,B\,(0{,}375 - 7{,}085\,\alpha^3)\,\frac{R}{k}\,\Delta\tau = A^2$$

wird, und sobald dieser Werth von $\Delta\tau$ überschritten ist, wird in 74) der Wurzelausdruck imaginär und das Tetraeder kann als solches nicht weiter bestehen; entweder kommt eine andere Gleichgewichtslage (veränderte Krystallform, Uebergang in einen amorphen Körper), oder es entsteht eine Aggregatzustandsänderung im gewöhnlichen Sinne des Wortes.

Das Vorstehende gilt zunächst, um das Princip anzugeben, auf dem die Molecularänderung eines Körpers beruht. Ausserdem wäre es nicht zu

rechtfertigen, gerade bis zur zweiten Potenz von x zu gehen und dabei stehen zu bleiben. In Wahrheit ist die Gleichung 72) eine Gleichung vom n^{ten} Grade, wenn n so gross ist, dass das mit x^{n+1} multiplicirte Glied auf die Grösse von x keinen bemerkbaren Einfluss mehr hat, was im Allgemeinen wohl ziemlich bald geschehen mag, da x stets ein kleiner echter Bruch ist. Es giebt nun für die verschiedenen Körper je eine derartige Gleichung und durch Aufsuchen ihrer Wurzeln bekommt man die jeweiligen Ausdehnungen. Um einen klareren Blick in diese Verhältnisse zu erzielen, habe ich willkürlich eine Gleichung vom vierten Grade vorgenommen und die Werthe gesucht, welche x bekommt, wenn man das von x freie Glied ändert. Diese Gleichung ist

76) $$x^4 - 0{,}2x^3 - 0{,}08x^2 + 0{,}018x - \alpha\Delta\tau = 0;$$

sie ist vollständig willkürlich gewählt, kann aber ganz gut die Gleichung irgend eines der unendlich vielen Naturkörper sein oder ihr nahe kommen, und mag einstweilen die übrigen repräsentiren.

Setzt man in dieser Gleichung für $\alpha\Delta\tau$ nach und nach die Werthe 0, 0,0001, 0,0002 u. s. w. und bezeichnet man die einzelnen Wurzeln mit x_1, x_2, x_3, x_4, so bekommt man für dieselben nachstehende Werthe:

$\alpha\Delta\tau$	x_1	x_2	x_3	x_4
0,0000	0,0000	−0,2899	imag.	imag.
0,0001	0,0057	−0,2912	„	„
0,0002	0,0117	−0,2923	„	„
0,000266	0,0160	−0,2931	0,2386	0,2386
0,0003	0,0182	−0,2935	0,2206	0,2547
0,0004	0,0252	−0,2946	0,1999	0,2695
0,0005	0,0329	−0,2957	0,1846	0,2782
0,0006	0,0417	−0,2968	0,1701	0,2850
0,0007	0,0521	−0,2979	0,1551	0,2907
0,0008	0,0658	−0,2990	0,1375	0,2956
0,0009	0,1000	−0,3000	0,1000	0,3000
0,0010	imag.	−0,3010	imag.	0,3040
0,0011	„	−0,3021	„	0,3076
0,0012	„	−0,3031	„	0,3110

Angenommen, die Gleichung 76) sei wirklich die der Gleichung 71) entsprechende Ausdehnungsgleichung eines Körpers, so ergiebt sich daraus Folgendes.

Von $\alpha\Delta\tau = 0$ bis $\alpha\Delta\tau = 0{,}0001$ beträgt die lineare Ausdehnung 0,0057, wie sie durch den Werth x_1 angegeben ist; denn man kann keinen Augenblick zweifeln, dass hier x_1 genommen werden muss, denn die Werthe von x_2 sind sämmtlich negativ, können also der Natur der Aufgabe nach keine Anwendung finden, während x_3 und x_4 imaginär sind. Wächst $\alpha\Delta\tau$ weiter, so

nimmt auch x_1 stetig zu, und seine Zunahme ist dem Anwachsen von $\alpha \Delta \tau$ nahezu, aber nicht ganz proportional; denn bei x_1 geht die Vergrösserung etwas rascher. Wenn $\alpha \Delta \tau$ den Werth 0,000266 erreicht hat, so hören x_3 und x_4 auf, imaginär zu sein; der Körper wird aber die ihnen entsprechende Ausdehnung nicht annehmen, da er sich bereits in einer Gleichgewichtslage (x_1) befindet und er nach x_3 oder x_4 nur über eine Nichtgleichgewichtslage gelangen könnte. Auch bei höherer Temperatur wird aus demselben Grunde der Körper bei x_1 bleiben. So geht es fort bis $\alpha \Delta \tau = 0{,}0008$. Von da an beobachtet man ein sehr rasches Wachsen von x_1, denn während dieses von $\alpha \Delta \tau = 0{,}0007$ bis $\alpha \Delta \tau = 0{,}0008$ nur von 0,0521 bis 0,0658, also um 0,0137 zugenommen hat, steigt es von $\alpha \Delta \tau = 0{,}0008$ bis $\alpha \Delta \tau = 0{,}0009$, bis 0,1000, also um 0,0342 oder beinahe das Dreifache für das nämliche Temperaturintervall. Das ist doch wohl ein Vorgang, welcher dem Verhalten, das viele Körper vor der Aenderung ihres Aggregatzustandes zeigen, sehr ähnlich sieht.

Hat $\alpha \Delta \tau$ den Werth 0,0009, so ist $x_1 = 0{,}1000$ geworden und hat damit seine äusserste Grenze erreicht, denn steigt $\alpha \Delta \tau$ noch weiter, so wird x_1 imaginär, die Atome entfernen sich also von einander, und treffen sie auf ihrem Wege keine neue Gleichgewichtslage, so entsteht ein Gas. In unserem Falle befindet sich aber eine solche zweite Gleichgewichtslage in x_4 und hat bei $\alpha \Delta \tau = 0{,}0009$ den Werth 0,3000. Die lineare Ausdehnung springt also plötzlich auf das Dreifache, es tritt eine Aggregatzustandsänderung ein. Die weitere Ausdehnung bei noch mehr steigender Temperatur geht nun in der einzigen noch vorhandenen Lage der x_4 vor sich, die Ausdehnung ist der Temperaturerhöhung nahe, aber nicht ganz proportional, denn sie ist etwas langsamer. Es lässt sich nicht sagen, ob dieses Verhalten ein allgemeines sei, denn die mir zur Verfügung stehenden Quellen sind auffällig arm an einschlägigen Beobachtungen der Ausdehnungscoefficienten von Flüssigkeiten in der Nähe des Schmelzpunktes. Das Wasser dehnt sich in der Nähe des Schmelzpunktes nicht nur nicht aus, sondern zieht sich zusammen. Das Olivenöl dehnt sich etwas langsam aus, als die Temperatur wächst.

Wenn man den Körper, der vorhin als von $\alpha \Delta \tau = 0$ bis $\alpha \Delta \tau > 0{,}0009$ erwärmt angenommen wurde, wieder abkühlen lässt, so befindet er sich bei 0,0009 in der Gleichgewichtslage x_4. Zwischen x_4 und x_1 sind nur solche Ausdehnungen, die keine Gleichgewichtslage sind, und wenn bei unveränderter Temperatur auch eine Compression von x_4 gegen x_1 stattfinden sollte, so stellt sich doch innerhalb gewisser Grenzen x_4 wieder her. Es beruht hierauf die sogenannte Surfusion, vermöge deren wohl Wasser unter 0°, aber nicht Eis über 0° möglich ist. Der Zustand x_4 kann bestehen bis $\alpha \Delta t = 0{,}000266$ und jenseits dieser Grenze ist er unmöglich. Zwischen $\alpha \Delta \tau = 0{,}000266$ und $\alpha \Delta \tau = 0{,}0009$ kann wohl ein plötzlicher Uebergang aus dem x_4-Zustand in den x_1-Zustand stattfinden, kaum aber ein solcher in

umgekehrtem Sinne, denn der erstere Umschlag wird durch den Aetherdruck begünstigt, letzterer gehindert.

Bekommt $\alpha \Delta \tau$ nach und nach höhere Werthe, so wächst x_4 fortwährend, und diese Wurzel wird nicht imaginär, welch hohen Werth $\alpha \Delta \tau$ auch bekommen mag. Der durch die Gleichung 76) angegebene Körper ist daher nicht flüchtig; ein flüchtiger Körper muss eine Gleichung haben, in der zuletzt alle Wurzeln imaginär werden, oder es muss diejenige Wurzel, in der der Körper fortgeführt wurde, dann, wenn sie imaginär wird, einen grösseren Werth haben, als die noch vorhandenen reellen, denn wenn die Atome infolge des Imaginärwerdens die gegebene Wurzel verlassen, entfernen sie sich von einander und müssen auf ihrem Wege nach auswärts einen neuen reellen Werth von x finden, bei dem sie gewissermassen aufgefangen werden. Werden sie nicht aufgefangen, so entsteht mit Ueberspringung eines Aggregatzustandes ein Gas, wie wir das z. B. bei dem Eise haben, das die Wasserform überspringend, unmittelbar die Luftform annehmen kann.

Wenn bei einem Körper der Uebergang von x_1 auf x_4 stattfindet, so kann nicht unbedingt gesagt werden, dass der Körper geschmolzen sei, denn er kann möglicherweise in mehreren festen oder flüssigen Zuständen vorkommen. So hat der Phosphor streng genommen vier Aggregatzustände, zwei feste, einen tropfbarflüssigen und einen luftförmigen. Der Schwefel kommt gar in sechs Zuständen vor, drei (α, β und γ Schwefel) festen, zwei tropfbarflüssigen und einem luftförmigen.

Die im Vorstehenden entwickelte Erklärung der Aggregatzustandsveränderung ist übrigens nicht die einzig mögliche; es können auch Aenderungen der der Gleichung 72) entsprechenden Fundamentalgleichung vorkommen. Ein Beispiel dürfte dieses klarer machen. Nimmt man ein Elementartetraeder, wie dieses im Vorstehenden vorausgesetzt wurde, an, so ist bei kleinen Werthen von $\frac{R}{r}$ die Gleichgewichtslage der kleinsten Abstossung nicht mehr diejenige, bei der zwei Tetraederchen sich die Flächen zukehren, sondern diejenige, bei welcher sich zwei Kanten so zugewendet sind, dass die sich gegenüberstehenden Kanten gegen einander 90^0 um die sie verbindende Gerade gedreht sind. In diesem Falle entsteht durch Verbindung einer grossen Menge von Tetraedern nicht ein Tetraederkrystall, sondern ein Octaeder. Ich hätte nun diese Stellung voraussetzen und im Vorstehenden ebenso zu Grunde legen können, wie ich dieses bei dem Tetraeder gethan habe, und die Resultate wären (allerdings mit einiger Veränderung der Ziffern im Wesentlichen) die nämlichen geblieben; doch habe ich dieses aus dem Grunde nicht gethan, weil ich bei Zugrundelegung des Octaeders, also des grösseren $\frac{r}{R}$, in sämmtlichen Formeln noch höhere Potenzen von $\frac{r}{R}$, also mehr Glieder hätte berücksichtigen müssen, als dieses

bei dem Tetraeder nöthig war, was dann die Formeln mehr als nothwendig vergrössert hätte. Ich will nun setzen, es sei die Rechnung für das Octaeder durchgeführt, und man sei auf die 72) oder 76) analoge Gleichung gekommen. In diesem Falle wird man durch allmälige Vergrösserung von $\Delta\tau$ grössere und grössere Werthe von x bekommen, und endlich gelangt man an eine Grenze, jenseits welcher x imaginär wird. Nun kann das Octaeder nicht mehr bestehen, die Atome entfernen sich also von einander, und in grösserer gegenseitiger Entfernung finden sie eine neue Gleichgewichtslage, diejenige, welche durch 72) angegeben ist. Es ergiebt sich, dass das Ueberspringen von einer Gleichung zu der andern analog ist dem oben angenommenen Ueberspringen von einem x auf das andere. Im Uebrigen muss dieselbe Reihenfolge von Erscheinungen auftreten, und es kann sich die Aenderung der Gleichung möglicherweise öfter, je nach der Zahl der Aggregatzustände, wiederholen. Ich muss jedoch hierbei bemerken, dass bei den Aggregatzustandsänderungen auch Aenderungen des Aethergehaltes vorkommen können, was dann natürlich wieder in der Ausdehnungsgleichung berücksichtigt werden müsste; doch behalte ich mir vor, hierüber am Schlusse noch Einiges nachzutragen.

Es wurde oben [Gleich. 14)] gezeigt, dass die Schwingungszeit, die ein Körper nöthig hat, von der Entfernung des reflectirenden Gegenstandes abhängig ist. Hat der durch Gleich. 76) ausgedrückte Körper sich durch die Erhöhung der Temperatur $\alpha\Delta\tau = 0$ bis $\alpha\Delta\tau = 0{,}0009$ von R auf $R.1{,}1$ ausgedehnt, so ist auch die Schwingungszeit eine andere geworden. Ist ε eine constante Zahl, so ist unter Weglassung der Glieder von untergeordneter Bedeutung nach 14) und 31) die Schwingungszahl für $\alpha\Delta\tau = 0$ ausgedrückt durch

77) $$z = \varepsilon \sqrt{\frac{5b}{R^3}},$$

wenn man nach 53) 2 statt n und $1{,}25b$ statt b setzt. Bei der Temperatur $\alpha\Delta\tau = 0{,}0009$ und der Ausdehnung $R.1{,}1$ ist

78) $$Z_1 = \varepsilon \sqrt{\frac{5b}{1{,}1^3\, R^3}}.$$

Hätte sich der Körper nicht ausgedehnt, so wäre die Wärme eines Atomes für die Temperatur 0,0009, wenn die constante Grösse $\varepsilon\sqrt{\frac{5b}{R^3}}$ durch s ausgedrückt wird:

80) $$W = s m^2 V^2;$$

hat er sich aber ausgedehnt, so ist zu setzen

81) $$W_1 = s m^2 (V + \Delta V)^2\, 1{,}1^{-3/2}.$$

Sind nun, wie angenommen, beide Temperaturen gleich, also $W = W_1$, so ist

$$s m^2 V^2 = s m^2 (V + \Delta V)^2\, 1{,}1^{-3/2},$$

82) $$\Delta V = 0{,}0768\, V,$$

und der auf Ausdehnung verwendete Wärmeantheil beträgt

83) $$\begin{aligned} W_l &= s\, m^2 \left[(V + \Delta V)^2 - V^2\right], \\ &= s\, m^2\, V^2 \,.\, 0{,}1537. \end{aligned}$$

Diese latent gewordene Wärme ist verwendet worden auf Ueberwindung des äusseren Aetherdruckes, und ist das, was man auch innere Arbeit nennt. Hätte der Körper ausser diesem Aetherdrucke noch einen andern zu überwinden, hätte er auch äussere Arbeit zu leisten, so müsste dieses in Gleichung 70) berücksichtigt werden, und wäre N dieser äussere Druck, der selbstverständlich wieder eine Function von R sein kann, so würde 70) sich umwandeln in

84) $$N + M(R + \Delta R) + W_\tau + J_\tau = 0,$$

und dieses hätte dann wieder auf die Gleichungen 71) bis 76) seinen Einfluss.

Tritt in unserem Körper bei $\alpha \Delta \tau = 0{,}0009$ eine Aenderung des Aggregatzustandes ein, und erhöht sich also der Werth von R plötzlich von $R.1{,}1$ auf $R.1{,}3$, so muss wieder Wärme latent werden, und dieses geschieht jetzt in erhöhtem Grade. Ist V_1 die der Ausdehnung $R.1{,}1$ entsprechende Geschwindigkeit, V_2 diejenige, welche bei $R.1{,}3$ stattfindet, so ist für die nämliche Temperatur

$$s m^2 V_1^2 .\, 1{,}1^{-1/2} = s m^2 V_2^2 .\, 1{,}3^{-1/2},$$

85) $$V_2 = 1{,}1335\, V_1,$$

86) $$W_l = s m^2\, V_1^2 .\, 0{,}2847.$$

Legt man den von mir oben angenommenen Bau eines Tetraeders zu Grunde und setzt die Entfernung zwischen einem Elementartetraeder und dem nächsten Aetherthéilchen gleich r, so ist, wenn der Krystall auf eine Fläche gelegt wird und seine Höhe $\frac{8}{3} n r$ ist, die Zahl der Aetherthéilchen gegeben durch

$$4\left(1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1.2}\right) = \frac{4n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Die Zahl der Elementartetraeder ist

$$\left(1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1.2}\right) + \left(1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{1.2.3}.$$

Da nach unserer Voraussetzung $a m = 3 b \mu$ ist, ein Elementartetraeder also drei Aetherthéilchen neutralisirt, ist es, insoweit es sich um die Wirkung auf grössere Entfernungen handelt, gerade so, als sei an der Stelle eines Elementartetraeders ein Aetherthéilchen. Für die Wirkung nach aussen haben wir also als Aetherzahl

87) $$z = \frac{6n^3 + 21n^2 + 25n + 6}{6}.$$

Das Volumen des entsprechenden Tetraederkrystalles ist

88) $$v = \frac{64 n^3 r^3}{9\sqrt{3}},$$

und die Aetherdichtigkeit

89) $$\delta = \frac{z}{v} = \frac{(6n^3 + 21n^2 + 25n + 6)}{6.64\, n^3 r^3} 9\sqrt{3}.$$

Die Vertheilung der Aetherkugeln im allgemeinen Raume, die zu kennen hier von Interesse wäre, wissen wir, wie bereits erwähnt, nicht; doch kommt ihr diejenige jedenfalls sehr nahe, welche man an der drei- oder vierseitigen Kugelpyramide erhält. Legen wir diese Gruppirung für die Aethertheilchen des allgemeinen Raumes zu Grunde, so ist für eine quadratische Kugelpyramide von n Schichten

90) $$Z = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$$

und das Volumen, wenn R den Abstand zweier Kugelmittelpunkte bedeutet:

91) $$V = \frac{n^3 R^3}{3\sqrt{2}} \text{ und } \Delta = \frac{Z}{V} = \frac{(2n^3 + 7n^2 + 7n + 2)\sqrt{2}}{2n^3 R^3}.$$

Bedeutet n eine sehr grosse Zahl, so erhält man

92) $$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{9\sqrt{3}\, R^3}{64\sqrt{2}\, r^3}.$$

Denkt man sich nun aus einem Tetraederkrystalle eine im Verhältniss zu den Moleculardistanzen sehr grosse Kugel ausgeschnitten, so ist ihre Wirkung nach aussen, wenn man von den höheren Potenzen von $\frac{r}{R}$ absieht, die eines ätherverdünnten Raumes, so lange $\delta < \Delta$, und infolge des äussern Aetherdruckes erfolgt also eine Compression des Tetraeders, bis im Tetraeder ebensoviele nicht neutralisirte Aethertheilchen sind, als in einem gleichen Volumen des allgemeinen Raumes. Die Distanz zwischen einem Elementartetraeder und dem zwischen je zwei derselben eingeschlossenen Aethertheilchen ist demzufolge kleiner, als die Entfernung zweier Aethertheilchen im allgemeinen Raume, und es ist

93) $$R = r\sqrt[3]{\frac{64\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}} = 1{,}7320 r.$$

Bei dem Tetraeder ist, wie bereits oben erwähnt, die Richtung, in welcher das schwingende Elementartetraeder den geringsten Widerstand erfährt, die Verbindungslinie zweier Tetraederchen und deren Fortsetzung. Da bei dem Aether des allgemeinen Raumes die Gruppirung sich nicht genau angeben lässt, so kann selbstverständlich auch die Richtung des kleinsten Widerstandes nicht bestimmt werden. Unter der Voraussetzung, dass auch hier die Verbindungsrichtung zweier Theilchen genommen werden müsse, hätte man analog der Gleichung 85) in dem Falle, dass bei einer

Verdampfung des Tetraeders der Werth von R den Sprung von 1,1 auf 1,7320 macht:

$$s m^2 V_1^2\, 1{,}1^{-2/3} = s m^2 V_2^2\, 1{,}7320^{-2/3},$$

$$V_2 = 1{,}4056\, V_1,$$

$$W_l = s m^2 V_1^2 \,.\, 0{,}9758. \tag{94}$$

Es wird also fast ebensoviel Wärme verwendet, um den Aggregatzustand zu verändern, um innere Arbeit zu verrichten, als zur Erhöhung der fühlbaren Temperatur.

Ich habe wohl kaum nothwendig, zu bemerken, dass, wenn die Aggregatzustandsänderung im umgekehrten Sinne vor sich geht, ebensoviel Wärme frei werden muss, als andererseits gebunden wird.

Die chemische Wärme lässt sich ebenso auf eine Verkleinerung der Moleculardistanzen zurückführen.

Wie der vorerwähnte Fall mit dem Tetraeder zeigt, lässt sich aus dem äusseren Volumen wohl etwa auf die mittlere Dichtigkeit einer Substanz schliessen, aber von dieser kann die gegenseitige Entfernung der einzelnen Theilchen sehr verschieden sein. Das, was, wie oben gezeigt, bei dem Tetraeder eintritt, kommt in höherem oder niedrigerem Grade bei sämmtlichen festen oder tropfbarflüssigen Körpern vor, denn ihre Existenz beruht nur darauf, dass die einzelnen Theilchen nicht so gruppirt sind, dass die möglich kleinste Action eintritt, wie dieses bei den Aethertheilchen des allgemeinen Raumes der Fall ist, und die Cohäsion der Körper ist eine durchaus von dem äusseren Aetherdrucke abhängige Erscheinung. Ohne diesen würden die einzelnen Molecule sich gegenseitig abstossen, und das Auseinanderreissen eines Körpers ist ein Vorgang, der, wie bereits erwähnt, durchaus analog ist dem Abheben eines ausgepumpten Recipienten von dem Teller der Luftpumpe.

Bezüglich der specifischen Wärme der festen und tropfbarflüssigen Körper will ich hier nur anführen, dass die Gleichungen 37), 48) und 49) sich unmittelbar auch auf sie anwenden lassen. Die specifische Wärme ist zunächst der Anzahl der zu erwärmenden Atome proportional. Die specifische Wärme bei gleichem Drucke ist etwas grösser, als diejenige bei gleichem Volum. Erstere ist diejenige, welche die Beobachtungen geben, und sie wächst mit steigender Temperatur etwas, weil sie von der Ausdehnung abhängt und diese bei steigender Temperatur nach 73) zunimmt. Die specifische Wärme ist von der Quantität der trägen Substanz eines schwingenden Atomes unabhängig, ist also für die Gewichtseinheit dem Atomgewichte im Allgemeinen umgekehrt proportional; doch kommt dabei noch eine weitere Grösse in Betracht und diese ist das r. Wird die Moleculardistanz kleiner, so wächst die specifische Wärme. Analog zusammengesetzte chemische Verbindungen haben nahezu die gleiche specifische Atomwärme und dieses lässt darauf schliessen, dass auch die Moleculardistanzen nahezu den gleichen Werth haben. Die Analogie der Zusammensetzung erstreckt sich

jedoch auch auf die Aethertheilchen, die in die Verbindung eingegangen sind, denn bei den festen und tropfbarflüssigen Körpern haben wir nicht, wie bei den Gasen, freie Aethertheilchen, zwischen welche die Dynamiden eingestreut sind, sondern die Aethertheilchen bilden integrirende Bestandtheile des Körpers, und ich glaube darum nicht, dass es zulässig ist, die Grösse s in 37) und 48) zu vernachlässigen; ich halte daher dafür, dass die specifische Wärme, welche die Beobachtungen bei festen und tropfbarflüssigen Körpern geben, die wahre sei.

Ich habe im Vorstehenden gezeigt, dass sämmtliche Wärmeerscheinungen sich auf ganz einfache Weise aus Oscillationen ableiten lassen. Das Tetraeder, das ich als Ausgangspunkt genommen habe, ist ein möglicher Körper, der bei vollständiger Ruhe seiner Theilchen sich in der stabilen Gleichgewichtslage befindet und unter Annahme von Oscillationen ein vollständiges Analogon zu dem Verhalten bietet, welches die Naturkörper bei der Erwärmung zeigen. Damit soll aber nicht gesagt sein, dass in der Natur ein Körper von so einfacher Zusammensetzung vorkomme, denn ich habe mich auf die Betrachtung des denkbar einfachsten Falles beschränkt, weil, so lange uns die Zusammensetzung der Naturkörper sammt und sonders unbekannt ist, eine andere Annahme nur weitläufigere Formeln geboten hätte, ohne mehr zu leisten. Ich bin hierbei von dem Gedanken ausgegangen, dass man durch Nachbildung der Erscheinungen am ehesten den Weg inne werden kann, den die Natur in Wirklichkeit eingeschlagen hat.

Die Naturkörper können sowohl was ihre Massentheilchen, als was den sie begleitenden Aether anbelangt, complicirter sein, als ein Normaltetraeder. Ohne einen Augenblick zu glauben, dass die sogenannten Elemente der Chemiker wirkliche Elemente seien, schliesse ich doch aus der Verschiedenheit der Naturkörper darauf, dass die Massentheilchen, um mich so auszudrücken, in mehreren Formaten existiren. Das eine Massentheilchen kann sich dann seiner bedeutenderen Grösse wegen mit mehr gebundenem Aether umgeben, als ein anderes, wird also nach aussen in geringer Entfernung eine andere Wirkung ausüben, als dieses. Es können dann grössere Atome und kleinere sich wieder mit einander verbinden und so unsere Naturkörper hervorbringen. Zwischen diesen Massentheilchen sind nun in analoger Weise, wie bei dem oben als Grundlage genommenen Tetraeder, Aethertheilchen befindlich, die aber in grösserer Anzahl auftreten können, als ich der Einfachheit wegen angenommen habe. Mit den verschiedenen Aggregatzuständen einer Substanz scheint eine Aenderung des Aethergehalts einzutreten, wenigstens deutet die geringe specifische Wärme des Diamantes, die ihn von den übrigen Kohlenformen unterscheidet, auf

einen kleineren Werth von 3 [Gleich. 48)]. Bei dem Kupfer kann ein Theil des Aethers durch Hämmern abgepresst werden, und darum hat Regnault gefunden, dass die specifische Wärme durch dieses Verfahren kleiner gemacht werden kann. Bei dem Uebergange eines festen Körpers in den tropfbarflüssigen Aggregatzustand wird Aether aufgenommen und darum zeigen die Flüssigkeiten eine höhere specifische Wärme, als die betreffenden festen Körper.

VI.

Kinematisch-geometrische Constructionen der Parallelprojection der Schraubenflächen und insbesondere des Schattens derselben.

Von

Dr. L. BURMESTER,

Professor der darstellenden Geometrie am königl. Polytechnikum zu Dresden.

(Hierzu Taf. I u. II, Fig. 1 — 16.)

I. Allgemeine Betrachtungen.

1. Der Zweck dieser Abhandlung ist, zu zeigen, dass die allgemeine Construction der Parallelprojection der Schraubenflächen und insbesondere des Schattens derselben sich als ein Specialfall einer bekannten kinematischen Construction manifestirt und dass jene Construction sich als die Frucht einer neuen Interpretation der letzteren offenbart. Die Anwendung der kinematisch-geometrischen Lehrsätze auf diesen Theil der darstellenden Geometrie führt die Ableitung der erstgenannten Construction auf kürzerem Wege mit klarerer Uebersichtlichkeit und grösserer Allgemeinheit zum Ziele, als dies mittels der analytischen und der rein geometrischen Methode bis jetzt geschehen ist. Wir wollen zuerst die allgemeine Construction der Parallelprojection der Schraubenflächen ableiten und dann, da die Parallelprojection auch bei Annahme paralleler Lichtstrahlen als der Schatten der Schraubenflächen betrachtet werden kann, zur Schattenconstruction einiger speciellen Schraubenflächen übergehen.

Die kinematischen Lehren, welche wir hierbei voraussetzen, sind in den schönen Abhandlungen der Herren Reuleaux und Aronhold enthalten.*

* Reuleaux, „Grundzüge der theoretischen Maschinen-Getriebelehre" Aronhold, „Grundzüge der kinematischen Geometrie", in den „Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen". Jahrg. 1871 u. 1872.



2. Bewegt sich eine Schraubenlinie in sich selbst, so vollführen ihre Punkte und ein System fest mit ihr verbunden gedachter Punkte eine Schraubenbewegung. Denken wir uns eine Curve mit einer so bewegten Schraubenlinie fest verbunden, so nimmt diese Curve eine Schraubenbewegung an und erzeugt eine Schraubenfläche. Alle Punkte dieser Curve beschreiben coaxiale Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe. Die gemeinsame Axe dieser Schraubenlinien heisst die Schraubenaxe. Aus der Natur der Schraubenbewegung folgt, dass alle durch die Axe gelegten Ebenen (Meridianebenen) die Schraubenfläche in congruenten Curven, welche Meridiancurven heissen, schneiden, und dass ferner auch alle auf der Axe senkrechten Ebenen (Normalebenen) die Schraubenfläche in congruenten Curven schneiden, die wir Normalcurven nennen wollen. Wir wollen uns daher in der Folge die Schraubenfläche vorzugsweise durch die Schraubenbewegung einer gegebenen Normalcurve erzeugt denken.

3. Wir müssen unserem Zwecke gemäss zuerst, obwohl hiermit nichts Neues geboten wird, die schiefe Parallelprojection einer Schraubenlinie auf einer zu ihrer Axe senkrechten Ebene, d. h. auf einer Normalebene untersuchen. In Fig. 1, Taf. I, ist ein Gang einer rechtsgängigen Schraubenlinie Θ durch Grund- und Aufrissprojection dargestellt und die beliebige Projectionsrichtung durch die Geraden l_1, l_2 gegeben. Um die schiefe Parallelprojection Θ_s der Schraubenlinie Θ auf der Grundrissebene zu construiren, bestimmen wir die schiefe Projection $O_1 H_s$ der eine Ganghöhe h langen Axe OH auf bekannte Weise; wir theilen den Kreis Θ_1, die Grundrissprojection der Schraubenlinie, und die Gerade $O_1 H_s$ in dieselbe beliebige Anzahl gleicher Theile, machen $I_s 1_s \# O_1 1_1$, ebenso $II_s 2_s \# O_1 2_1$ u. s. w. Die erhaltenen Punkte $1_s, 2_s, 3_s \ldots$ bilden die Parallelprojection Θ_s der Schraubenlinie Θ. Die Curve Θ_s ist eine allgemeine Cycloide; denn beschreiben wir um O_1 mit dem Radius $\lambda = \frac{O_1 H_s}{2\pi}$ einen Kreis $\varkappa$, so ist sein Umfang gleich $O_1 H_s$, und ziehen wir $\Omega\Phi$ im Abstande λ parallel zu $O_1 H_s$ oder l_1, so beschreibt, wenn der Kreis $\varkappa$ auf $\Omega\Phi$ rollt, der Punkt P des bewegten Systems die Curve Θ_s. Wenn die Schraubenlinie eine linksgängige ist, so muss man die gerade Polbahn $\Omega\Phi$ auf der andern Seite von l_1 im Abstande λ parallel zu l_1 ziehen.

Den Radius λ erhalten wir auch, wenn wir auf der Axe $O_2 F_2 = \frac{O_2 H_2}{2\pi} = \frac{h}{2\pi}$ machen, $F_2 F'$ parallel l_2 und $F' F_s$ parallel $O_2 H_2$ ziehen; dann ist $O_1 F_s = \lambda$. Bezeichnen wir durch ν den Winkel, welchen die Projectionsrichtung l_1, l_2 mit der Grundrissebene bildet, so ist auch

$$\lambda = \frac{h}{2\pi} \cdot \cot \nu.$$

Bezeichnen wir durch R den Radius $O_1 P$ der Schraubenlinie Θ, durch u den Winkel, welchen ihre Tangenten mit der Grundrissebene einschliessen, so ist

$$R = \frac{h}{2\pi} \cot u.$$

Wir können hiernach den Satz aussprechen:

Die schiefe Parallelprojection einer Schraubenlinie auf einer Normalebene ist eine verkürzte, gemeine oder verlängerte Cycloide, je nachdem $R \lesseqgtr \lambda$ oder $u \gtreqless \nu$ ist.

Jeder Punkt des ebenen beweglichen Systems beschreibt im Allgemeinen eine allgemeine Cycloide, die wir als die schiefe Parallelprojection einer Schraubenlinie von der Axe OH und der Ganghöhe h betrachten können.

4. Nehmen wir an, es sei mit der Schraubenlinie Θ eine ebene Curve C, deren Ebene auf der Axe senkrecht steht, fest verbunden und die Schraubenlinie bewege sich in sich selbst, so erzeugt die Curve C als Normalcurve eine Schraubenfläche. Denken wir uns diese Normalcurve C während ihrer Bewegung beständig auf eine Normalebene oder, wie in Fig. 2, Taf. I, auf die Grundrissebene parallel der Projectionsrichtung l_1, l_2 projicirt, so sind diese Projectionen der Normalcurve congruent und umhüllen eine Curve S_s, welche die Contour der schiefen Parallelprojection der Schraubenfläche ist. Hieraus folgt der Satz:

Die Contour S_s der schiefen Parallelprojection einer Schraubenfläche ist die Hüllbahn, welche durch die mit dem auf $\Omega\Phi$ rollenden Kreise $\varkappa$ verbunden gedachte Normalcurve C in der Normalebene erzeugt.

Es sei in Fig. 2, wenn der rollende Kreis $\varkappa$ die Polbahn $\Omega\Phi$ in einem Punkte III berührt, C_s^3 die Lage der Hüllcurve und Q_s^3 ihr Berührungspunkt mit der Hüllbahn S_s; ferner sei C_1^3 die Grundrissprojection der Normalcurve C^3, deren schiefe Projection C_s^3 ist. Ziehen wir durch Q_s^3 zu l_1 die Parallele $Q_s^3 Q_1^3$, welche C_1^3 in Q_1^3 trifft, so ist Q_1^3 die Grundrissprojection des auf C^3 liegenden Punktes Q^3 der Schraubenfläche, dessen schiefe Projection der Punkt Q_s^3 ist. Der Projectionsstrahl $Q^3 Q_s^3$ berührt demnach die Schraubenfläche in dem Punkte Q^3, und folglich ist Q^3 ein Punkt der Berührungscurve S, in welcher die Cylinderfläche, deren Directrix die Curve S_s ist und deren Mantellinien der Projectionsrichtung parallel sind, die Schraubenfläche berührt. Denken wir uns so zu jedem andern Berührungspunkte Q_s^n den entsprechenden Punkt Q_1^n bestimmt, dann erhalten wir die Grundrissprojection S_1 der Berührungscurve, welche die schiefe Parallelprojection S_s liefert. Die Gerade Q_s^3 III ist die Normale des Punktes Q_s^3 der Hüllbahn S_s und der Hüllcurve C_s^3. Ziehen wir durch Q_1^3 zu Q_s^3III die Parallele $Q_1^3 M_1^3$,

dann ist diese im Punkt Q_1^3 die Normale der Curve C_1^3 und geht, weil $\Omega\text{III} = Q_1^3 Q_s^3$ ist, durch den Punkt Ω, in dem das Rollen des Kreises $\varkappa$ auf der geraden Polbahn $\Omega\Phi$ beginnt. Diesen Punkt Ω wollen wir daher den Ausgangspunkt und die durch ihn gehende, zur Schraubenaxe parallele Gerade die Ausgangsaxe nennen. Hiernach erhalten wir die Sätze:

Die Curve S_1 ist der geometrische Ort derjenigen Punkte auf der um O_1 in ihrer Ebene rotirenden Normalcurve C, deren Normalen durch den Ausgangspunkt Ω gehen.

Die Normalen der Curve S_s sind die Parallelprojectionen der Mantellinien einer Conoidfläche Γ, welche entsteht, wenn eine Gerade senkrecht an der Ausgangsaxe und zugleich an der Berührungscurve S hingleitet.

Die Normalen der Curve S_s umhüllen die Contour der Parallelprojection der Conoidfläche Γ. Hieraus folgt der Satz:

Die Evolute E_s der Curve S_s ist die Contour der Parallelprojection der Conoidfläche Γ.

5. Der Krümmungsmittelpunkt m_s^3 für den Punkt Q_s^3 der Curve S_s ist der Berührungspunkt der Normalen $Q_s^3\text{III}$ mit der Evolute E_s. Ist der Krümmungsmittelpunkt M_s^3 für den Punkt Q_s^3 der Hüllcurve C_s^3 gegeben, so kann man den Krümmungsmittelpunkt m_s^3 mit Hilfe des Wendekreises bestimmen, dessen Durchmesser gleich dem Radius des rollenden Kreises $\varkappa$ ist und der die Polbahn in III berührt. Auf kürzerem Wege erhalten wir aber den Punkt m_s^3, indem wir durch M_s^3 und den Mittelpunkt γ^3 des entsprechenden Kreises $\varkappa^3$ die Gerade $M_s^3 A_s^3$ ziehen, welche die in III auf $\text{III}Q_s^3$ errichtete Senkrechte in A_s^3 schneidet, und von A_s^3 auf $\Omega\Phi$ die Senkrechte $A_s^3 m_s^3$ fällen. Diese schneidet $Q_s^3\text{III}$ in dem Krümmungsmittelpunkte m_s^3. Ziehen wir durch m_s^3 zu l_1 die Parallele $m_s^3 m_1^3$, welche $Q_1^3\Omega$ in m_1^3 trifft, dann berührt der Projectionsstrahl $m^3 m_s^3$ die Conoidfläche Γ in dem Punkte m^3, und die durch $m^3 m_s^3$ und $m_s^3 Q_s^3$ gelegte Ebene ist eine Tangentialebene der Conoidfläche Γ für den Punkt m^3 auf der Mantellinie $m^3 Q^3$, deren schiefe Projection $m_s^3 Q_s^3$ ist. Die Grundrissprojection m_1^3 des Berührungspunktes m^3 können wir aber auch unabhängig von der schiefen Projection erhalten. Zu diesem Zwecke ziehen wir durch den als gegeben betrachteten Krümmungsmittelpunkt M_1^3 des Punktes Q_1^3 der Normalcurve C_1^3 und durch den Punkt O_1 eine Gerade, welche die in Ω auf ΩQ_1^3 errichtete Senkrechte in A_1^3 schneidet, und fällen von A_1^3 auf $\Omega\Phi$ die Senkrechte $A_1^3 m_1^3$. Diese trifft $Q_1^3\Omega$ in dem Punkte m_1^3. Mit Hilfe dieses Punktes gelangen wir zur Begründung einer sehr einfachen Normalen- oder Tangentenziehung an die Curve S_1. Nach den Lehren der darstellenden Geometrie kann man mittels der Tangentialebene e im Punkte m^3 der Conoidfläche Γ unendlich viele hyperbolische Paraboloide bestimmen, welche die Conoidfläche Γ längs der Mantellinie $m^3 Q^3$ berühren und die Ausgangs-

axe als eine gemeinsame Leitgerade besitzen. Mit Hilfe eines solchen Berührungsparaboloids können wir im Punkte Q^3 die Tangentialebene ε' an der Conoidfläche Γ ermitteln. Die Schnittlinie dieser Tangentialebene ε' mit der Tangentialebene ε des Punktes Q^3 an der Schraubenfläche ist die Tangente des Punktes Q^3 der Curve S und die Grundrissprojection dieser Tangente ist auch die Tangente des Punktes Q_1^3 der Curve S_1.

Wir ziehen in der separaten Fig. 2a durch A_1^3 zu ΩQ_1^3 die Parallele $A_1^3 t_1$, welche $Q_1^3 Q_2^3$ in t_1 schneidet, und fällen von t_1 auf ΩQ_1^3 die Senkrechte $t_1 \tau_1$. Die Parallele $A_1^3 t_1$ können wir als die Grundrissprojection des Schnittes der Tangentialebene ε mit einer Normalebene, d. h. mit einer zur Grundrissebene parallelen Ebene N betrachten, und die Senkrechte $t_1 \tau_1$ ist dann die Grundrissprojection des Durchschnitts der Ebene N mit der Tangentialebene ε. Die Gerade $A_1^3 m_1^3$ können wir als die Grundrissprojection einer in der Tangentialebene ε liegenden Geraden $A_3 m^3$ ansehen. Das hyperbolische Berührungsparaboloid, welches ausser der Ausgangsaxe, d. h. der in Ω auf der Grundrissebene senkrechten Geraden, die Gerade $A^3 m^3$ als Leitgerade hat, und dessen Richtebene die Grundrissebene ist, ist das einzige von den unendlich vielen Berührungsparaboloiden, welches dem Endresultat der weiteren Construction eine ganz besondere Einfachheit verleiht. Führen wir nun durch Q_1^3 zu $m_1^3 A_1^3$ die Parallele $Q_1^3 \psi_1$, die $A_1^3 \Omega$ in ψ_1 trifft, und durch ψ_1 zu $Q_1^3\,\Omega$ die Parallele $\psi_1 \tau_1$, welche die von t_1 auf ΩQ_1^3 gezogene Senkrechte in τ_1 begegnet, so ist $Q_1^3 \psi_1$ die Grundrissprojection einer durch Q_1^3 gehenden Mantellinie des Berührungsparaboloids; demnach ist $\psi_1 \tau_1$ die Grundrissprojection der Schnittlinie der Tangentialebene ε' mit der Normalebene N und $\tau_1 Q_1^3$ die Grundrissprojection der Tangente im Punkte Q^3 an der Curve S und somit ist auch $\tau_1 Q_1^3$ die Tangente der Curve S_1 im Punkte Q_1^3. Beschreiben wir um das Rechteck $A_1^3 t_1 \tau_1 \psi_1$ einen Kreis, so geht dieser auch durch Q_1^3, weil der Winkel $\widehat{t_1 Q_1^3 \psi_1}$ ein rechter ist; demnach steht die Gerade $\tau_1 Q_1^3$ auf der Geraden $A_1^3 Q_1^3$ senkrecht und $A_1^3 Q_1^3$ ist die Normale der Curve S_1 im Punkte Q_1^3. Hieraus folgt in Rücksicht auf die Fig. 2:

> Ziehen wir durch den Krümmungsmittelpunkt M_1^3 und den Punkt O_1 eine Gerade, welche die in Ω auf ΩQ_1^3 errichtete Senkrechte in A_1^3 trifft, so ist $A_1^3 Q_1^3$ die Normale der Curve S_1 im Punkte Q_1^3.

6. Die Curve S_1 ist für unsern Zweck die wichtigste, denn wenn sie gezeichnet ist, können wir durch ihre Vermittelung S_2 sehr leicht punktweise construiren. Es ist daher zunächst unsere Aufgabe, die Curve S_1 mit Hilfe der gegebenen Normalcurve C zu zeichnen. Diese Aufgabe lässt sich sehr leicht nach dem ersten auf S. 188 hervorgehobenen Satze lösen, wenn die Normalen- oder Tangentenziehung an die Normalcurve keine Schwierigkeiten bietet.

Ist die Normale $O^0 n^0$, Fig. 4 Taf. I, für einen beliebigen Punkt Q^0 der Normalcurve C^0 gezogen und sind f, φ die Schnittpunkte, welche sie mit dem Kreise $\varkappa$ bildet, so beschreiben wir um O_1 mit $O_1 Q^0$ einen Kreis K, bestimmen auf K die Punkte Q^{I} und Q^{II}, so dass $\Omega Q^{I} = f Q^0$ und $\Omega Q^{II} = \varphi Q^0$ ist, d. h. wir suchen die Lagen Q^{I} und Q^{II}, welche der Punkt Q^0 einnimmt, wenn die Normale um O_1 gedreht wird, bis f mit Ω und φ mit Ω zusammenfällt.* Die hierdurch eindeutig bestimmten Punkte Q^{I}, Q^{II} sind somit nach dem ersten, auf S. 188 hervorgehobenen Satze zwei Punkte der Curve S_1. In gleicher Weise kann man so viele Punkte der Curve S_1 erhalten, als zur Construction derselben nöthig sind.

7. Ist die Grundrissprojection S_1 der Curve S construirt, so erhält man die Aufrissprojection S_2 derselben durch Hinaufprojiciren und die Curve S_s als die schiefe Parallelprojection von S auf der Grundrissebene.

Wir können die Curve S_s aber auch leicht auf kinematischem Wege construiren. Ist in Fig. 4 die Normale $Q^0 n^0$ eines Curvenpunktes Q^0 gezogen und ist dieselbe, wie angegeben wurde, um O_1 in die Lagen $Q^{I} n^{I}$ und $Q^{II} n^{II}$ gedreht, so machen wir auf der geraden Polbahn $\Omega \Phi$ die Strecke $\Omega f' = \widehat{\Omega \varkappa f}$, ziehen $f' Q_s^{I} \,||\!= \Omega Q^{I}$. Dann ist Q_s^{I} ein Punkt der Curve S_s. Machen wir in gleicher Weise auf der geraden Polbahn $\Omega \varphi' = \widehat{\Omega \varkappa \varphi'}$ und $\varphi' Q_s^{II} \,||\!= \Omega Q^{II}$, so ist Q_s^{II} ein zweiter Punkt der Curve S_s. Ein Punkt der Normalcurve liefert demnach stets zwei Punkte der Curve S_s**. Wenn aber eine Normale der Curve C^0 den rollenden Kreis $\varkappa$ berührt, dann fallen die beiden Punkte in einem Punkte auf der Polbahn zusammen, und in diesem Falle verbinden sich die sonst getrennten Curventheile $S_s Q_s^{I}$, $S_s Q_s^{II}$ in diesem Punkte zu einem zusammenhängenden Curvenzuge.

8. Mit Hilfe von S kann man aber auch ohne Schwierigkeit die schiefe Parallelprojection S'_s von S auf einer beliebigen Ebene E' erhalten; oder wenn S_s gezeichnet ist, so ergiebt sich S'_s als die affine Figur von S_s. Die Durchschnittslinie der Ebene E' mit der Grundrissebene ist die Affinitätsaxe und die Schnittpunkte, welche ein beliebiger Projectionsstrahl mit der Ebene E' und der Grundrissebene bildet, sind entsprechende Punkte.

9. In dem besondern Falle, wenn Ω im Unendlichen liegt, verliert die angegebene Construction der Curve S_1 ihre Giltigkeit. Wir wollen diese Construction daher noch so modificiren, dass sie auch in diesem besondern Falle ihre Giltigkeit behält.

Wir ziehen (Fig. 4) den Kreis w, dessen Durchmesser $O_1 \Omega$ ist, fällen von O_1 auf die Normale $Q^0 n^0$ die Senkrechte $O_1 n^0$, beschreiben mit dieser um O_1 einen Kreis, der den Kreis w in den Punkten n^{I}, n^{II} schneidet, und

---

* Die Drehrichtung der Normalen um O_1 ist hier wie im Folgenden stets in dem Sinne zu nehmen, in dem ein auf der Schraubenlinie Θ emporsteigender Punkt sich bewegt.

** Wir betrachten nur einen Schraubengang, weil die Curve S_s sich für di übrigen Schraubengänge in congruenten Zügen wiederholt.

ziehen die Geraden $n^{I}\Omega$, $n^{II}\Omega$, welche K resp. in den Punkten Q^{I}, Q^{II} treffen; d. h. wir bestimmen die Lagen Q^{I}, Q^{II}, die der Punkt Q^{0} einnimmt, wenn die Normale $Q^{0}n^{0}$ um O_1 gedreht wird, bis f mit Ω und φ mit Ω zusammenfällt. Die hierdurch eindeutig bestimmten Punkte Q^{I}, Q^{II} sind dann zwei Punkte der Curve S_1. Ohne Benutzung des Kreises K erhält man diese Punkte auch, wenn man $n^{I}Q^{I} = n^{0}Q^{0}$, $n^{II}Q^{II} = n^{0}Q^{0}$ macht.

Ist die Curve C^{0} in Bezug auf eine durch O_1 gehende Gerade symmetrisch, so giebt es immer zwei gleichweit von O_1 entfernte Curvenpunkte, deren Normalen von O_1 gleichen Abstand haben. Hieraus folgt dann der Satz:

> Wenn die Normalcurve C^{0} in Bezug auf eine durch O_1 gehende Gerade symmetrisch ist, so ist der Schnittpunkt des Kreises w mit einem durch Ω gehenden Radius vector die Mitte zwischen je zwei auf diesem liegenden zusammen gehörigen Punkten der Curve S_1.

Liegt nun der Punkt Ω im Unendlichen, d. h. ist $O_1\Omega = \infty$, so geht der Kreis w in die Gerade l_1 (Fig. 5) über und die Geraden $n^{I}Q^{I}$, $n^{II}Q^{II}$ stehen auf l_1 senkrecht.

10. Zu der Construction der Curve S_1 wurden wir durch die Parallelprojection S_2 geführt. Wenn aber die Projectionsrichtung parallel zur Normalebene ist, mit dieser also einen Winkel bildet, der gleich Null ist, so giebt es keine Parallelprojection auf der Normalebene. Wir müssen daher diesen Fall noch besonders betrachten. Denken wir uns parallel zu dieser Projectionsrichtung an die Normalcurve C in allen ihren Lagen, die sie bei der Erzeugung der Schraubenfläche annimmt, Tangenten gelegt, so bilden die Berührungspunkte auf der Schraubenfläche die Curve S, welche wir in diesem speciellen Falle der Unterscheidung wegen mit S^{0} bezeichnen wollen. Für die Grundrissprojection S_1^{0} dieser Curve erhalten wir hiernach den Satz:

> Die Curve S_1^{0} ist der geometrische Ort derjenigen Punkte der um O_1 in ihrer Ebene rotirenden Normalcurve C, deren Normalen auf der Projectionsrichtung senkrecht stehen oder durch den unendlich fernen Punkt Ω gehen.

Aus diesem Satze folgt, dass die angegebene Construction für den Fall $O_1\Omega = \infty$ die Curve S_1^{0} liefert, welche bei parallel zur Normalebene gerichteter Projectionsrichtung auftritt. Diese Curve S_1^{0} ist auch bei der senkrechten Projection der Schraubenfläche auf der Aufrissebene die Grundrissprojection der Flächencontour.

11. An einem andern Orte* habe ich angegeben, dass man die scheinbare Beleuchtung der Schraubenflächen in der Grundrissprojection mit

* Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen. Von Dr. L. Burmester. 1871. II. Theil, § 77 Nr. 5.



Hilfe der Curve S_1^0, welche dort Vectorcurve genannt ist, und mit Hilfe eines bestimmten Chordalkreissystems, welches dort Grundkreissystem heisst, construiren kann. Um z. B. eine Isophenge (Linie gleicher scheinbarer Beleuchtung) zu zeichnen, nehmen wir an, es sei in Fig. 6 k^i ein Grundkreis, dem die Intensität i entspricht, und $Q^0 n^0$ eine Normale im Punkte Q^0 der Normalcurve C^0. Wir fällen von O_1 auf $Q^0 n^0$ eine Senkrechte $O_1 n^0$, beschreiben mit $O_1 Q^0$ um O_1 den Kreis K und mit $O_1 n^0$ einen Kreis, der k^i in n^I und n^{II} schneidet. Hierauf ziehen wir auf $O_1 n^I$ und $O_1 n^{II}$ resp. die Senkrechten $n^I Q^I$ und $n^{II} Q^{II}$, welche den Kreis K in Q^I und Q^{II} treffen. Dann sind Q^I, Q^{II} zwei Punkte der Grundriss-Isophenge von der Intensität i. Die Punkte Q^I und Q^{II} werden auf dem Kreise K durch das Schneiden desselben mit den Geraden $n^I Q^I$, $n^{II} Q^{II}$ eindeutig bestimmt, wenn man sich die Normale $Q^0 n^0$ um O_1 gedreht denkt, bis n^0 mit n^I und n^{II} zusammenfällt, bis dem entsprechend Q^0 nach Q^I und Q^{II} gelangt.

12. Wenn die Projectionsrichtung und die Ganghöhe der Schraubenfläche bekannt ist, d. h. wenn die gerade Polbahn $\Omega\Phi$ (Fig. 4) und der rollende Kreis $\varkappa$ gegeben sind, so können wir die Curve S_s beliebig annehmen und umgekehrt die Curve S_1 und die Normalcurve C^0 der Schraubenfläche construiren, welche die beliebig angenommene Curve S_s als Contour der schiefen Parallelprojection liefert.

Nehmen wir an, es sei in Fig. 4, $S_s Q_s^I$ die gegebene Curve S_s, es sei ferner die Gerade $f' Q'_s$, welche die Polbahn in f' trifft, eine Normale der Curve S_s im Punkte Q_s^I, so erhalten wir einen Punkt Q_1^I der Curve S_1, wenn wir $\Omega Q^I \| = f' Q_s^I$ machen. Beschreiben wir dann um O_1 mit $O_1 Q^I$ einen Kreis K, machen $\widehat{\Omega \varkappa f} = \Omega f'$ und bestimmen auf K den Punkt Q^0, so dass $f Q^0 = \Omega Q^I = f' Q_s^I$ ist, d. h. wir suchen die Lage des Punktes Q^0, welche der Punkt Q^I einnimmt, wenn die Gerade ΩQ^I um O_1 gedreht wird, bis Ω über $\varkappa$ in f gelangt. Der somit eindeutig bestimmte Punkt Q^0 auf K ist ein Punkt der Normalcurve C^0. Die Curve S_s ist die Hüllbahn der mit dem rollenden Kreise $\varkappa$ verbundenen Normalcurve C^0. Es kann nun der Fall eintreten, dass diese Hüllbahn schon durch ein Stück der Hüllcurve C^0 vollständig erzeugt wird. In einem solchen Falle liefert die angegebene Construction nur das Stück der Normalcurve C^0, welches bei der Erzeugung der Curve S_s zur Geltung kommt.

In Nr. 7 haben wir gezeigt, dass jeder Punkt Q^0 der Normalcurve C^0 im Allgemeinen zwei Punkte Q_s^I, Q_s^{II} der Curve S_s liefert. Hieraus folgt dann, dass die beliebig angenommene Curve $S_s Q_s^I$ nur ein Theil der Curve S_s ist und dass neben diesem Curventheile $S_s Q_s^I$ noch ein zweiter Curventheil $S_s Q_s^{II}$ auftritt, über den wir im Voraus nicht willkürlich verfügen können. Dieser zweite Curventheil $S_s Q_s^{II}$ bildet im Allgemeinen eine selbstständige Curve; er vereinigt sich nur dann mit dem Curventheil $S_s Q_s^I$ zu einem continuirlichen Curvenzuge, wenn die gerade Polbahn $\Omega\Phi$ mit

einer Normale des Curventheils $S_s Q_s^I$ zusammenfällt. Die in Fig. 4 gegebene Construction, durch welche man zu den Punkten Q_s^I, Q_s^{II} der Curve S_s die entsprechenden Punkte Q^I, Q^{II} der Curve S_1 bestimmt, giebt den Satz:

Die Curve S_1 ist der geometrische Ort derjenigen Punkte auf der in der Richtung der geraden Polbahn sich bewegenden Curve S_s, deren Normalen während der Bewegung durch den Punkt Ω gehen.

13. Bei der Schattenbestimmung der Schraubenflächen ist, die Projectionsrichtung als Lichtrichtung betrachtet, die Curve S_1 die Grundrissprojection der Selbstschattengrenze S und die Curve S_s, die schiefe Parallelprojection von S, die Schlagschattencontour der Schraubenfläche. Die Normalcurve C und die Curve S_s heissen in der Abhandlung des Herrn Reuleaux* „Profile", die Curve S_1, welche bei unseren Betrachtungen die wichtigste ist, wird dort „Eingrifflinie" genannt und ist dort gleichsam ein Nebenerzeugniss der Construction. Der Vergleich unserer Erörterungen mit der citirten Abhandlung zeigt, dass die Ableitung der Parallelprojection der Schraubenflächen und des Schattens derselben als eine neue Interpretation einer kinematischen Construction betrachtet werden kann und dass jene Construction in dieser kinematischen Construction als specieller Fall enthalten ist.

II. Specielle Betrachtungen.

Die Schattenconstruction der Schraubenregelfläche.

14. Die Normalcurve der Schraubenregelfläche. Die Schraubenregelfläche wird durch die Schraubenbewegung einer Geraden erzeugt. Es sei (Fig. 3, Taf. I) OH die auf der Grundrissebene senkrecht stehende Schraubenaxe. Die Grundrissprojectionen der Mantellinien umhüllen den Kreis k_1, dessen Mittelpunkt O_1 und dessen Radius δ gleich dem Abstand der erzeugenden Geraden von der Schraubenaxe ist. Der Kreis K_1 ist die Grundrissprojection der Schraubenlinie K, welche der der Axe zunächstliegende Punkt der beweglichen Geraden beschreibt. Von den unendlich vielen Schraubenlinien, welche die Axe und die Ganghöhe h der Schraubenregelfläche gemeinsam haben, giebt es eine Schraubenlinie Σ, deren Tangenten den Mantellinien der Schraubenregelfläche parallel sind. Den Radius ϱ dieser Schraubenlinie erhalten wir, wenn wir $O_1 F_1 = \frac{h}{2\pi}$

* Kinematische Mittheilungen in den „Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen", 1872, S. 187. — Auch Reuleaux' „Constructeur", 3. Aufl., S. 412.



machen und durch F_2 zu $0_2 0'_2$ die Parallele $F_2 \alpha_2$ ziehen, d. h. die Gerade $F_2 \alpha_2$ so bestimmen, dass sie mit der Projectionsaxe A denselben Winkel v macht, welchen die Mantellinien der Schraubenregelfläche mit der Grundrissebene bilden. Dann ist $\varrho = O_2 \alpha_2$ der Radius der Schraubenlinie Σ; denn bezeichnen wir durch u den Winkel, den die Tangenten dieser Schraubenlinie mit der Grundrissebene bilden, so ist

$$tan\, u = \frac{h}{2 \varrho \pi},$$

und da ferner

$$\varrho = O_2 \alpha_2 = O_2 F_2 \cot v = \frac{h}{2\pi} \cot v$$

ist, so folgt

$$u = v.$$

Die Gesammtheit aller Tangenten der Schraubenlinie Σ bilden eine abwickelbare Schraubenfläche, und der Schnitt derselben mit der Grundrissebene ist eine gewöhnliche Kreisevolvente, deren Basis der Kreis Σ_1 ist. Es seien auf der Geraden $O_1 \alpha_1$ die Punkte α_1 und a_1 die Schnittpunkte der Schraubenlinien Σ und K mit der Grundrissebene. Ziehen wir in einem beliebigen Punkte β_1 an den Kreis Σ_1 eine Tangente $\tau_1 \beta_1 = \widehat{\alpha_1 \zeta \beta_1}$, so ist $\tau_1 \beta_1$ die Grundrissprojection einer Mantellinie der abwickelbaren Schraubenfläche und die Grundrissspur τ_1 ein Punkt der genannten gemeinen Kreisevolvente. Legen wir nun an den Kreis K_1 die zu $\tau_1 \beta_1$ parallele Tangente $Q_1 b_1 = \tau_1 \beta_1$, so ist $Q_1 b_1$ die Grundrissprojection einer Mantellinie der Schraubenregelfläche und Q_1 die Grundrissspur dieser Mantellinie. Wir erhalten den Punkt Q_1 aber auch, wenn wir auf $\tau_1 \beta_1$ die Senkrechte $\tau_1 Q_1 = \alpha_1 a_1 = \varrho - \delta$ ziehen. Denken wir uns nun den Punkt Q_1 mit der Kreistangente $\tau_1 \beta_1$ fest verbunden, so beschreibt derselbe, wenn diese Tangente auf dem Kreise Σ_1 rollt, die Normalcurve C_1^0 der Schraubenregelfläche. Hieraus folgt der Satz:

> Die Normalcurve der Schraubenregelfläche ist eine allgemeine Kreisevolvente, deren Polbahn der Kreis Σ_1 ist.

Bevor wir mit Hilfe dieser Normalcurve die Schattenconstruction der Schraubenregelfläche ableiten, wollen wir noch die wichtigsten speciellen Fälle dieser Schraubenfläche hervorheben.

a) Ist der Radius δ des Kreises K_1 gleich Null, dann gehen die Mantellinien durch die Schraubenaxe, und die Normalcurve geht in die archimedische Spirale über. Dies ist die axiale Schraubenregelfläche (Schraube mit scharfem Gewinde).

b) Ist der Radius ϱ des Kreises Σ_1 unendlich gross, dann sind die Mantellinien der Normalebene parallel und normal zur Schraubenaxe. In diesem Falle erhalten wir die normale Schraubenregelfläche (Seitenfläche der gewundenen prismatischen Säule).



c) Wenn $\varrho = \delta$ ist, geht die Normalcurve in die gemeine Kreisevolvente über. Dies ist die tangentiale Schraubenregelfläche (die abwickelbare Schraubenfläche).

d) Im Falle $\delta = 0$, $\varrho = \infty$ gehen die Mantellinien durch die Schraubenaxe und stehen auf dieser senkrecht. Es ergiebt sich dann die normale axiale Schraubenregelfläche (Schraube mit flachem Gewinde).

15. **Construction der Selbstschattengrenze der Schraubenregelfläche.** Behufs dieser Construction bestimmen wir die Normale eines Punktes Q_1 der Normalcurve, der allgemeinen Kreisevolvente C_1^0, indem wir von Q_1 an den Kreis K_1 die Tangente $Q_1 b_1$ legen, welche K_1 in b_1 berührt, und von dem Schnittpunkte β_1, den $O_1 b_1$ mit dem Kreise Σ_1 bildet, nach Q_1 die Gerade β_1 ziehen. Dann ist diese Gerade $\beta_1 Q_1$ die Normale des Punktes Q_1 der allgemeinen Kreisevolvente C_1^0, denn β_1 ist der Berührungspunkt der Polbahnen. Nehmen wir nun an, es sei l_1, l_2 die Lichtrichtung und Ω der durch diese Lichtrichtung bestimmte Ausgangspunkt Ω*, so brauchen wir nur das rechtwinklige Dreieck $\beta_1 b_1 Q_1$ um O_1 zu drehen, bis die Normale $Q_1 \beta_1$ durch Ω geht; dann gelangt der Radius $O_1 \beta_1$ nach $O_1 \beta^1$, die Kreistangente $b_1 Q_1$ als solche nach $b' Q'_1$, und Q'_1 ist ein Punkt der Grundrissprojection S_1 der Selbstschattengrenze S. Wie der Punkt Q_1 der Normalcurve C_1^0 den Punkt Q'_1 der Curve S_1 liefert, so liefert auch der zweite Punkt Q_1^0 der Normalcurve C_1^0, der ebenso weit von O_1 entfernt ist als Q_1, auf der Geraden $\Omega\beta'$ einen zweiten Punkt Q'' der Curve S_1. Hiernach können wir die Curve S_1 sehr leicht ganz unabhängig von der Normalcurve C_1^0 construiren.

Der bessern Uebersichtlichkeit wegen wollen wir diese Construction in der separaten Figur 3*a* wiederholen. Wir ziehen von dem Ausgangspunkte Ω eine Secante $\beta^1 \beta^2$ durch den Kreis Σ_1 und verbinden die Schnittpunkte β^1, β^2 mit O_1 durch Gerade, welche den Kreis K_1 resp. in e' und e'' schneiden; in diesen Schnittpunkten errichten wir auf $O_1 \beta^1$ und $O_1 \beta^2$ die Senkrechten $e'Q'$ und $e''Q''$, welche die durch Ω gezogene Gerade in den Curvenpunkten Q' und Q'' treffen. Wäre in Fig. 3 die Lage der zur Aufrissebene parallelen Mantellinie $00'$ derart, dass die zu ihr Parallele $F_2 \alpha_2$ die Projectionsaxe A rechts von O_2 schnitte, so müsste man, um die Curve S_1 in Fig. 3*a* zu erhalten, in den zweiten Schnittpunkten ε' und ε'' auf $O_1 \beta^1$ und $O_1 \beta^2$ Senkrechte errichten oder Tangenten an K_1 ziehen. In Nr. 19 werden wir zeigen, dass die Curve Fig. 3*a* ein ganz specieller Fall der dort behandelten Curve ist. Dort wird auch die Tangenten- und Normalenconstruction abgeleitet.

---

* Den Ausgangspunkt Ω erhalten wir nach Nr. 3, wenn wir $O_2 F_2 = \frac{O_2 H_2}{2\pi} = \frac{h}{2\pi}$ machen, $F_2 F'$ parallel l_2 und $F'F_1$ parallel $O_2 H_2$ ziehen. Dann errichten wir in O_1 auf l_1 die Senkrechte $O_1 \Omega = O_1 F_1$.



Liegt Ω ausserhalb des Kreises Σ_1 oder auf demselben, dann erstrecken sich die vier Curvenäste Fig. 3a ins Unendliche; liegt aber Ω innerhalb des Kreises Σ_1, dann ist die Curve geschlossen. Ist $O_1\Omega = \infty$, dann ist $\beta^1\beta^2 \parallel O_1V$ und die Construction liefert die in Nr. 10 allgemein besprochene Curve S_1^0.

Die Grundrissprojection S_1^0 der Contourlinie S^0, in welcher die zur Aufrissebene senkrechten Projectionsstrahlen die Schraubenregelfläche berühren, erhalten wir demnach in Fig. 3, wenn wir einen beliebigen Radius $O_1\eta$ ziehen, durch seinen Schnittpunkt η mit Σ_1 zur Projectionsaxe A die Parallele η II führen und in seinem Schnittpunkte $2'_1$ mit K_1 an K_1 die Kreistangente an $2'_1$ II legen. Diese trifft η II in einem Punkte II der Curve S_1^0.

Für die tangentiale Schraubenregelfläche (abwickelbare Schraubenfläche) ist $\delta = \varrho$, es fallen die Kreise K_1 und Σ_1 zusammen; die Curve S_1 geht dann in zwei von Ω an den Kreis Σ_1 gezogene Tangenten über. Die Selbstschattengrenze besteht demnach aus zwei Mantellinien und die Schlagschattencontour aus zwei Geraden. Da in diesem Falle die Normalcurve eine gewöhnliche Kreisevolvente ist, so folgt hieraus, dass ihre Hüllbahn aus Geraden besteht.

Für die axiale Schraubenregelfläche (Schraube mit scharfem Gewinde) ist $\delta = 0$, der Kreis K_1 degenerirt zu einem Punkte O_1.

Für die normale Schraubenregelfläche (Seite eines gewundenen Prismas) ist $\varrho = \infty$; die Normalcurve ist eine Gerade im Abstande δ von O_1, und die Curve S_1 ist für diesen Fall die Fusspunktscurve des Kreises K_1 für für den Pol Ω.

Für die normale axiale Schraubenregelfläche (Schraube mit flachem Gewinde) ist $\delta = 0$, $\varrho = \infty$; die Normalcurve ist eine durch O_1 gehende Gerade und die in Fig. 3a angegebene Construction der Curve S_1 liefert einen Kreis, dessen Durchmesser $O_1\Omega$ ist.

16. Die normale axiale und die normale Schraubenregelfläche wollen wir noch speciell betrachten, um zu zeigen, wie man ihre Schattenconstruction leicht direct ableiten kann. Es sei in Fig. 7 die durch O_1 gehende Gerade C_1^0 die Normalcurve der normalen axialen Schraubenregelfläche. Denken wir uns die Gerade C_1^0 um O_1 gedreht, so ist nach dem ersten, auf S. 188 hervorgehobenen Satze der geometrische Ort derjenigen Punkte der gedrehten Geraden, deren Normalen durch Ω gehen, ein Kreis S_1, dessen Durchmesser $O_1\Omega$ ist. Rollt der Kreis $\varkappa$ auf der Polbahn $\Omega\Phi$, so hüllt die mit $\varkappa$ fest verbunden gedachte Gerade C_1^0 eine gemeine Cykloide S_s ein. Diese Cykloide wird, wie man leicht aus der Fig. 7 ersieht, auch durch den auf dem Kreise S_1 liegenden Punkt O_1 erzeugt, wenn dieser Kreis auf der Polbahn $\Omega\Phi$ rollt. Die Schlagschattencontour der normalen axialen Schraubenregelfläche ist demnach eine gemeine Cykloide.

In Fig. 8 sei die Gerade C_1^0 die Normalcurve der normalen Schraubenregelfläche. Denken wir uns diese Gerade um O_1 gedreht, so hüllt sie den

Kreis K_1 ein, und der geometrische Ort ihrer Punkte, deren Normalen durch Ω gehen, ist die Fusspunktscurve S_1 des Kreises K_1 in Bezug auf den Pol Ω. Beschreiben wir über $O_1\Omega$ als Durchmesser den Kreis w, dann ist S_1 auch eine Conchoide dieses Kreises w; denn ziehen wir durch Ω eine Gerade, welche w in n trifft und S_1 in Q'_1 und Q''_1 schneidet, so ist $nQ'_1 = nQ''_1$ gleich dem Radius des Kreises K_1. Rollt der Kreis $\varkappa$ auf der Polbahn $\Omega\Phi$, so umhüllt die im beweglichen System gedachte Gerade C_1^0 eine Aequidistante S_2 der gemeinen Cycloide, welche durch den auf w liegenden Punkt O_1 erzeugt wird, wenn der Kreis w auf $\Omega\Phi$ rollt. Aus der Construction der Curve S_1 erkennt man leicht, dass die Conoidfläche Γ (Nr. 5), deren Durchschnitt mit der normalen Schraubenregelfläche die Raumcurve S liefert, eine normale axiale Schraubenregelfläche ist, die gleiche Ganghöhe, aber entgegengesetzte Windung hat.

Die Schattenconstruction der Schraubenfläche, deren Normalcurve eine cyklische Curve ist.

17. Ist mit einer in sich selbst bewegten Schraubenlinie Θ eine andere Schraubenlinie Ψ, deren Axe der Axe der ersten parallel ist, fest verbunden, so beschreibt die Schraubenlinie Ψ, wie man leicht durch kinematische Betrachtungen erkennt, eine Schraubenfläche, deren Normalcurve eine cyklische Curve (eine allgemeine Epi-, Hypo- oder Pericykloide) ist. — Der Mittelpunkt O_1 des Kreises Σ (Fig. 9, Taf. II) sei die Grundrissprojection der auf der Grundrissebene senkrechten Axe der Schraubenfläche. Die cyklische Curve C^0, die Normalcurve dieser Schraubenfläche, wird durch einen mit dem Kreise k fest verbundenen Punkt Q beschrieben, wenn der Kreis k, dessen Mittelpunkt μ ist, an dem festen Kreis Σ rollt. Für einen beliebigen Curvenpunkt Q^i sei k^i die Lage des rollenden Kreises, μ^i dessen Mittelpunkt und β^i der Berührungspunkt der Polbahnen, dann ist $Q^i\beta^i$ die Normale für den Punkt Q^i der cyklischen Curve C^0. Ist Ω der Ausgangspunkt an der geraden Polbahn $\Omega\Phi$, welche der Grundrissprojection l_1 der Lichtrichtung parallel ist, dann gelangen wir zu einer sehr einfachen Construction der Curve S_1, der Grundrissprojection der Selbstschattengrenze, wenn wir das Dreieck $Q^i\mu^i\beta^i$ um O_1 drehen, bis die Normale $Q^i\beta^i$ durch den Punkt Ω geht. Zu diesem Zwecke beschreiben wir um O_1 die durch Q^i und μ^i gehenden Kreise K^i und Ξ, ferner um O_1 den durch Ω gehenden Kreis $\varkappa^0$, der die Normale $Q^i\beta^i$ in den Punkten φ und f schneidet; dann bestimmen wir auf K^i den Punkt $Q^{\rm I}$, so dass $\Omega Q^{\rm I} = fQ^i$ ist, ziehen durch den Schnittpunkt β^1, den $\Omega Q^{\rm I}$ seinerseits mit Σ bildet, den Radius $O_1\beta^1$, der Ξ in μ^1 trifft. Das Dreieck $Q^i\mu^i\beta^i$ hat dann die Lage $Q^{\rm I}\mu^1\beta^1$, die Normale Q^if die Lage $Q^{\rm I}\Omega$ angenommen und $Q^{\rm I}$ ist ein Punkt der Curve S_1. Man erkennt leicht, dass es auf einem halben Intervall der cyklischen Curve C^0 noch einen Punkt giebt, dessen Normale von O_1 denselben Abstand hat, wie die Normale $Q^i\beta^i$; daher erhalten wir auf $\Omega Q^{\rm I}$ noch einen Punkt Q' der Curve S_1, wenn wir $\mu^1Q' = \mu^1Q^{\rm I} = \mu Q$

machen. Da die cyklische Curve in Bezug auf die durch O_1 gehenden Geraden $O_1\mu$ symmetrisch ist, so giebt es nach Nr. 9 auf ΩQ^I noch zwei correspondirende Punkte Q^{II} und Q'' der Curve S_1. Diese Punkte erhalten wir, wenn wir über $O_1\Omega$ als Durchmesser den Kreis $\varkappa$ beschreiben, der ΩQ^I in n trifft, und $Q^{II}n = Q^I n$, $Q''n = Q'n$ machen; oder wenn wir durch den zweiten Schnittpunkt β^2, den ΩQ^I mit Σ bildet, den Radius $O_1\beta^2$ ziehen, der Ξ in μ^2 trifft, und $Q^{II}\mu^2 = Q''\mu^2 = Q\mu$ machen.

Hieraus ergiebt sich, in Kürze zusammengefasst, die folgende einfache Construction der Grundrissprojection S_1 der Selbstschattengrenze:

Wir ziehen durch Ω eine beliebige Gerade ΩQ^I, die den Kreis Σ in zwei Punkten β^1, β^2 schneidet, ziehen die Geraden $O_1\beta^1$, $O_1\beta^2$, welche den Kreis Ξ einerseits resp. in den Punkten μ^1, μ^2 treffen, und beschreiben um μ^1 und μ^2 mit μQ als Radius die Kreisbögen, welche ΩQ^I in den vier Punkten Q^I, Q' und Q^{II}, Q'' schneiden. Die so auf ΩQ^I erhaltenen vier Punkte Q^I, Q', Q^{II}, Q'' sind Punkte der Curve S_1. Wenn die Normalcurve C^0 eine allgemeine Epi- oder Hypocykloide ist, so muss man die Schnittpunkte μ^1, μ^2 benutzen, welche $O_1\beta^1$ und $O_1\beta^2$ oder deren resp. Verlängerungen über β^1 und β^2 mit dem Kreise Ξ bilden; wenn aber die Normalcurve C^0 eine Pericykloide ist, so muss man die Schnittpunkte μ' und μ'' benutzen, welche die über O_1 hinausgehenden Verlängerungen von $O_1\beta^1$ und $O_1\beta^2$ mit dem Kreise Ξ bilden.

In Fig. 13 ist das Schema eines Instrumentes gegeben, mit dem man die Curve S_1 zeichnen kann. Die Punkte O_1 und Ω sind fest. Bewegt man den Punkt μ^1 im Kreise um O_1, so beschreibt der Punkt Q^I einen Theil der Curve S_1. Der andere Theil derselben wird beschrieben, wenn man Q^I auf die andere Seite von β^1 legt. Die Curve S_1 ist vom achten Grade. Ihre Gleichung lässt sich leicht in Polarcoordinaten aufstellen, deren Pol Ω und deren Polaraxe ΩO_1 ist.

Die gemeine Hypo- und Pericycloide kann bekanntlich auf zweierlei Art durch verschiedene Paare von Kreisen erzeugt werden. Dasselbe gilt auch, wie Herr Durège (Schlömilch's Zeitschrift, Bd. IX S. 209) bewiesen hat, für die sternförmigen Cykloiden, d. h. für solche cyklische Curven, deren erzeugender Punkt Q durch O_1 geht und bei denen die Radien des festen und des rollenden Kreises in einem rationalen Verhältnisse stehen; demnach kann die Curve S_1, welche diesen besonderen cyklischen Curven entspricht, auch auf zweierlei Weise erzeugt werden.

18. In Fig. 10 sind die Curven S_1^a, S_1^b, S_1^c, S_1^d und S_1^e gezeichnet, die den Normalcurven entsprechen, welche die Punkte Q_a, Q_b, Q_c, Q_d und Q_e beschreiben, wenn der Kreis k auf dem Kreise Σ rollt. Die ersten drei dieser Punkte erzeugen verlängerte Epicykloiden, der Punkt Q_d beschreibt eine gemeine, der Punkt Q_e eine verkürzte Epicykloide. Den Punkt Q_c haben

wir beispielsweise so gewählt, dass $\frac{O_1 \Omega}{\mu Q_c} = \frac{O_1 \beta}{\beta \mu}$ ist. Für diesen besondern Fall ist der eine Bestandtheil der entsprechenden Curve S^c ein Kreis.

Die Normalen- oder Tangentenziehung an diese Curven ist nach der angegebenen allgemeinen Construction S. 189 sehr leicht. Um z. B. an den Curvenpunkt Q_a^I die Normale zu construiren, ziehen wir $Q_a^I \mu^1$ bis Durchschnitt M der in β^1 auf $\beta^1 \Omega$ errichteten Senkrechten. M ist dann nach den Lehren der Kinematik der Krümmungsmittelpunkt der durch Q_a beschriebenen, in der betreffenden Lage gedachten Normalcurve (cyklischen Curve). Hierauf ziehen wir $M O_1$ bis zum Durchschnitt Λ mit der in Ω auf ΩQ_a^I errichteten Senkrechten; dann ist ΛQ_a^I die Normale des Curvenpunktes Q_a^I.

In Fig. 11 ist die Curve S_1 gezeichnet, die der Normalcurve entspricht, welche durch den Punkt Q erzeugt wird, wenn der Kreis k im Innern des Kreises Σ rollt. Wir haben $\mu \beta = \frac{1}{2} O_1 \beta$ genommen und in diesem Falle ist die Normalcurve, die durch Q erzeugte verlängerte Hypocykloide, eine Ellipse. Die Normale ΛQ^I eines Punktes Q^I der Curve S_1 ist, wie man aus der gleichnamigen Bezeichnung erkennt, ebenso, wie in Fig. 10 construirt. Liegt der beschreibende Punkt Q auf dem rollenden Kreise k, dann geht die Normalcurve in eine Gerade, einen Durchmesser des Kreises Σ über. Die Schraubenfläche ist dann eine normale axiale Schraubenregelfläche, welche coaxial cylindrisch umgrenzt ist. Die Curve S_1 degenerirt dann, wenn Ω innerhalb oder auf Σ liegt, zu einem Kreise, und wenn Ω ausserhalb Σ liegt, zu einem Kreisstück.

Fig. 12 zeigt die Curve S_1 der Schraubenfläche, deren Normalcurve C ein Kreis ist. Wenn der rollende Kreis k zu einem Punkte μ degenerirt, so erzeugt der Punkt einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf Σ liegt, und die Kreise Σ und Ξ fallen zusammen. In diesem Falle vereinfacht sich die Construction der Curve S_1, welche eine Kreisconchoide ist. Um sie zu construiren, ziehen wir durch Ω eine beliebige Gerade, die den Kreis Σ in zwei Punkten β^1, β^2 schneidet, und machen auf dieser Geraden $\beta^1 Q^I = \beta^1 Q' = \mu Q$ und ebenso $\beta^2 Q^{II} = \beta^2 Q'' = \mu Q$, so sind Q^I, Q', Q^{II}, Q'' vier Punkte der Kreisconchoide. Die Normalen ΛQ^I, $\Lambda Q'$ zweier Curvenpunkte Q^I, Q' erhält man, indem man die Gerade $\beta^1 O_1$ bis zum Durchschnitt Λ der in Ω auf $\Omega \beta^1$ errichteten Senkrechten zieht.

Wenn der Punkt Ω auf dem Kreise Σ liegt, geht die Kreisconchoide in die allgemeine Peri-Cardioide über; wenn Ω im Unendlichen liegt, degenerirt die Kreisconchoide zu zwei Kreisen, welche dem Kreise Σ gleich sind. — Ist $\mu Q = 0$, so degenerirt die Normalcurve C zu einem Punkte, den wir als einen unendlich kleinen Kreis betrachten können. In diesem Falle geht die Curve S_1 in den Kreis Σ über. — Wenn die Normalcurve eine Cardioide ist, so erhalten wir für $O_1 \Omega = \infty$ als Hauptheil der Curve S_1 eine Ellipse, deren Mittelpunkt O_1 ist.



19. Es liegt nicht in unserer Absicht, die an vielen interessanten Eigenschaften so reiche Curve S_1 hier in vielen speciellen Fällen hervorzuheben. Wir wollen daher nur noch den Specialfall erörtern, in dem die Schraubenregelfläche auftritt. Ist der an Σ rollende Kreis k unendlich gross, d. h. geht k in eine Gerade über, so beschreibt ein mit dieser Geraden fest verbundener Punkt Q eine allgemeine Kreisevolvente, und die Construction der Curve S_1 modificirt sich derart, wie sie in Fig. 3a, S. 196 ausgeführt wurde*. Um nun in diesem Specialfalle an einen Punkt Q^1 der Curve S_1 (Fig. 3a) die Normale zu construiren, ziehen wir durch Q' eine nach dem auf $O_1\beta^1$ liegenden unendlich fernen Punkte μ^1 gerichtete Gerade, d. h. zu $O_1\beta^1$ die Parallele $Q'M$, welche die in β^1 auf $\beta^1\Omega$ errichtete Senkrechte in M trifft; hierauf ziehen wir O_1M bis Durchschnitt Δ der in Ω auf $\Omega\beta^1$ errichteten Senkrechten; dann ist $\Delta Q'$ die Normale des Curvenpunktes Q'.

20. Die Curve S_1 ist nach Nr. 11 nur ein Specialfall der Grundriss-Isophengen, deren allgemeine Construction in Fig. 6 gegeben wurde. Aus dieser Construction ergiebt sich leicht das in Fig. 14 gegebene Schema eines Instrumentes, mit dem man die Grundriss-Isophengen der Schraubenfläche, deren Normalcurve eine cyklische Curve ist, zeichnen kann. Der Punkt O_1 (Mittelpunkt des festen Kreises Σ) und der Punkt Δ^i (Mittelpunkt des Grundkreises k^i, dem die Intensität i entspricht) sind feste Punkte. Wird n bewegt, so beschreibt Q^I einen Theil der betreffenden Grundriss-Isophenge. Der andere Theil wird beschrieben, wenn man Q^I auf die andere Seite von β^1 legt.

Die Schattenconstruction der Schraubenfläche, deren Normalcurve eine Kreiszuglinie ist.

21. Es sei in Fig. 15 O_1 die Grundrissprojection der auf der Grundrissebene senkrechten Schraubenaxe und zugleich der asymptotische Punkt der Kreiszuglinie C (Tractorie des Kreises), welche wir als die Normalcurve der Schraubenfläche betrachten. Bezeichnen wir den Abstand des Rückkehrpunktes γ von O_1 mit $2a$ und beschreiben wir mit a als Radius um O_1 den Kreis K, so erhalten wir an einem Curvenpunkt Q die Tangente QT, indem wir auf K den Punkt T bestimmen, so dass $QT = a$ ist. Drehen wir nun die Normale QM des Curvenpunktes Q mit der Tangente QT um O_1, bis die Normale durch den durch die Lichtrichtung bestimmten Ausgangspunkt Ω geht, so gelangt T auf K nach T^I und Q in die Lage Q^I. Der Punkt Q^I ist

* Für diesen speciellen Fall wurde die angegebene Construction auf dem Wege der darstellenden Geometrie sehr mühsam abgeleitet in: Olivier, *Application de la géométrie descriptive*, p. 88, *Paris* 1847; — De la Gournerie, *Journal de l'Ecole polytechnique, Cahier* 34; — De la Gournerie, *Traité de géométrie descriptive*, *Art.* 994 — 1006, *Paris* 1864.



dann ein Punkt der Grundrissprojection S_1 der Selbstschattengrenze der Schraubenfläche. Hieraus folgt der Satz:

Die Curve S_1 wird durch den Scheitelpunkt Q^I des rechten Winkels erzeugt, dessen einer Schenkel durch den festen Punkt Ω geht, während der Endpunkt des andern Schenkels von der Länge a den Kreis K vom Radius a beschreibt.

Dieser Satz liefert eine einfache Construction der Curve S_1. Um diese Construction in den Figg. 15a und 15b auszuführen, beschreiben wir um Ω mit dem Radius a den Kreis ω, ziehen durch Ω eine beliebige Gerade ΩQ^I, auf diese in Ω eine Senkrechte, die den Kreis ω einerseits in t schneidet, führen durch t zu ΩQ^I die Parallele, welche dem Kreise K in den Punkten q^I und q^{II} begegnet, und fällen von q^I und q^{II} auf ΩQ^I Senkrechte; die Fusspunkte Q^I und Q^{II} derselben sind dann zwei Punkte der Curve S_1. Die Curve S_1 liegt symmetrisch zur Geraden $O_1\Omega$, sie hat in O_1 eine Doppeltangente, und in Ω einen Doppelpunkt, wenn $\Omega O_1 \leqq 2a$ ist (Fig. 15a). Für $O_1\Omega > 2a$ besteht die Curve S_1 aus zwei sich nur in O_1 berührenden Curventheilen, und für $O_1\Omega = \infty$ gehen diese Curventheile in zwei gleiche Kreise über, deren Radius a ist.

21. Aus der Erzeugungsweise der Kreiszuglinie folgt durch die Lehren der Kinematik, dass der Durchschnitt der Geraden O_1T (Fig. 15) mit der Normale QM der Krümmungsmittelpunkt des Curvenpunktes Q ist. Durch die besprochene Drehung der Normale um O_1 gelangt M nach M^I. Nach dem auf S. 189 abgeleiteten Satze erhalten wir dann die Normale $\varDelta Q^I$ des Punktes Q^I der Curve S_1, wenn wir die Gerade $T^I Q_1$ bis zum Durchschnitt $\varDelta$ der in Ω auf ΩQ^I errichteten Senkrechte ziehen. Diese Normalenconstruction, welche in den Figg. 15a und 15b ausgeführt ist, ergiebt sich auch direct auf kinematischem Wege aus der angegebenen Erzeugungsweise der Curve S_1.

Bestimmung der Schraubenfläche, deren Schlagschattencontour theilweise aus einem gegebenen Kreise besteht.

22. Es sei in Fig. 16 $\Omega\Phi$ die zur Grundrissprojection der Lichtrichtung l_1 parallele gerade Polbahn, $\varkappa$ der rollende Kreis, dessen Mittelpunkt O_1 die Grundrissprojection der Schraubenaxe ist, Ω der Ausgangspunkt und S'_s der gegebene Kreis, welcher einen Bestandtheil der Schlagschattencontour S_s der Schraubenfläche bildet. Die beliebige Lage des Kreises S'_s, dessen Radius wir durch a bezeichnen, haben wir so genommen, dass sein Mittelpunkt P_s senkrecht unter der Mitte XII der geraden Polbahn $\Omega\Phi$ liegt.

Um die Normalcurve C_0 der Schraubenfläche, wie in Nr. 12 gelehrt wurde, zu construiren, ziehen wir durch den Mittelpunkt P_s eine Gerade P_sIV, die mit S'_s die Schnittpunkte Q^I_s, Q'_s bildet. Durch Ω ziehen wir zu P_sIV die Parallele ΩP_1, welche die durch Q^I_s und Q'_s zu l_1 parallel ge-

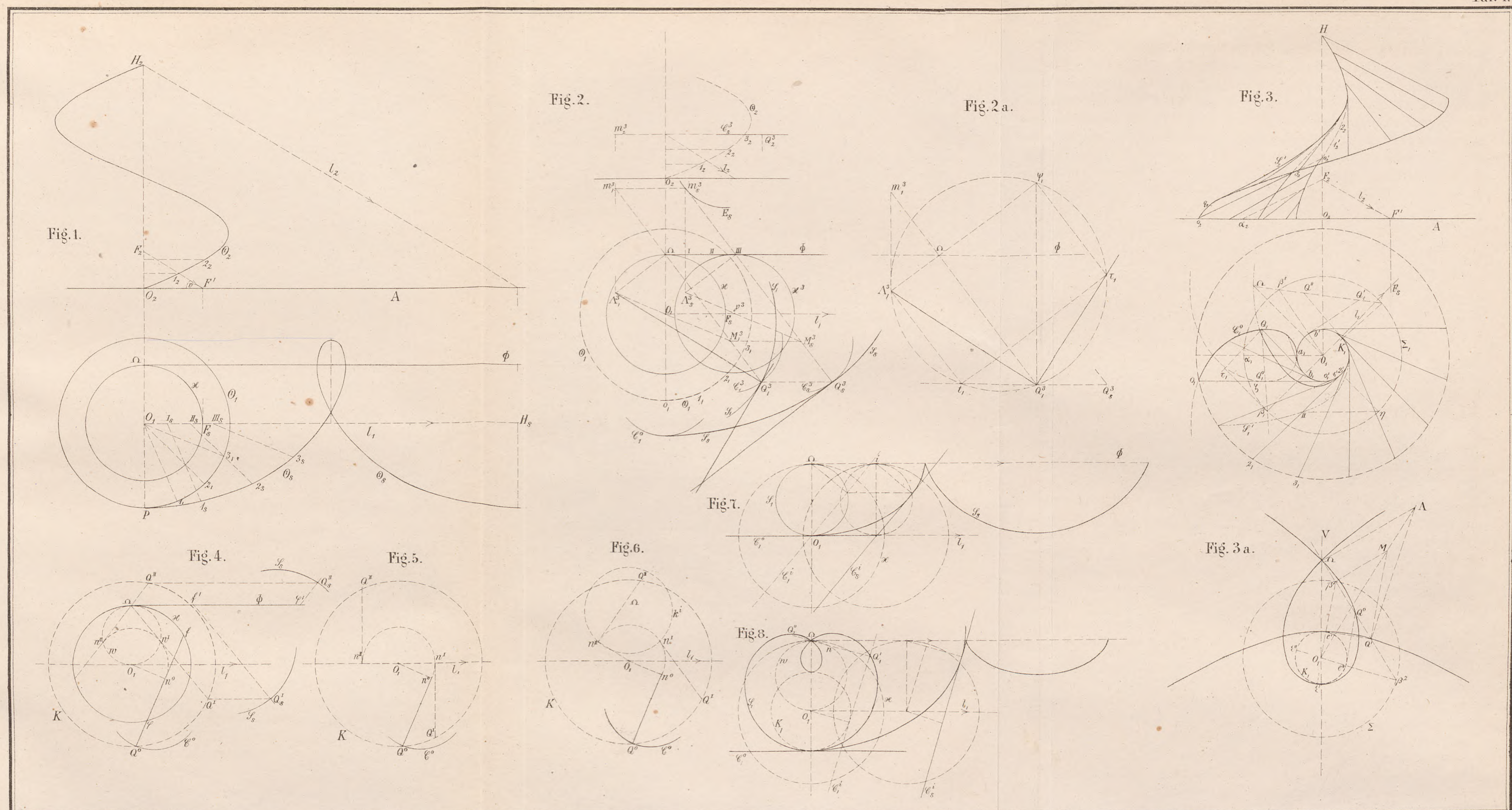
zogenen Geraden in den Punkten Q^I_1 und Q'_1 der Curve $S^I_1 S'_1$ trifft. Da $P_1 Q^I_1 = P_1 Q'_1 = a$ ist, so folgt, dass die Curve $S^I_1 S'_1$ eine Conchoide ist. Fällen wir von P_1 auf $\Omega\Phi$ die Senkrechte $P_1 \Delta$, so ist das rechtwinklige Dreieck $\Omega\Delta P_1$ dem rechtwinkligen Dreieck IV XII P_s congruent. Machen wir nun auf dem Kreise $\varkappa$ den Bogen $\Omega\varkappa 4 = \Omega$IV und drehen wir das rechtwinklige Dreieck $\Omega\Delta P_1$ um O_1, bis Ω in 4 gelangt, so geht es in die Lage $4\Delta_0 P_0$ über und die auf ΩP_1 liegenden Punkte Q^I_1, Q'_1 nehmen resp. die Lagen Q^I_0 und Q'_0 an. Diese Punkte Q^I_0, Q'_0 sind zwei Punkte der Normalcurve C_0. In dem rechtwinkligen Dreieck $4\Delta_0 P_0$ ist die Kathete $4\Delta_0 = \text{IV XII} = 4\widehat{\varphi 12}$ und sie tangirt den Kreis $\varkappa$ in 4, ferner ist die Kathete $P_0 \Delta_0 = P_s$XII constant. Demnach liegt der Punkt P_0 auf einer allgemeinen Kreisevolvente E'_0, welche der Punkt P_0 beschreibt, wenn die Tangente $\Delta_0 4$ auf dem Kreise $\varkappa$ rollt. Hieraus folgt:

Die Normalcurve C_0 der gesuchten Schraubenfläche ist die beiderseitige, im Abstande a befindliche Aequidistante der allgemeinen Kreisevolvente E'_0.

Da diese Aequidistante in Bezug auf die Gerade $O_1\Omega$ symmetrisch liegt, so erhalten wir nach dem in Nr. 9 hervorgehobenen Satze auf der Geraden ΩP_1, welche den über $O_1\Omega$ als Durchmesser beschriebenen Kreis w in n schneidet, noch zwei Punkte Q^1, Q^2 der Curve S_1, indem wir $nQ^1 = nQ'_1$ und $nQ_1^I = nQ^2$ machen. Die Curve S_1 besteht also ausser der Conchoide $S^I_1 S'_1$ noch aus den Curventheilen S_1^1 und S_1^2.

Drehen wir die Gerade $4P_0$, welche den Kreis $\varkappa$ noch in dem Punkte φ schneidet, um O_1, bis φ in Ω fällt, so gelangen Q^I_0, Q'_0 resp. in die Lagen Q^{II}_1, Q''_1, welche auch zwei Punkte der Curve S_1 sind. Machen wir auf der geraden Polbahn $\Omega\Phi$ die Strecke $\Omega\varphi' = \Omega\widehat{\varkappa\varphi}$ und ziehen wir durch φ' zu ΩQ_1^{II} die Parallele $\varphi' Q_s^{II}$, welche die durch Q^{II}_1 und Q''_1 zu $\Omega\Phi$ parallelen Geraden in Q^{II}_s und Q''_s trifft, so sind Q^{II}_s und Q''_s zwei Punkte der Curventheile S^{II}_s und S''_s der Schlagschattencontour S_s, über die wir nicht willkürlich verfügen konnten.

Für $a = 0$ geht der Kreis S'_s in den Punkt P_s, die Normalcurve C_0 in die allgemeine Kreisevolvente E'_0 und die Conchoide $S^I_1 S'_1$ in die Gerade $P_1 P_s$ über. Die Schraubenfläche ist in diesem Falle eine Schraubenregelfläche, bei der auf jeder Windung eine Mantellinie der Lichtrichtung parallel ist.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 2 a.
Fig. 3.
Fig. 3 a.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

VII.

Mathematische Bestimmung der in den diatonischen Dur-Tonleitern vorkommenden Zahlenverhältnisse und der zwischen den einzelnen Tönen bestehenden Consonanz.

Von

V. SCHLEGEL,
Gymnasiallehrer zu Waren in Mecklenburg.

(Hierzu Taf. II, Fig. 17—21.)

1. Bestimmung der Zahlenverhältnisse.

1. Die durch die Praxis hergestellte und uns überlieferte diatonische Durtonleiter hat folgende Eigenschaften, die als zufällig erscheinen: 1. die Anzahl der zwischen den Grundton und seine Octave eingeschalteten Töne, 2. die Reihenfolge der Grundtöne in den verschiedenen Tonleitern, 3. die beim Uebergange zu einer neuen Tonleiter erfolgende Einschaltung eines neuen Tones in der Septime, resp. Quart. Von diesen Umständen abhängig sind die Zahlenverhältnisse der Töne, die noch ausserdem 4. in möglichst kleinen Zahlen ausgedrückt sind, weil, wie die Erfahrung zeigt und wie wir später auch theoretisch darlegen werden, die Consonanz innerhalb der Tonleiter wesentlich von diesem Umstande abhängig ist. 5. Ausserdem sind diese Werthe offenbar durch das Bedürfniss bestimmt, die Tonleiter für jeden Grundton rein zu erhalten, mit Hinzufügung einer möglichst geringen Anzahl von Zwischentönen.

Es wird daher möglich sein, aus den oben gegebenen fünf Daten die Zahlenverhältnisse abzuleiten. Dabei wird sich zeigen, ob die bekannten Zahlenverhältnisse die einzige Lösung der Aufgabe bilden, oder ob andere Werthgruppen in gleichem Grade genügen. Gleichzeitig wird ersichtlich sein, wie die Aufgabe in jedem einzelnen der fünf Punkte sich abändern oder generalisiren liesse.

Wir stellen uns demnach die Aufgabe, zwischen 1 und 2 sechs Zahlen $x_1 \ldots x_6$ zu finden, welche folgenden Bedingungen genügen:

Wählt man aus der Reihe x_0, x_1, $x_2 \ldots x_6$, $2x_0$, $2x_1 \ldots 2x_6$, $4x_0 \ldots$ beliebige Gruppen von sechs aufeinanderfolgenden Zahlen (wobei $x_0 = 1$ ist), so soll der Quotient aus der 1ten und n^{ten} dieser sechs Zahlen in jeder Gruppe denselben Werth behalten, jedoch unter Berücksichtigung folgender Beschränkung:

Bildet man der Reihe nach die Gruppen mit den Anfangsgliedern x_0, x_4, x_1, x_5, x_2, x_6 (Fig. 17), (was darauf hinaus kommt, dass man in dem Siebeneck, dessen Ecken mit 0 ... 6 bezeichnet sind, von Null ausgehend, jede vierte Ecke nimmt), so hat man, von der zweiten anfangend, das jedesmalige Endglied x_n durch y_n zu ersetzen und diesen Werth in allen folgenden Gruppen beizubehalten. Ebenso findet man, nach entgegengesetzter Richtung zählend, eine Reihe von Anfangsgliedern mit den Indices 0, 3, 6, 2, 5, 1, worin man, von der zweiten Gruppe anfangend, das jedesmalige Mittelglied x_p durch z_p ersetzen wird.

Die unter diesen Bedingungen gebildeten zweimal sechs Gruppen sind:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	x_5	x_6	$2\,x_0$	$2\,x_1$	$2\,x_2$	$2\,y_3$
x_1	x_2	y_3	x_4	x_5	x_6	$2\,y_0$
x_5	x_6	$2\,y_0$	$2\,x_1$	$2\,x_2$	$2\,y_3$	$2\,y_4$
x_2	y_3	y_4	x_5	x_6	$2\,y_0$	$2\,y_1$
x_6	$2\,y_0$	$2\,y_1$	$2\,x_2$	$2\,y_3$	$2\,y_4$	$2\,y_5$

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	x_4	x_5	z_6	$2\,x_0$	$2\,x_1$	$2\,x_2$
z_6	$2\,x_0$	$2\,x_1$	$2\,z_2$	$2\,x_3$	$2\,x_4$	$2\,x_5$
z_2	x_3	x_4	z_5	z_6	$2\,x_0$	$2\,x_1$
z_5	z_6	$2 \cdot x_0$	$2\,z_1$	z_2	x_3	x_4
z_1	z_2	x_3	z_4	z_5	z_6	$2\,x_0$

Es handelt sich also der Reihe nach um die Bestimmung der Grössen x, y, z in rationalen, möglichst kleinen Zahlen.

2. Für die Grössen x hat man nun folgende Gleichungen, die sowohl aus dem linken, wie aus dem rechten System folgen:

1. 2. 3. 4. 5. 6.

Terz: I. $\left[\frac{x_0}{x_2}\right] = \left[\frac{x_4}{x_6}\right]$,

Sext: II. $\frac{x_0}{x_5} = \frac{x_1}{x_6} = \frac{x_4}{2\,x_2}$,

Secunde: III. $\left[\frac{x_0}{x_1}\right] = \left[\frac{x_1}{x_2}\right] = \left(\frac{x_4}{x_5}\right) = \left(\frac{x_5}{x_6}\right)$,

Quint: IV. $\frac{x_0}{x_4} = \frac{x_1}{x_5} = \left(\frac{x_2}{x_6}\right) = \frac{x_4}{2\,x_1} = \left(\frac{x_5}{2\,x_2}\right)$.

Quart: V. $\frac{x_0}{x_3} = \frac{x_1}{x_4} = \left[\frac{x_2}{x_5}\right] = \left(\frac{x_4}{2\,x_0}\right) = \left(\frac{x_5}{2\,x_1}\right) = \left(\frac{x_6}{2\,x_2}\right)$.

Nun sind folgende Gleichungen äquivalent:

I 12, IV 13, V 46,
II 13, IV 15,
IV 12, V 45, III 13,
IV 14, V 24,
V 23, III 23,
II 12, III 14.

Es können also die in runde Klammern geschlossenen Verhältnisse übergangen werden. Ferner ist:

II 23 × IV 14 = I 12,
II 13 : IV 14 = V 23,
II 13 : IV 24 = III 12.

Es können also auch die in eckige Klammern geschlossenen Verhältnisse wegfallen.

Demnach bleibt zur Bestimmung von $x_1 \dots x_6$ das System:

$$\frac{x_0}{x_5} = \frac{x_1}{x_6} = \frac{x_4}{2x_2},$$
$$\frac{x_0}{x_4} = \frac{x_1}{x_5} = \frac{x_4}{2x_1},$$
$$\frac{x_0}{x_3} = \frac{x_1}{x_4}.*$$

Die Verhältnisse, welche die nur einmal vorkommenden Grössen x_2, x_3 und x_6 enthalten, sind nur zur Bestimmung dieser Grössen brauchbar. Es bleibt also:

$$\frac{x_0}{x_4} = \frac{x_1}{x_5} = \frac{x_4}{2x_1}.$$

Das erste System enthält fünf Gleichungen und sechs Unbekannte, das zweite zwei Gleichungen und drei Unbekannte. Aber unter diesen drei Verhältnissen ist das mittelste, welches die nur noch einmal vorkommende Grösse x_5 enthält, auch nicht mehr brauchbar; es bleibt also zur unmittelbaren Auflösung nur die zwei Unbekannte enthaltende Gleichung:

$$\frac{x_0}{x_4} = \frac{x_4}{2x_1}$$

oder, wenn wir für x_0 seinen Werth 1 setzen:

$$x_4^2 = 2x_1.$$

3. Da x_1 und x_4 irreducible Brüche sein sollen, so kann man setzen:

$$x_4 = \frac{\alpha_4}{\beta_4};\ x_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1},$$

worin α_4 und β_4, sowie α_1 und β_1 relative Primzahlen sind. Es folgt:

$$\frac{\alpha_4^2}{\beta_4^2} = 2\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Nun kann β_1 eine ungerade oder gerade Zahl sein.

Im ersten Falle zerfällt die letzte Gleichung in die beiden folgenden:

$$\alpha_4^2 = 2\alpha_1;\ \beta_4^2 = \beta_1.$$

* Aus diesen Gleichungen folgt, wenn wir $x_0 = 1$ setzen: $x_4 = x_1 x_3$; $x_5 = x_1 x_4$; $x_6 = x_1 x_5$; d. h. $x_3 < x_4 < x_5 < x_6$. Ferner: $2x_1 = x_4^2$; $2x_2 = x_4 x_5$; d. h. $x_1 < x_2$. Endlich: $2x_2 = x_3 . x_6$. Da nun $x_6 < 2$, so muss $x_3 > x_2$ sein. Mithin hat man:

$$1 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < 2.$$

Es muss also α_4^2 durch 2, d.h. α_4 durch 2 und α_4^2 durch 4 theilbar sein oder, was dasselbe ist: α_1 durch 2.

Sei nun

$$\alpha_1 = 2\,\delta_1,$$

so ist

$$\alpha_4^2 = 4\,\delta_1,\ \beta_4^2 = \beta_1.$$

Der kleinste Werth, den β_4 haben kann, ist 3, woraus $\beta_1 = 9$ folgt.

Nun soll sein

$$2 > \frac{\alpha_1}{\beta_1} > 1$$

oder

$$2 > \frac{2\,\delta_1}{\beta_1} > 1,$$

d. h.

$$1 > \frac{\delta_1}{\beta_1} > \tfrac{1}{2}$$

oder für $\beta_1 = 9$

$$9 > \delta_1 > 4\tfrac{1}{2}.$$

Ausserdem soll δ_1 Quadratzahl sein. Da aber zwischen $4\frac{1}{2}$ und 9 keine Quadratzahl liegt, so führt der Werth $\beta_4 = 3$ zu keiner Lösung.

Aus $\beta_4 = 5$ folgt: $\beta_1 = 25$; $25 > \delta_1 > 12\frac{1}{2}$; also $\delta_1 = 16$; $\alpha_1 = 32$; $\alpha_4 = 8$; mithin $x_1 = \frac{32}{25}$, $x_4 = \frac{8}{5}$. Aber aus $x_5 = x_1\,x_4$ folgt $x_5 = \frac{256}{125}$, d. h. $x_5 > 2$, was gegen die Bedingung ist. Um so mehr wird $x_6\ (= x_1\,x_5) > 2$ sein.

Bei weiterer Untersuchung zeigt sich, dass erst $\beta_4 = 11$ und $\delta_1 = 64$ für $x_1 \ldots x_6$ eine Reihe von Werthen geben, welche der Bedingung $2 > x_n > 1$ genügen. Aber die Brüche sind in zu grossen Zahlen ausgedrückt, um für unsern Zweck brauchbar zu sein, und dieser Uebelstand wächst, wie leicht zu sehen ist, mit der Grösse von β_4.

Im zweiten Falle sei $\beta_1 = 2\,\gamma_1$, dann lautet die Gleichung:

$$\frac{\alpha_4^2}{\beta_4^2} = \frac{\alpha_1}{\gamma_1},$$

woraus folgt:

$$\alpha_4^2 = \alpha_1,\ \beta_4^2 = \gamma_1.$$

Der kleinste Werth, den β_4 haben kann, ist 2; daraus folgt:

$$\beta_4 = 2,\ \gamma_1 = 4.$$

Nun soll sein

$$2 > \frac{\alpha_4}{\beta_4} > 1,$$

folglich

$$4 > \frac{\alpha_4^2}{\beta_4^2} > 1$$

oder

$$4 > \frac{\alpha_1}{\gamma_1} > 1.$$

Setzen wir für γ_1 seinen Werth, so geht diese Bedingung über in

$$16 > \alpha_1 > 4.$$

Ausserdem soll α_1 Quadratzahl sein, folglich $\alpha_1 = 9$.

Daraus ergiebt sich weiter:

$$\alpha_4 = 3,\ \beta_1 = 8,$$

$$x_1 = \tfrac{9}{8},\ x_4 = \tfrac{3}{2}.$$

Ferner

$$x_3 = \frac{x_4}{x_1} = \tfrac{4}{3}.$$

Ferner:

$$x_5 = x_1\, x_4 = \tfrac{27}{16} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{5}}}.$$

Der vorletzte Näherungswerth dieses Kettenbruches ist $\frac{5}{3}$, also $x_5 = (\frac{5}{3})_1$, wenn wir die Näherungsbrüche vom letzten an mit den Indices 0, 1 ... bezeichnen.

Ferner:

$$x_6 = x_1\, x_5 = (\tfrac{15}{8})\ (\text{genau: } \tfrac{243}{128}),$$

$$x_2 = \frac{x_4\, x_5}{2} = (\tfrac{5}{4})\ (\text{genau: } \tfrac{81}{64}).$$

Demnach heissen die Zahlenwerthe der Reihe nach:

$$\begin{array}{cccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7, \\ 1 & \frac{9}{8} & (\frac{5}{4}) & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & (\frac{5}{3}) & (\frac{15}{8}) & 2, \\ c & d & e & f & g & a & h & \bar{c}. \end{array}$$

4. Da die in Klammern geschlossenen Zahlen nur die Genauigkeit eines vorletzten Näherungsbruches besitzen, so sieht man, dass schon in der *C*dur-Tonleiter jene Ungenauigkeit herrscht, die bei der Bildung der anderen Tonleitern nöthig wird. Ebenso sieht man, dass nur diejenigen Intervalle rein sein können, welche zwischen zwei reinen oder zwei ungenauen Tönen bestehen. In der folgenden Tafel sind die reinen und die unreinen Intervalle übersichtlich zusammengestellt, wobei der erste Ton jedesmal einer der Grundtöne ist.

		Reine Intervalle.		Unreine Intervalle.
Secunden	$\frac{9}{8}$	*cd, fg, ah.*	$\frac{10}{9}$	*de, ga.*
Terzen			$\frac{5}{4}$	*ce, fa, gh.*
Quarten	$\frac{4}{3}$	*cf, dg, ea,* $g\bar{c}$, $h\bar{e}$.	$\frac{27}{20}$	$a\bar{d}$.
Quinten	$\frac{3}{2}$	*cg, eh,* $f\bar{c}$, $g\bar{d}$, $a\bar{e}$.	$\frac{40}{27}$	*da.*
Sexten	$\frac{27}{16}$	$f\bar{d}$.	$\frac{5}{3}$	*ca, dh,* $g\bar{e}$.
Septimen			$\frac{15}{8}$	*ch,* $f\bar{e}$.

Man bemerkt, dass der Quotient aus einem reinen und dem entsprechenden unreinen Intervalle überall gleich $\frac{80}{81}$ oder $\frac{81}{80}$ ist.

Wenn wir den Begriff des Intervalles dahin erweitern, dass wir auch andere Töne als den Grundton in die erste Stelle des Intervalles bringen, so erhalten wir folgende weitere Gruppe:

		Reine Intervalle.		Unreine Intervalle.
Secunden			$\frac{16}{15}$	ef, $h\overline{c}$.
Terzen	$\frac{32}{27}$	df.	$\frac{6}{5}$	eg, $a\overline{c}$, $h\overline{d}$.
Quarten			$\frac{45}{32}$	fh.
Quinten			$\frac{64}{45}$	$h\overline{f}$.
Sexten			$\frac{8}{5}$	$e\overline{c}$, $a\overline{f}$, $h\overline{g}$.
Septimen	$\frac{16}{9}$	$d\overline{c}$, $g\overline{f}$, $h\overline{a}$.	$\frac{9}{5}$	$e\overline{d}$, $a\overline{g}$.

Wenn wir die Intervalle der oberen Gruppe **Hauptintervalle** und diejenigen der unteren **Nebenintervalle** nennen, so finden sich die Gesetze, dass der Quotient aus einem reinen und dem gleichnamigen unreinen Intervall jedesmal $\frac{80}{81}$ oder $\frac{81}{80}$, derjenige aus einem Hauptintervall und dem gleichnamigen Nebenintervall $\frac{24}{25}$ oder $\frac{25}{24}$ beträgt.

Wenn der Unterschied zwischen reinen und unreinen Intervallen nicht berücksichtigt werden soll, so kann man überall das kleinere Zahlenverhältniss an Stelle des grösseren setzen und erhält die folgenden Werthe:

	Secunde.	Terz.	Quart.	Quint.	Sext.	Septime
Hauptinterv.	$\frac{9}{8}$	$(\frac{5}{4})$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{5}{3})$	$(\frac{15}{8})$
Neheninterv	$(\frac{16}{15})$	$(\frac{6}{5})$	$(\frac{45}{32})$, $(\frac{7}{5})_1$	$(\frac{64}{45})$, $(\frac{10}{7})_2$	$(\frac{8}{5})$	$(\frac{9}{5})$

Die in dieser Tabelle eingeklammerten Intervalle unterscheiden sich also von den reinen nur um den Factor $\frac{80}{81}$ oder $\frac{81}{80}$, die beiden Intervalle $\frac{7}{5}$ und $\frac{10}{7}$ ausserdem noch um $\frac{224}{225}$, resp. $\frac{225}{224}$. Ebenso sind durch die in der Tabelle enthaltenen reinen Intervalle noch diejenigen unreinen dargestellt, welche sich von ihnen nur um den Factor $\frac{80}{81}$ oder $\frac{81}{80}$ unterscheiden.

5. **Bestimmung der Grössen y.** Die Gleichungen, welche zur Bestimmung dieser Grössen dienen, sind:

$$\frac{x_0}{x_6} = \frac{x_4}{2\,y_3} = \frac{x_1}{2\,y_0} = \frac{x_5}{2\,y_4} = \frac{x_2}{2\,y_1} = \frac{x_6}{2\,y_5}.$$

Hieraus folgt

$$y_3 = \frac{x_4\,x_6}{2};\quad y_0 = \frac{x_1\,x_6}{2};\quad y_4 = \frac{x_5\,x_6}{2};\quad y_1 = \frac{x_2\,x_6}{2};\quad y_5 = \frac{x_6 \cdot x_6}{2}$$

oder

$$y_3 = \tfrac{45}{32};\quad y_0 = \tfrac{135}{128};\quad y_4 = \tfrac{25}{16};\quad y_1 = \tfrac{75}{64};\quad y_5 = \tfrac{225}{128}.$$

Da die Zahlen x_2, x_5, x_6 um den Factor $\frac{80}{81}$ zu klein sind, so sind y_3 und y_0 um $\frac{80}{81}$, dagegen y_4, y_1, y_5 um $(\frac{80}{81})^2$ zu klein.

Im Folgenden sind die Zahlen y_0, y_1, y_3, y_4, y_5 mit ihren Benennungen, ihren Werthen, den Näherungsbrüchen und deren Ungenauigkeitsquotienten zusammengestellt.

	y_0	$\bar{y}_1$	y_3	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_5$
Benennung.	*cis*	*dis*	*fis*	*gis*	*ais*
Werth.	$\frac{135}{128}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{45}{32}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{225}{128}$
Näherungsbruch.	$(\frac{19}{18})_2$	$(\frac{7}{6})_2$	$(\frac{7}{5})_1$	$(\frac{11}{7})_1$	$(\frac{7}{4})_3$
Ungenauigkeitsquotient.	$\frac{1215}{1216}$	$\frac{225}{224}$	$\frac{225}{224}$	$\frac{175}{176}$	$\frac{225}{224}$
Werth des entsprechenden x.	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{5}{3})$

Mit Rücksicht darauf, dass die Werthe der Grössen y selbst ungenau sind, wird man mit den in dieser Tabelle befindlichen Ungenauigkeitsquotienten noch in $\frac{80}{81}$, resp. $(\frac{80}{81})^2$ zu dividiren haben, um die wahre Ungenauigkeit zu ermitteln.

Die Zahlen y unterscheiden sich von den gleichnamigen x um den Factor $\frac{25}{24}$ (für die Indices 1, 4) oder $\frac{135}{128}$ (für die Indices 0, 3, 5). Der Quotient dieser beiden Zahlen ist $\frac{80}{81}$ oder gleich dem Unterschiede zwischen einem reinen und einem unreinen Intervalle.

6. Bestimmung der Grössen z. Die Gleichungen, welche zur Bestimmung dieser Grössen dienen, sind:

$$\frac{x_0}{x_3} = \frac{x_3}{z_6} = \frac{z_6}{2\,z_2} = \frac{z_2}{z_5} = \frac{z_5}{2\,z_1} = \frac{z_1}{z_4}.$$

Hieraus folgt:

$$z_6 = x_3^2;\quad z_2 = \frac{x_3 z_6}{2};\quad z_5 = x_3\,z_2;\quad z_1 = \frac{x_3\,z_5}{2};\quad z_4 = x_3\,z_1.$$

Da die Zahl x_3 eine genaue ist, so werden auch sämmtliche z genaue Zahlen sein; es wird daher verstattet sein, sie durch Näherungsbrüche mit der Ungenauigkeit $\frac{80}{81}$ zu ersetzen. Die genauen Werthe sind nun:

$$z_6 = \tfrac{16}{9};\quad z_2 = \tfrac{32}{27};\quad z_5 = \tfrac{128}{81};\quad z_1 = \tfrac{256}{243};\quad z_4 = \tfrac{1024}{729}.$$

$$\text{Nun ist } \tfrac{16}{9} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 - \frac{1}{2}}}.$$

Die erste Entwickelung giebt als vorletzten Näherungsbruch $\frac{7}{4}$. Da aber der Quotient $\frac{16}{9} : \frac{7}{4} = \frac{64}{63}$ zu gross ist, so wählen wir die zweite Entwickelung mit dem vorletzten Näherungsbruch. Derselbe heisst $\frac{9}{5}$ und hat, da $\frac{16}{9} : \frac{9}{5} = \frac{80}{81}$ ist, den geforderten Grad von Genauigkeit. — Unter Zugrundelegung dieser Zahl ergeben sich folgende Werthe, die sämmtlich die gleiche Ungenauigkeit $\frac{80}{81}$ haben: $z_6 = \frac{9}{5}$, $z_2 = \frac{6}{5}$, $z_5 = \frac{8}{5}$, $z_1 = \frac{16}{15}$, $z_4 = \frac{64}{45}$. Nur für den letzten dieser Brüche wird es zum Zwecke der Erlangung kleinerer Zahlen nöthig sein, einen weiteren Näherungsbruch zu berechnen.

Im Folgenden sind die Zahlen z_1, z_2, z_4, z_5, z_6 mit ihren Benennungen, ihren Werthen, dem Näherungsbruche von z_4 und seinem Ungenauigkeitsquotienten zusammengestellt.

	z_1.	z_2.	z_4.	z_5.	z_6.
Benennung.	*des*	*es*	*ges*	*as*	*b*
Werth.	$\frac{16}{15}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$
Näherungsbruch.	—	—	$(\frac{10}{7})_2$	—	—
Ungenauigkeitsquotient.	—	—	$\frac{224}{225}$	—	
Werth des entsprechenden x.	$\frac{9}{8}$	$(\frac{5}{4})$	$(\frac{3}{2})$	$(\frac{5}{3})$	$(\frac{15}{8})$

Die Zahlen z unterscheiden sich von den gleichnamigen x um den Factor $\frac{24}{25}$ (für die Indices 2, 5, 6) oder $\frac{128}{135}$ (für die Indices 1, 4).

Dagegen sind die Quotienten: $\frac{cis}{des} = \frac{fis}{ges} = \frac{2025}{2048}$ und $\frac{dis}{es} = \frac{gis}{as} = \frac{ais}{b} = \frac{125}{128}$ [da *dis*, *gis*, *ais* um $(\frac{80}{81})^2$, *cis* und *fis* aber nur um $\frac{80}{81}$ zu klein sind. In der That ist $\frac{2025}{2048} \cdot \frac{80}{81} = \frac{125}{128}$].

7. In der folgenden Tafel sind nun die Tonleitern der verschiedenen Grundtöne zusammengestellt.

Erläuterungen: 1. Klammern mit dem Index n sind, um den genauen Werth des Verhältnisses zu bekommen, mit $(\frac{81}{80})^n$ zu multipliciren. 2. Die eckigen Klammern sind mit $\frac{81}{80}$, resp. $\frac{80}{81}$ zu multipliciren, um alle Tonleitern mit derjenigen von c identisch zu machen. 3. Das Verhältniss $a : b$ wird $\frac{50}{27}$ statt $\frac{243}{128}$, weil die beiden Töne aus verschiedenen Entwickelungen von Näherungsbrüchen hervorgegangen sind.

Quintencirkel.

c.	cis	d.	dis.	e.	f.	fis.	g.	gis.	a.	ais.	h.	$\bar{c}$.	$\overline{cis}$.	$\bar{d}$.	$\overline{dis}$.	$\bar{e}$.	$\bar{f}$.	$\overline{fis}$.	$\bar{g}$.	$\overline{gis}$.	$\bar{a}$.	$\overline{ais}$.	$\bar{h}$.
1	$(\frac{135}{128})_1$	$\frac{9}{8}$	$(\frac{75}{64})_2$	$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{45}{32})_1$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{25}{16})_2$	$(\frac{5}{3})_1$	$(\frac{225}{128})_2$	$(\frac{15}{8})_1$	2	$(\frac{135}{64})_1$	$\frac{9}{4}$	$(\frac{75}{32})_2$	$(\frac{5}{2})_1$	$\frac{8}{3}$	$(\frac{45}{16})_1$	3	$(\frac{25}{8})_2$	$(\frac{10}{3})_1$	$(\frac{225}{64})_2$	$(\frac{15}{4})_1$
1		$\frac{9}{8}$		$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$(\frac{5}{3})_1$		$(\frac{15}{8})_1$												
							1		$[\frac{10}{9}]_1$		$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$(\frac{5}{3})_1$		$(\frac{15}{8})_1$					
		1		$[\frac{10}{9}]_1$		$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$		$[\frac{40}{27}]_1$		$(\frac{5}{3})_1$		$(\frac{15}{8})_1$										
									1		$\frac{9}{8}$		$[\frac{81}{64}]_0$	$[\frac{27}{20}]_1$		$\frac{3}{2}$		$[\frac{27}{16}]_0$		$(\frac{15}{8})_1$			
				1		$\frac{9}{8}$		$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$[\frac{27}{16}]_0$		$(\frac{15}{8})_1$								
											1		$\frac{9}{8}$		$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$(\frac{5}{3})_1$		$(\frac{15}{8})_1$	

Quartencirkel.

c.	des.	d.	es.	e.	f.	ges.	g.	as.	a.	b.	h.	$\bar{c}$.	$\overline{des}$.	$\bar{d}$.	$\overline{es}$.	$\bar{e}$.	$\bar{f}$.	$\overline{ges}$.	g.	$\overline{as}$.	$\bar{a}$.	$\bar{b}$.	$\bar{h}$.
1	$(\frac{16}{15})_1$	$\frac{9}{8}$	$(\frac{6}{5})_1$	$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{64}{45})_1$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{8}{5})_1$	$(\frac{5}{3})_1$	$(\frac{9}{5})_1$	$(\frac{15}{8})_1$	2	$(\frac{32}{15})_1$	$\frac{9}{4}$	$(\frac{12}{5})_1$	$(\frac{5}{2})_1$	$\frac{8}{3}$	$(\frac{128}{45})_1$	3	$(\frac{16}{5})_1$	$(\frac{10}{3})_1$	$(\frac{18}{5})_1$	$(\frac{15}{4})_1$
1		$\frac{9}{8}$		$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$(\frac{5}{3})_1$		$(\frac{15}{8})_1$												
					1		$\frac{9}{8}$		$(\frac{5}{4})_1$	$[\frac{27}{20}]_1$		$\frac{3}{2}$		$[\frac{27}{16}]_0$		$(\frac{15}{8})_1$							
										1		$[\frac{10}{9}]_1$		$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$		$[\frac{40}{27}]_1$		$(\frac{5}{3})_1$		$[\frac{50}{27}]_0$		
			1		$[\frac{10}{9}]_1$		$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$(\frac{5}{3})_1$		$(\frac{15}{8})_1$									
								1		$\frac{9}{8}$		$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$(\frac{5}{3})_1$		$(\frac{15}{8})_1$				
	1		$\frac{9}{8}$		$(\frac{5}{4})_1$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$[\frac{27}{16}]_0$		$(\frac{15}{8})_1$											

8. Um auch die Tonleitern der eingeschalteten Töne bilden zu können, müssen wir neue Grössen berechnen, nämlich zunächst y_2 für *fis* und y_6 für *cis*, z_0 für *ges* und z_3 für den Ton, welcher z_0 entspricht. Nun ist $y_2 = \frac{y_3 . x_6}{2}$ $= \frac{675}{512}$ oder $(\frac{4}{3})_3$, und da $\frac{675}{512} : \frac{4}{3} = \frac{2025}{2048} = \frac{1}{1 + \frac{1}{88 + \frac{1}{23}}}$; also $= (\frac{88}{89})_1$ ist, so kann man $y_2 = \frac{4}{3} = x_3$ setzen. Ebenso ist $y_6 = y_0 x_6 = \frac{135}{128} . \frac{15}{8} = \frac{2025}{1024}$ $= (2)_4$, und da $\frac{2025}{1024} : 2 = \frac{2025}{2048}$ ist, wie oben, so kann man $y_6 = 2 = 2 x_0$ setzen. Ebenso findet man weiter, dass die den Grundtönen *gis*, *dis*, *ais* entsprechenden neuen Töne durch resp. *g*, *d*, *a* ersetzt werden können, so dass die Einschaltung neuer Töne in diesem Zirkel unnöthig ist.

Ferner ist $z_0 = z_4 x_3 = \frac{256}{135} = (\frac{15}{8})$, und da $\frac{256}{135} : \frac{15}{8} = \frac{2048}{2025}$, wie oben, so kann man $z_0 = x_6$ setzen. Da nun $z_3 = \frac{z_0 x_3}{2}$, so folgt $z_3 = \frac{15}{8} . \frac{4}{3} : 2 = \frac{5}{4}$ $= x_2$, wie zu erwarten war. Demnach heisst
der vollständige Quintenzirkel (Fig. 18): *c g d a e h* ‖ *fis cis gis dis ais f c*,
der vollständige Quartenzirkel (Fig. 19): *c f b es as des* ‖ *ges h e a d g c*.

9. Je nach der Stelle, an welcher man beim Uebergange von der ersten zur zweiten Tonleiter einen neuen Ton einschiebt, erhält man verschiedene Arten von Tonleitern. Die oben berechnete, wo die Einschiebung stets an der siebenten Stelle (Septime), resp. vierten stattfindet, heisst Dur-Tonleiter. Schiebt man den neuen Ton stets an der zweiten, resp. sechsten Stelle ein, so erhält man die sogenannte Moll-Tonleiter.

Ueberhaupt können folgende Einschiebungen gemacht werden:

im Quintenzirkel an 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. Stelle,

im Quartenzirkel an 5. 6. 7. 1. 2. 3. 4. Stelle.

Also giebt es sieben Tonleitern, die im Quinten- und Quartenzirkel fortschreiten. Man erhält dieselben, wenn man in der *C*dur-Tonleiter *c d e f g a h* der Reihe nach alle Töne zu Grundtönen macht.

---

2. Bestimmung der Consonanzen.

10. Auch die Grösse der Consonanz zwischen zwei Tönen lässt sich durch einen bestimmten, sogar absoluten Zahlenwerth ausdrücken, wenn man auf die physikalische Entstehung eines Tones zurückgeht, und zwar ohne dass man nöthig hat, die Theorie der Obertöne zu Hilfe zu nehmen.

Jeder Ton besteht aus einer Folge von Schallen, die für dieselbe Quelle von durchaus gleichartiger Natur sind. Nur von der Anzahl der

in einer bestimmten Zeit erzeugten Schalle hängt die Höhe eines Tones ab, und da wir es in der gegenwärtigen Untersuchung nur mit Erscheinungen zu thun haben, die aus den verschiedenen Höhenverhältnissen entspringen, so liegt es nahe, auf die Quelle dieser Verschiedenheit zurückzugehen. Die einzelnen Schalle haben wir als unter sich gleich zu betrachten, selbst bei verschiedenen Tönen; daher sind auch die Partialeindrücke, welche die Schalle auf unsern Sinn machen, identisch, gleichviel ob es ein hoher oder tiefer Ton ist, der aus ihnen zusammengesetzt ist. Jeder Schall erzeugt im Bewusstsein eine Vorstellung. Aber die rasche Aufeinanderfolge der tonbildenden Schalle bewirkt, dass wir nicht jede einzelne Schallvorstellung als solche, sondern nur eine Summe solcher Partialvorstellungen als eine einzige Totalvorstellung auffassen, die wir „Ton" nennen.

11. Nehmen wir jetzt an, es treten zwei Tonvorstellungen gleichzeitig ins Bewusstsein. Von dem Verhältnisse ihrer Schwingungszahlen wird es abhängen, ob und wie viele ihrer Partialvorstellungen zeitlich zusammenfallen werden. Es ist nun bekannt, dass zwei durchaus gleiche und gleichzeitig eintretende Vorstellungen nur als eine Vorstellung aufgefasst werden, die jedoch die doppelte Stärke jeder einzelnen besitzen wird, weil von der Masse des Vorgestellten nichts verloren gehen kann. (Vergl. das Binocularsehen.) Wenden wir dies Princip auf unsere Schallvorstellungen an, so folgt, dass die Summe des Vorgestellten zweier Töne aus zwei Gruppen von Schallvorstellungen bestehen wird. Der einen Gruppe gehört die Summe aller zeitlich nicht zusammentreffenden Vorstellungen an, und diese begründet die Dissonanz; die andere umfasst alle zusammenfallenden Vorstellungen, und diese begründet die Consonanz.

12. Zur grösseren Anschaulichkeit des eben Gesagten vergegenwärtige man sich das Bild zweier an einander gelegten Massstäbe, auf denen ein und dieselbe constante Länge als Bild der Zeiteinheit mehrmals hinter einander abgetragen ist. Theilen wir nun die Längeneinheiten jedes Massstabes in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, entsprechend den Schwingungszahlen zweier Töne, und lassen wir die erstgezogenen Haupttheilstriche zusammenfallen, so wird dies auch eine mehr oder minder grosse Anzahl der übrigen Theilstriche thun. Sind sämmtliche Theilstriche in gleicher Weise bezeichnet, so ist es für das Verhältniss zwischen der Anzahl zusammenfallender und derjenigen der nicht zusammenfallenden Theilstriche gleichgiltig, ob die Anfangspunkte der beiden Massstäbe zusammenfallen oder ob wir den einen um eine Anzahl seiner Theilstriche verschieben. So wird auch die Consonanz zweier Töne nicht geändert, wenn der eine etwas später auftritt als der andere. Anfangsunterschiede, die sich auf Bruchtheile oder auf irrationale Theile der Längen-, resp. Zeiteinheit erstrecken, werden durch die begrenzte Schärfe der Wahrnehmung des Gesichts, resp. Gehörs in ihrer Wirkung auf das Zusammenfallen der Theilstriche, resp. Schalle verdeckt.



13. Die oben gegebene Definition von der Consonanz und Dissonanz zweier Töne gestattet nun eine leichte Formulirung.

Es seien m und n die Schwingungszahlen zweier Töne für irgend eine Zeiteinheit (z. B. die Secunde). Ihr Verhältniss $\frac{m}{n}$, auf den kleinsten Bruch reducirt, sei gleich $\frac{p}{q}$, also

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{q}.$$

$\left(\text{Wenn } \frac{m}{n}\right.$ gleich einer ganzen Zahl k ist, wird man folgerecht schreiben: $\left.\frac{k}{1}\right)$.

Die Summe der Schallvorstellungen ist $m+n$. Die Anzahl der zusammentreffenden Vorstellungen ist auf der einen Seite $\frac{m}{p}$, auf der anderen $\frac{n}{q}$. Da diese Grössen aber einander gleich sind, so ist die Summe des Vorgestellten, welches sie repräsentiren, gleich $\frac{2m}{p}$. Nennen wir diese Summe das Gleichartige (Consonirende) der beiden Tonvorstellungen, so ist das Ungleichartige (Dissonirende) ausgedrückt durch $m+n-\frac{2m}{p}$. Bezieht man diese Grössen auf die Gesammtsumme, so findet sich ausgedrückt

$$\text{das Gleichartige durch} \quad \alpha=\frac{2m}{p\,(m+n)},$$

$$\text{das Ungleichartige durch } \beta=\frac{m+n-\frac{2m}{p}}{m+n}.$$

Dividiren wir in diesen Gleichungen Zähler und Nenner der rechten Seite durch n, so kommt:

$$\alpha=\frac{2\frac{m}{n}}{p\left(1+\frac{m}{n}\right)}; \quad \beta=\frac{1+\frac{m}{n}-\frac{2}{p}\cdot\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}}$$

oder, wenn wir für $\frac{m}{n}$ seinen Werth $\frac{p}{q}$ setzen:

$$\alpha=\frac{2\frac{p}{q}}{p\left(1+\frac{p}{q}\right)}, \quad \beta=\frac{1+\frac{p}{q}-\frac{2}{q}}{1+\frac{p}{q}}$$

oder, durch Multiplication mit q:

$$\alpha = \frac{2}{p+q}, \quad \beta = \frac{p+q-2}{p+q}.$$

In den Zahlen α und β haben wir nun ein directes Mass für Consonanz und Dissonanz zweier Töne. Und die letzten Gleichungen lehren unmittelbar Folgendes:

Je kleiner p und q sind, desto grösser ist α, d. h. in je kleineren Zahlen sich das Schwingungszahlenverhältniss zweier Töne ausdrücken lässt, desto grösser ist ihre Consonanz.

Die Consonanz kann nie gleich Null sein, d. h. zwei absolut dissonirende Töne giebt es nicht. Wohl aber kann die Dissonanz Null werden, nämlich wenn $p+q=2$ ist. Da p und q ganze Zahlen sind, so gestattet diese Gleichung nur die Auflösungen $p=0$ (2), $q=2$ (0) und $p=q=1$.

Absolute Consonanz entsteht also nur durch einen einzelnen Ton oder durch zwei identische Töne.

14. Wenden wir die obigen Formeln zunächst auf die diatonische Durtonleiter an, so ergeben sich für die Hauptintervalle folgende Consonanzverhältnisse:

	Secunde:	Terz:	Quart:	Quint:	Sext:	Septime:	Octave:
Consonanz:	$\frac{2}{17}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{2}{3}$
Verhältn. zw. Cons. u. Diss.:	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{1}$.

Und für die Nebenintervalle (Quart und Quint in den Näherungsbrüchen ausgedrückt):

	Secunde:	Terz:	Quart:	Quint:	Sext:	Septime:
Consonanz:	$\frac{2}{31}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{14}$
Verhältniss zw. Cons. u. Diss.:	$\frac{2}{29}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{12}$.

Berücksichtigen wir noch die zehn eingeschalteten Töne, so können wir innerhalb der ersten Octave vom Grundtone aus im Ganzen 16 Intervalle bilden. Es ist nun leicht zu sehen, dass wir bei den in Nr. 7 zusammengestellten Zahlenwerthen der Intervalle nicht überall stehen bleiben können, wenn anders die berechnete Consonanz mit der wahrgenommenen übereinstimmen soll. So ergiebt sich z. B. die Consonanz für *es* : *c* mit $\frac{2}{11}$, für *dis* : *c* mit $\frac{2}{139}$, während der effective Unterschied zwischen beiden Intervallen nur sehr gering ist. Wir müssen daher annehmen, dass das Ohr für zwei Töne, die gleichzeitig gehört werden, ein gewisses Accommodationsvermögen besitzt, dergestalt, dass innerhalb einer bestimmten Grenze zwei nicht genau zusammenfallende Schalle die Wirkung zweier zusammenfallender ausüben. Für die Berechnung der Consonanz zwischen zwei beliebigen Tönen werden wir uns daher der auf Seite 209 und 210 angegebenen Näherungsbrüche bedienen müssen, und erhalten dann folgendes Resultat für den Grundton c:

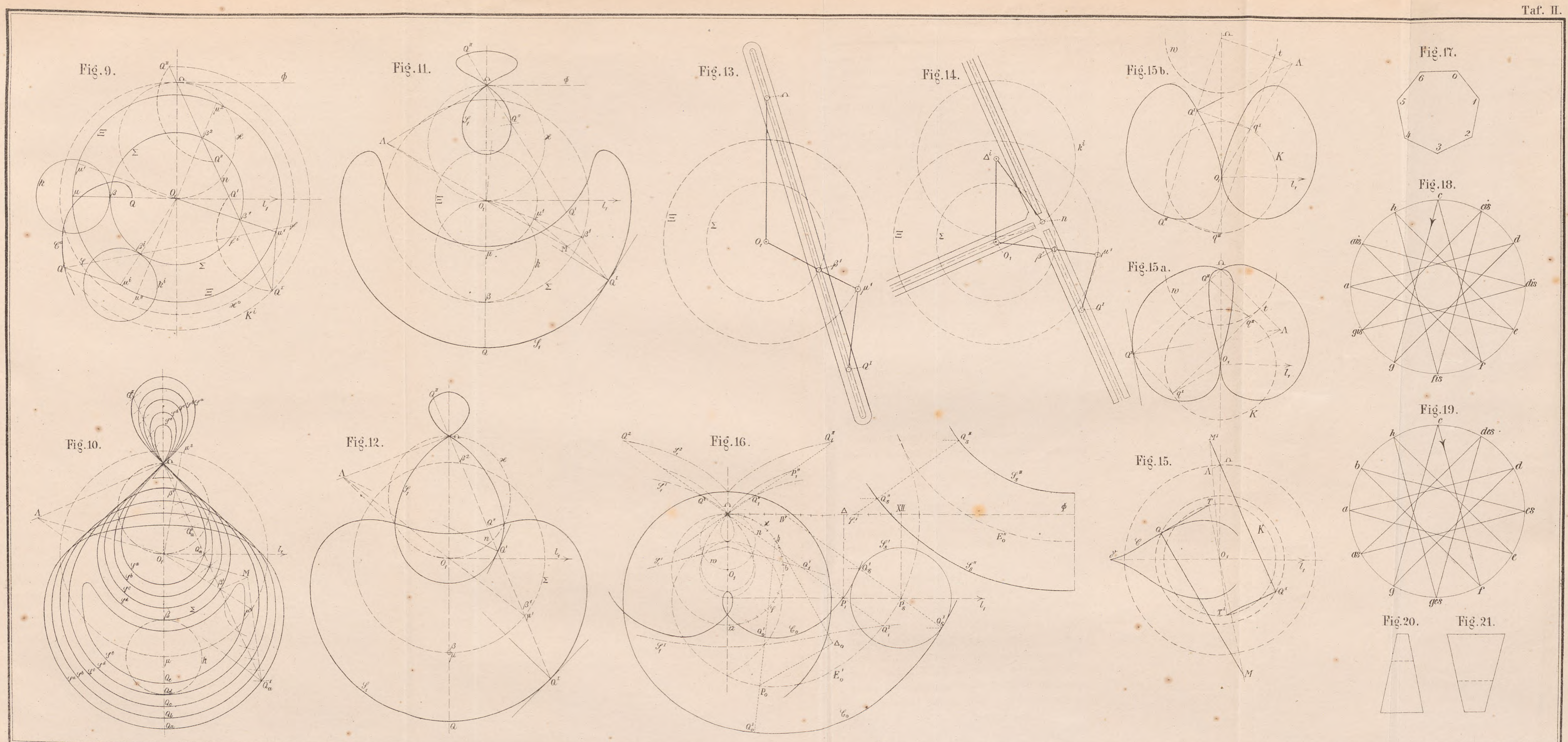
Intervall.	Oberton.	Werth d.Interv.	Grösse der Consonanz.		Intervall.	Oberton.	Werth d.Interv.	Grösse der Consonanz.	
Uebermäss. Prim.	*cis*	$\frac{19}{18}$	$\frac{2}{37}$	0,05.405	Verminderte Quint.	*ges*	$\frac{10}{7}$	$\frac{2}{17}$	0,11.764
Kleine Secunde.	*des*	$\frac{16}{15}$	$\frac{2}{31}$	0,06.451	Reine Quint.	*g*	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{5}$	0,40.000
Grosse Secunde.	*d*	$\frac{9}{8}$	$\frac{2}{17}$	0,11.764	Uebermäss. Quint.	*gis*	$\frac{11}{7}$	$\frac{2}{18}$	0,11.111
Uebermäss. Secunde.	*dis*	$\frac{7}{6}$	$\frac{2}{13}$	0,15.384	Kleine Sext.	*as*	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{13}$	0,15.384
Kleine Terz.	*es*	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{11}$	0,18.181	Grosse Sext.	*a*	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{8}$	0,25.000
Grosse Terz.	*e*	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{9}$	0,22,222	Uebermäss. Sext.	*ais*	$\frac{7}{4}$	$\frac{2}{11}$	0,18.181
Reine Quart.	*f*	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{7}$	0,28.571	Kleine Septime.	*b*	$\frac{9}{5}$	$\frac{2}{14}$	0,14.285
Uebermäss. Quart.	*fis*	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{12}$	0,16.666	Grosse Septime.	*h*	$\frac{15}{8}$	$\frac{2}{23}$	0,08.695

Nach dem Grade der Consonanz mit *c* ordnen sich hiernach die Töne in folgende Reihe:

$$g,\ f,\ a,\ e,\ \begin{Bmatrix} es \\ ais \end{Bmatrix},\ fis,\ \begin{Bmatrix} dis \\ as \end{Bmatrix},\ b,\ \begin{Bmatrix} d \\ ges \end{Bmatrix},\ gis,\ h,\ des,\ cis.$$

Man beachte noch, dass die in vorstehender Tabelle angewendeten Werthe der Intervalle die Eigenschaft haben, dass der Quotient je zweier aufeinander folgender Werthe $\left(\text{mit einziger Ausnahme von } \frac{d}{des}\right)$ von der Form $\frac{n+1}{n}$ ist. Die darunter befindlichen Näherungswerthe sind also in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, die überhaupt noch mit der Aufrechthaltung des Unterschiedes zwischen zwei benachbarten Intervallen verträglich sind.

15. Eine Erweiterung dieser Betrachtungen würde uns auf die Dreiklänge und Accorde führen, innerhalb deren die verschiedenen, zwischen je zwei Tönen bestehenden Consonanzverhältnisse zu untersuchen wären. Hier mag nur noch bemerkt werden, dass in den Dreiklängen *c*, *e*, *g* und *c*, *es*, *g* die Summe der Consonanzen α, β zwischen den aufeinanderfolgenden Tönen fast genau gleich der Consonanz (γ) zwischen dem ersten und dritten ist, und dass der Unterschied zwischen diesen beiden Klängen (*c* dur und *c* moll) nur darin besteht, dass die grössere Consonanz der kleineren im ersten Falle vorangeht, im zweiten nachfolgt. Der eigenthümliche Cha-



L. Klemich, Dresden.

rakter von Dur und von Moll hängt damit zusammen, dass in Dur die kleinere Consonanz auf der grösseren aufgebaut ist, in Moll die grössere auf der kleineren. Dadurch erhält der Dur-Dreiklang den Charakter der Festigkeit, der Moll-Dreiklang denjenigen des Schwankenden. Jener ist vergleichbar einer aufstrebenden Pyramide (Fig. 20), bei deren Betrachtung der aufwärts schweifende Blick in der Spitze einen Ruhepunkt findet, dieser einer auf die Spitze gestellten (Fig. 21), die für denselben Blick sich nach oben ausdehnt und der Phantasie zu beliebiger Fortsetzung Spielraum lässt.

Untersucht man noch die Dreiklänge $e, g, \overline{c}$ und $g, \overline{c}, \overline{e}$, resp. $es, g, \overline{c}$, $g, \overline{c}, \overline{es}$, so findet man folgende Resultate:

	$e.\ g.\ \overline{c}.$	$g.\ \overline{c}.\ \overline{es}.$	$g.\ \overline{c}.\ \overline{e}.$	$es.\ g.\ \overline{c}.$	$c.\ e.\ g.$	$c.\ es.\ g.$
α	0,18	0,28	0,28	0,22	0,22	0,18
β	0,28	0,18	0,22	0,28	0,18	0,22
γ	0,15	0,15	0,25	0,25	0,40	0,40
	$\alpha+\beta=3\gamma.$		$\alpha+\beta=2\gamma.$		$\alpha+\beta=\gamma.$	

Man sieht an diesem Beispiel, wie auch zusammengesetzte Consonanzverhältnisse die Aufstellung einfacher Gesetze und die Darstellung derselben durch einfache Formeln ermöglichen.

Kleinere Mittheilungen.

VIII. Ueber die dualistische und die unitarische Ansicht in der Elektricitätslehre.

Die in der Ueberschrift genannten beiden Ansichten über das Wesen der Elektricität haben sich bis noch in die neueste Zeit gleichberechtigt gegenübergestanden, wenn auch mehr und mehr elektrodynamische Erscheinungen aufgefunden werden, welche beweisen, dass die Verschiedenheit der beiden Elektricitätsarten, die die dualistische Ansicht postulirt, nicht blos in der Art der gegenseitigen Einwirkung besteht, insofern letztere nur theils eine Anziehung, theils eine Abstossung ist, beides aber übrigens erfolgend nach denselben Gesetzen.

Die folgenden Zeilen haben den Zweck, zu zeigen, dass man auf einen vollständigen Widerspruch mit experimentellen Ergebnissen kommt, wenn man als Erklärungsprincip der dualistischen Ansicht folgt.

Der Green'sche Lehrsatz, welcher beiden genannten Ansichten über das Wesen der Elektricität genügt, kann in der Form ausgesprochen werden:

$$\int (V \varDelta U - U \varDelta V)\, dk = \int \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma.*$$

Wir wenden diese Gleichung an auf den Raum, der begrenzt wird 1. von der Oberfläche σ_1 eines massiven Leiters für Elektricität, 2. von einer Kugelfläche σ_2, die ganz ausserhalb der Fläche σ_1 liegt und deren Centrum O heisse, und endlich 3. von einer Kugelfläche σ_3, die die beiden eben genannten Flächen σ_1 und σ_2 vollständig umschliesst und deren Centrum in endlicher Entfernung liegt. Es sei ferner V die Potentialfunction einer irgendwie mit durchaus endlicher Dichtheit über die Leiterfläche σ_1 verbreiteten Elektricitätsladung und $U = \frac{q}{r} + W$. In diesem Werthe von U bedeute r die Entfernung vom Punkte O, W die Potentialfunction der

* Vergl. des Verfassers „Lehrbuch der Elektrostatik". Leipzig, B. G. Teubner, 1872. Cap. I § 4 S. 28, II, und überhaupt zu vorliegendem Aufsatz Cap. VI §§ 3 und 4 des eben genannten Werkes.

Influenzelectricität, die auf dem (zur Erde) abgeleiteten Leiter erzeugt wird durch die Gegenwart der (positiven oder negativen) Elektricitätsmenge q im Punkte O.

Unter den eben gemachten Voraussetzungen wird die linke Seite der vorigen Gleichung zu Null, folglich verschwindet auch die rechte; und lassen wir nun noch den Radius der Kugelfläche σ_3 unendlich gross werden, so ist für alle Punkte dieser Kugelfläche $V = \frac{q}{r} + W = 0$ so dass die obige Gleichung übergeht in

$$\int \left(V \frac{\partial \left(\frac{q}{r} + W \right)}{\partial n} - \left(\frac{q}{r} + W \right) \frac{\partial V}{\partial n} \right) (d\sigma_1 + d\sigma_2) = 0.$$

Lassen wir weiter in dieser Gleichung den Radius der Kugelfläche σ_2 unendlich klein werden und bezeichnen den Werth von V in Punkte O mit V', so geht das auf die Kugelfläche σ_2 bezügliche Integral über in $-4\pi V'$, so dass wir aus der vorigen Gleichung erhalten

$$\text{I)} \qquad 4\pi V' = \int \left(V \frac{\partial \left(\frac{q}{r} + W \right)}{\partial n} = \left(\frac{q}{r} + W \right) \frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma_1,$$

in welcher Gleichung sich die Integration nur noch zu erstrecken hat über die Leiteroberfläche σ_1.

Die Gleichung I), welche unter den eben angegebenen Voraussetzungen sowohl für die dualistische, als auch für die unitarische Ansicht über das Wesen der Elektricität Geltung haben muss, ist es nun, welche wir in ihren Consequeznen für beide Ansichten genauer prüfen wollen.

Beide Ansichten erlauben zunächst noch eine weitere Vereinfachung der Gleichung I). Da nämlich die Leiterfläche σ_1 (zur Erde) abgeleitet sein sollte, d. i. nichts Anderes, als dass die Leiterfläche σ_1 mit einem unendlich grossen Elektricitätsleiter in leitender Verbindung gedacht wird, so muss im Innern des ganzen unendlich grossen, mit σ_1 leitend verbunden gedachten Leiters die Potentialfunction aller vorhandenen elektrischen Massen allenthalben denselben Werth aufweisen. Für einen unendlich weit entfernten Punkt ist aber sowohl $\frac{q}{r}$ als auch W gleich Null, weil beide Potentialfunctionen herkommen von Massen, die in endlicher Entfernung liegen. Beide Potentialfunctionen $\frac{q}{r}$ und W ändern also nicht dadurch, dass der unendlich grosse Leiter mit σ_1 leitend verbunden gedacht wird, den Werth der Potentialfunction, wie er sich etwa herausstellte als der zuvor nicht besonders mit Elektricität versehene Leiter σ_1 ohne Einwirkung der elektrischen Massen, welche die Potentialfunction $\frac{q}{r}$ und W erzeugen, mit dem

unendlich grossen Leiter leitend verbunden wurde. Es darf sich also auch bei Einwirkung beider Potentialfunctionen $\frac{q}{r}$ und W auf irgend welche Punkte des Leiters σ_1 der Gesammtwerth der Potentialfunction auf Punkte in dessen Innerem nicht ändern, d. h. $\frac{q}{r}+W=0$. Hiermit wird aber aus der Gleichung I)

$$\text{II)} \qquad 4\pi V' = \int V \frac{\partial\left(\frac{q}{r}+W\right)}{\partial n} d\sigma_1.$$

Bezeichnen wir aber weiter mit ϱ die Dichtheit der durch q auf dem Leiter σ_1 hervorgerufenen Influenzelektricität, so ist nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie

$$\frac{\partial\left(\frac{q}{r}+W\right)}{\partial n} = -4\pi\varrho,$$

und damit wird endlich noch aus der Gleichung II)

$$\text{III)} \qquad V' = -\int V\varrho\, d\sigma_1.$$

Diese Gleichung III) gilt, welcher der beiden Ansichten über das Wesen der Elektricität man auch folgen mag; die Bedingungen, welche zu ihrer Herleitung gestellt wurden, lassen sich experimentell sehr nahe erreichen, denn anstatt der punktförmigen Elektricitätsmenge q kann man eine sehr kleine elektrische Kugel nehmen, die von einer gut isolirenden Substanz getragen wird, und die Ableitung (zur Erde) kann durch einen möglichst dünnen Metalldraht geschehen, derart, dass die Potentialfunction der auf dem Ableitungsdrahte haftenden Elektricität vernachlässigt werden kann. Endlich kann man noch leicht experimentell prüfen, welcher Grenze man sich wohl nähern würde, wenn man die Querdimensionen des Ableitungsdrathes und ebenso den Radius der Kugel mit der Elektricitätsmenge q über alle Grenzen abnehmen liesse, der so experimentell gefundene Grenzwerth muss sich in der Gleichung III) darstellen.

Für die Gleichung III) können wir jetzt noch über die Natur der Potentialfunction V und V' nach Willkür verfügen; wir wollen annehmen, dass V und V' durchaus positiv sei, dann muss auch die rechte Seite der Gleichung III) positiv sein, d. h.

$$-\int V\varrho\, d\sigma_1 > 0.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn ϱ auf allen Stellen der Fläche σ_1 einen negativen Werth besitzt; denn wäre ϱ an irgend einer nicht unendlich kleinen Stelle entweder positiv oder Null, so könnte man alle die Elektricität, welche die Potentialfunction V erzeugt, derart an jene Stellen verlegen, dass alsdann

$-\int V\varrho\, d\sigma_1$ nothwendig 0 oder negativ wäre, was der letzten Ungleichung widerspricht. Wir erhalten demnach das Resultat:

Gleichgiltig, welcher Art die Elektricitätsmenge q ist, so muss doch immer die auf einem (zur Erde) abgeleiteten Leiter hervorgerufene Influenzelektricität auf allen Stellen des Leiters das negative Vorzeichen besitzen.

Prüfen wir dieses Resultat experimentell, so stimmt es mit dem Erfolge, wenn q positiv ist, ist aber ein directer Widerspruch gegen das Experiment, wenn q negativ ist. Da nun nach der dualistischen Ansicht über das Wesen der Elektricität q negativ sein kann, so folgt, dass sie nicht das Wesen der Elektricität darstellt.

Sehen wir jetzt zu, ob die unitarische Ansicht auf denselben Widerspruch oder auf einen ähnlichen kommt.

Setzen wir das eine Mal $q = a + p$, das andere Mal $q = a - p$, wo, gemäss der unitarischen Ansicht, sowohl $a + p$, als auch $a - p$ grösser als Null ist, und auch p selbst einen positiven Werth besitzt, so ergiebt die Gleichung III) im ersten Falle

$$V' = -\int V(\varrho_a + \varrho_p)\, d\sigma_1 = -\int V\varrho_a\, d\sigma_1 - \int V\varrho_p\, d\sigma_1,$$

im zweiten Falle

$$V' = -\int V(\varrho_a - \varrho_p)\, d\sigma_1 = -\int V\varrho_a\, ds_1 + \int V\varrho_p\, d\sigma_1,$$

wenn ϱ_a und ϱ_p die auf der abgeleiteten Leiterfläche σ_1 erzeugten Dichtheiten der Influenzelektricität bezeichnen, wenn im Punkte O entweder nur die positive Elektricitätsmenge a oder nur die positive Elektricitätsmenge p vorhanden wäre,

Verstehen wir unter a diejenige Elektricitätsmenge, die die unitarische Ansicht dem in O befindlichen Träger der Elektricität dann beilegen muss, wenn derselbe nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche unelektrisch ist, d. h. aber in Wirklichkeit nichts Anderes, als wenn die Potentialfunction aller vorhandenen Elektricität im Träger in O und in irgend einem Punkte der Erde denselben Werth aufweist,* so muss ϱ_a für die experimentelle Untersuchung verschwinden und die vorigen beiden Gleichungen liefern daher die für unsere experimentellen Prüfungen giltigen weiteren Gleichungen:

* In Wirklichkeit sind die Werthe der Potentialfunctionen nicht absolut gleich, aber doch sehr nahe, weil wir kein Mittel besitzen, das die Elektricität vollkommen nicht leitete, weil wir also auch nicht im Stande sind, die Potentialfunction für Punkte der Erde und andererseits für die Punkte des untersuchten Körpers auf verschiedener Grösse für längere Zeit zu erhalten. Ueber die Wirkung der verbleibenden geringen Verschiedenheit dieser Potentialfunctionen vergl. weiter unten.

$$V' = -\int V \varrho_p \, d\sigma_1 \quad \text{im ersten Falle,}$$

$$V' = +\int V \varrho_p \, d\sigma_1 \quad \text{im zweiten Falle.}$$

Interpretiren wir jetzt diese Gleichungen wieder in derselben Weise, wie vorhin bei Verfolgung der dualistischen Ansicht geschah, so erhalten wir, dass im ersten Falle ϱ_p an allen Stellen des Leiters σ_1 das negative, im zweiten Falle das positive Vorzeichen besitzen muss, was nun vollkommen mit dem Experimente übereinstimmt.

Wir sehen somit, dass der Widerspruch, auf den die dualistische Ansicht führte, sich hebt, wenn man als Erklärungsprincip elektrischer Erscheinungen die unitarische Ansicht zu Grunde legt.

Wir ziehen aus diesem eben erlangten Resultate und aus der Art, wie die Rechnungsresultate nach der unitarischen Ansicht erklärt wurden, noch einige nicht unwichtige Folgerungen.

1. Es giebt keinen Nullpunkt für Elektricität, d. h. ähnlich wie es keinen Körper ohne Temperatur giebt, giebt es auch in Wirklichkeit keinen elektricitätsfreien Körper. Aehnlich wie wir beim Anfühlen eines Körpers nichts von dessen Temperatur bemerken, wenn er in Wirklichkeit dieselbe Temperatur besitzt wie das Glied unseres Körpers, mit dem wir das Anfühlen verrichteten, ähnlich geben auch unsere Elektroskope nichts von Elektricität zu erkennen, wenn die Potentialfunction der vorhandenen Elektricität für alle Punkte des untersuchten Körpers und des Elektroskopes vor und nach der Berührung oder gegenseitigen Beeinflussung derselben denselben constanten Werth aufweist. Aus dem an die Spitze gestellten Satze erklärt sich

a) die Entstehung von Elektricität durch Berührung physikalisch verschiedener Körper als eine andere Vertheilung der überhaupt vorhandenen Elektricitat, die dualistische Ansicht muss dagegen Elektricität gerade aus Nichts entstehen lassen;

b) die Bedeutung der bekannten Formel der Potentialtheorie $\Delta V = 0$ für einen Leiter dahin, dass im innern von leitender Materie ausgefüllten Raume eines elektrischen Leiters die Anordnung der Elektricität nicht abweicht von der, wie sie sein würde, wenn man nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch den Leiter unelektrisch nennen würde. Endlich ergiebt sich:

c) Jede Theorie über das Wesen der Elektricität, die, ähnlich wie die dualistische, nothwendig einen unelektrischen Zustand oder einen Nullpunkt für Elektricität annehmen muss, ist falsch. Dies gilt namentlich z. B. von jenen Theorien, die die sogenannten entgegengesetzten Elektricitäten durch entgegengesetzt gerichtete Bewegungen irgend einer Materie erklären.

2. Es ist möglich, dass die Grösse des (constanten) Werthes der Potentialfunction, welche die für unsere Elektroskope unwirksame Elektricität auf Punkte im Innern der Erde besitzt, eine Function der Zeit ist. Giebt man diese Möglichkeit zu, so folgt:

a) Unsere Elektroskope haben nur relativen Werth hinsichtlich ihrer Angaben über den elektrischen Zustand, denn da sie immer mehr oder weniger mit der Erde in leitender Verbindung stehen, so kann auch für sie die Potentialfunction nicht unabhängig von der Zeit sein und demgemäss auch ihre Elektricitätsangaben;

b) die Erklärung des eigenthümlichen, den Physikern wohl bekannten Umstandes, dass der Nullpunkt einer Torsionswaage sich von einem Tag zum andern verrückt, denn jede Torsionswaage ist ein mehr oder weniger empfindliches Elektroskop*.

3. Die Möglichkeit der Folgerung 2, und damit deren weitere, unter a) und b) genannte Consequenzen wird wahrscheinlich gemacht durch manche kosmische Erscheinungen, wie z. B. das Auftreten von Nordlichtern, Aeusserungen des Erdmagnetismus, Erscheinungen im Thier und Pflanzenleben beim Auftreten von Gewittern etc. Doch möchte ich mich jetzt herüber noch nicht genauer äussern, bevor ich nicht auch elektrodynamische und magnetische Erscheinungen mit für die vorgetragene unitarische Ansicht sprechen lassen kann.

4. Wird der elektrische Zustand von Körpern, die nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch unelektrisch sind, gemäss der unitarischen Ansicht zugestanden, so muss für zwei solche physikalisch verschiedene Körper, in welch beiden die Potentialfunction der vorhandenen Elektricität sehr nahe denselben Werth aufweist, eine weitere Kraft existiren, derart, dass bis auf sehr nahe Entfernungen beider Köper von einander die Wechselwirkung der in den Körpern vorhandenen Elektricität merklich aufgehoben wird, weil sonst beide Körper durch wechselseitige Annäherung oder Entfernung merklich elektrisch werden müssten. Kommt diese Kraft her von den ponderablen Moleculen der Körper, so wird man als nothwendige Folgerung hieraus auf die Ansicht vom Wesen der Elektricität geführt, wie ich sie in meinem „Lehrbuch der Elektrostatik" Cap. VI §§ 3 und 4 als möglich hingestellt habe.

Freiberg, im Juni 1872. TH. KÖTTERITZSCH.

---

* Man vergl. z. B. Reich, Neue Versuche mit der Drehwaage, Leipzig 1852, S. 406.



IX. Zusammenstellung der Sätze von den übrigbleibenden Bewegungen eines Körpers, der in einigen Punkten seiner Oberfläche durch normale Stützen unterstützt wird, und von den Kräftesystemen, die durch diese Stützen im Gleichgewicht gehalten werden können.

I. Wenn sechs Punkte des Körpers auf sechs festen Flächen bleiben müssen, so ist im Allgemeinen keine Bewegung dem Körper gestattet.

1. Wenn der Körper frei ist, so ist es zum Gleichgewichte der ihn angreifenden Kräfte nothwendig und hinreichend, dass die fictive Resultante und das *Moment minimum minimorum* verschwinden.

II. Wenn der Körper in fünf Punkten seiner Oberfläche durch fünf normale Stützen a, b, c, d und e unterstützt wird, so bleibt ihm nur eine Schraubenbewegung übrig. Die Axe der Schraube schneidet senkrecht die Linien d_{12} und d_{34} der kürzesten Abstände zwischen den Transversalen 1, 2, 3 und 4, von denen die beiden ersten, d. h. 1 und 2, auf den Geraden a, b, c, d und die beiden letzten auf den Geraden a, b, c, e gelegen sind. Die beiden Paare Transversalen 1 und 2, 3 und 4 bestimmen zugleich die einzige mögliche Steigung der gedachten Schraube.

2. Wenn der Körper in einem Punkte seiner Oberfläche durch eine normale Stütze unterstützt wird, so hat das *Moment minimum minimorum* der auf diesen Körper wirkenden Kräfte, welche durch diese einzige Stütze im Gleichgewicht gehalten werden können, nur eine bestimmte Lage, sie fällt nämlich mit der Geraden a zusammen. Die Grösse des Moments muss gleich Null sein. (Vgl. Nr. VI.)

III. Wenn der Körper in vier Punkten durch vier normale Stützen a, b, c und d unterstützt wird, so bilden die Axen der noch übrigbleibenden Schraubenbewegungen die Regelfläche eines Konoids K; alle Schraubenaxen schneiden sich nämlich unter einem rechten Winkel mit der Geraden d_{12} des kürzesten Abstandes zwischen den auf a, b, c, d liegenden Transversalen 1 und 2 und ruhen noch auf einer Curve σ, der Schnittcurve eines runden Cylinders C mit einem gewissen hyperbolischen Paraboloide P.

3. Wenn der Körper in zwei Punkten durch zwei normale Stützen a und b unterstützt wird, so bilden die *Momenti minima minimorum* der durch die zwei Stützen im Gleichgewicht gehaltenen Kräfte die Regelfläche eines Konoids K; alle diese Momente schneiden sich nämlich unter einem rechten Winkel mit der Geraden d_{ab} des kürzesten Abstandes der beiden Stützen a und b und ruhen noch auf einer Curve σ, der Schnittcurve eines runden Cylinders C mit einem hyperbolischen Paraboloide P.

Die Gerade d_{12} (resp. d_{ab}) dient als geometrische Axe des Cylinders C; der Radius des Cylinders ist gleich der Quadratwurzel aus dem Verhältnisse der kürzesten Entfernung der Geraden 1 und 2 (resp. a und b) zum Sinus des von den Geraden 1 und 2 (resp. a und b) gebildeten Winkels. Die auf der Linie d_{12} (resp. d_{ab}) senkrecht stehenden Ebenen E schneiden sich mit dem hyperbolischen Paraboloide P in gleichseitigen Hyperbeln: die Asymptoten je einer Hyperbel halbiren die Nebenwinkel der Geraden 1 und 2 (resp. a und b), während die Constante in der asymptotischen Gleichung der Hyperbel durch die Entfernung der Ebene E dieser Curve von der Mitte des kürzesten Abstandes der Geraden 1 und 2 (resp. a und b) repräsentirt wird.

Jeder Erzeugenden des Konoids K entspricht eine bestimmte Grösse der Steigung der Schraubenbewegung.

IV. Wenn der Körper durch drei normale Stützen a, b und c unterstützt wird, und wenn man die Schaar α von denjenigen Erzeugenden des einschaligen Hyperboloids, welche sich mit den Geraden a, b und c schneiden, construirt hat, so ergiebt es sich, dass die Schraubenaxen der noch möglichen Bewegungen des Körpers eine unendliche Anzahl Konoide K bilden, von denen jedes auf zwei Erzeugenden der Schaar α nach der Regel des Satzes III construirt ist.

V. Wenn der Körper durch zwei normale Stützen a und b unterstützt wird, und wenn man auf den Geraden a und b wie auf den Directricen die Congruenz von der ersten Ordnung construirt hat, so kann jedes Paar Geraden der Congruenz als zwei conjugirte Rotationsaxen angesehen werden, und umgekehrt, jede übrigbleibende Bewegung des Körpers kann auf zwei gleichzeitige

Jeder Erzeugenden des Konoids K entspricht ein bestimmter Werth des Verhältnisses zwischen den Grössen des *Moment minimum minimorum* aus der fictiven Resultante.

4. Wenn der Körper durch drei normale Stützen a, b und c unterstützt wird, und wenn man die Schaar β von denjenigen Erzeugenden des einschaligen Hyperboloids, unter denen sich auch die Geraden a, b und c befinden, construirt hat, so ergiebt es sich, dass die *Momenti minima minimorum* der Kräfte, die durch die drei Stützen im Gleichgewicht gehalten werden können, eine unendliche Anzahl von Konoiden K bilden, von denen jedes auf zwei Erzeugenden der Schaar β nach der Regel des Satzes 3 construirt ist.

5. Wenn der Körper durch vier normale Stützen a, b, c und d unterstützt wird, und wenn man auf den Transversalen 1 und 2, welche auf die vier Geraden a, b, c und d gelegt sind, die Congruenz von der ersten Ordnung errichtet, so werden durch alle möglichen Combinationen der Strahlen der Congruenz zu je zwei alle diejenigen conjugirten Kräfte erschöpft, welche durch vier Stützen

Drehungen um zwei Linien der Congruenz zurückgeführt werden.

VI. Wenn der Körper durch eine normale Stütze a unterstützt wird, und wenn man sich einen sogenannten speciellen Complex vom ersten Grade auf dieser Geraden a wie auf seiner Axe denkt (d. h. einen Complex der Geraden, welche die a schneiden oder ihr parallel laufen), so werden durch alle möglichen Combinationen der Linien des Complexes zu je zwei alle diejenigen conjugirten Rotationsaxen erschöpft, mit welchen die noch übrigbleibenden Geschwindigkeiten des Körpers reproducirt werden können. (Der Umstand, dass die Steigung der jedem Complexe zu Grunde liegenden Schraube bei dem speciellen Complexe gleich Null ist, entspricht dem Werthe Null des *Moment minimum minimorum* im Satze Nr. 2.)

VII. Wenn der Körper frei ist, so kann man ihm alle mögliche Schraubenbewegung zuweisen.

a, b, c und d im Gleichgewicht gehalten werden können.

6. Wenn der Körper durch fünf normale Stützen unterstützt wird, und wenn zuerst die Schraube V, welche die einzige noch übrig gebliebene Bewegung des Körpers repräsentirt, nach der Regel des Satzes II construirt ist, und wenn endlich in jedem Punkte i des Raumes ein Strahlenbüschel in derjenigen Ebene zugewiesen ist, welche auf der einzigen möglichen Geschwindigkeit des Punktes i senkrecht steht, so erhält man in den Strahlen der sämmtlichen Strahlenbüschel einen Strahlencomplex vom ersten Grade, welchem zu Grunde die Schraube V liegt. Damit nun ein Kräftesystem sich mit den Stützen a, b, c, d und e im Gleichgewicht hält, ist es nothwendig und hinreichend, dass dieses Kräftesystem sich auf zwei conjugirte Kräfte zurückführen lässt, welche in irgend zwei Strahlen des Complexes liegen.

7. Wenn der Körper durch sechs normale Stützen unterstützt wird, so können im Allgemeinen alle möglichen Kräftesysteme den Körper angreifen, ohne dessen Ruhe zu stören.

St. Petersburg, 26. Jan. (7. Febr.) 1872. Michail Okatow.

VIII.

Beiträge zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften.

Von

Dr. Gustav Holzmüller,

ordentl. Lehrer am Gymnasium zu Elberfeld.

(Hierzu Taf. III, Fig. 1—5.)

§ 1. Vorbemerkungen.

Man denke sich zwei Ebenen, von denen die eine alle complexen Zahlen $z = x + yi$, die andere alle Zahlen $Z = X + Yi$ enthält. Ist dann $Z = f(z)$, so entspricht, wenn die Function eindeutig ist, jedem Punkte der z-Ebene ein Punkt der Z-Ebene; ist sie hingegen mehrdeutig, so gehören zu jedem Punkte der ersteren Ebene mehrere Punkte der letzteren. Geometrischen Gebilden der einen Ebene entsprechen bestimmte geometrische Gebilde der anderen. Bekanntlich sind diese „Abbildungen" in den kleinsten Theilen ähnlich. Ausgenommen von dieser Conformität sind nur gewisse singuläre Punkte, die sich dadurch bestimmen, dass der Differentialcoefficient der Function dort verschwindet oder unendlich gross wird. Im Allgemeinen aber entsprechen Curven der einen Ebene Curven der andern, die sich unter denselben Winkeln schneiden. Jeder Function complexen Arguments entspricht in diesem Sinne eine conforme Abbildung oder, wie man auch sagt, eine isogonale Verwandtschaft.

Von diesen Verwandtschaften sind bis jetzt nur zwei so allgemein behandelt worden, dass man ihre Theorie als abgeschlossen ansehen kann, die Verwandtschaft der Aehnlichkeit, welche mit der Function $Z = a + bz$ zusammenfällt, und die sogenannte Kreisverwandtschaft, die sich allgemein aus der Function $Z = \frac{a + bz}{c + dz}$ ableiten lässt (auch die Constanten dürfen complexe Zahlen sein). Allgemeineres Interesse haben die Abhandlungen von Siebeck im 55., 57. und 59. Bande des Crell. Journals. Einen kurzen Ueberblick über die geschichtliche Entwickelung der Theorie der

conformen Abbildungen und ein Verzeichniss der einschlagenden Literatur findet sich in der Inauguraldissertation von H. Amstein: „Ueber die conforme Abbildung der Oberfläche eines regulären Octaeders auf die Oberfläche einer Kugel". Zürich 1872.

Von fundamentaler Bedeutung für die Theorie der isogonalen Verwandtschaften ist nun folgende Frage:

Welche Curven der einen Ebene entsprechen den Parallelen zur reellen und imaginären Axe in der andern Ebene?

Diese Frage führt auf orthogonale Curvensysteme, durch welche man die Ebene in ein System rechtwinkliger Flächenräume eintheilen kann, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben. Diese Curvenschaaren leisten oft Dienste als krummlinige Coordinaten, aber abgesehen von ihrem geometrischen Interesse sind sie von besonderer Wichtigkeit für die allgemeine Kartographie und für die Wärmetheorie. In letzterer werden sie als „isothermische Curvensysteme" bezeichnet, und dieser Name soll hier beibehalten werden.

So entspricht z. B. bei der Abbildung $Z = e^z$ dem Systeme der Parallelen zur x- und y-Axe ein System concentrischer Kreise um den Nullpunkt und ihre Radien. (Vergl. meine Abhandlung über die logarithmische Abbildung im 16. Jahrgange dieser Zeitschrift.) Die Transformation $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ verwandelt diese Kreise in confocale Ellipsen mit den Brennpunkten ± 1, die Radien in die dazu gehörigen confocalen Hyperbeln. Die Abbildung $Z = \sqrt{1 - z^2}$ verwandelt dieselben Kreise in ein System confocaler Lemniscaten mit den Brennpunkten ± 1, während die Geraden in gleichseitige Hyperbeln übergehen, die durch die Punkte ± 1 gehen. Ferner zeigte Siebeck, dass die Abbildungen $Z = \sin am\, z$, $Z = \cos am\, z$, $Z = \Delta am\, z$ auf Curvengruppen vierter Ordnung führen, welche interessante geometrische Eigenschaften besitzen.

Die allgemeine Lösung der aufgestellten Frage könnte auf folgendem Wege geschehen: Man setze in der Gleichung $X + Yi = f(x + yi)$ die reellen und imaginären Theile gleich und bestimme x und y aus beiden Gleichungen als Functionen von X und Y. Ist dann $x = F(XY)$ und $y = \Phi(XY)$, so entspricht den Parallelen von der Form $x = a$ das Curvensystem $F(XY) = a$, den Parallelen $y = b$ das System $\Phi(XY) = b$.

Die Lösung selbst bietet oft grosse Schwierigkeiten. Nur in einer beschränkten Anzahl von Fällen ist sie ohne Weiteres durchführbar. Eine besondere Vereinfachung gewährt folgender Satz der Functionentheorie:

Entspricht bei einer analytischen Function einer stetigen Folge reeller Werthe des Arguments eine stetige Folge reeller Werthe der Function, so entsprechen conjugirten Werthen des Arguments conjugirte Werthe der Function.

Für solche Functionen ergiebt sich aus der Gleichung

$$1)\qquad X + Yi = f(x + yi)$$

folgende Reihe von Relationen:

$$2)\qquad X - Yi = f(x - yi),$$

$$3)\qquad X = \frac{f(x+yi) + f(x-yi)}{2},$$

$$4)\qquad Yi = \frac{f(x+yi) - f(x-yi)}{2}.$$

Oft ist es nützlich, auf Polarcoordinaten überzugehen. Dann folgen aus Multiplication und Division der Gleichungen 1) und 2) noch folgende:

$$5)\qquad R^2 = f(x+yi)\, f(x-yi),$$

$$6)\qquad \cos 2\,\Phi + i \sin 2\,\Phi = \frac{f(x+yi)}{f(x-yi)}.$$

Zu den Functionen, die sich auf die angegebene Methode behandeln lassen, gehören z. B. $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$, $\sin am\, z$, $\cos am\, z$, $\Delta am\, z$.

In Folgendem soll zunächst die Abbildung $Z = \cos z$ der Betrachtung unterworfen worden, welche schon Siebeck von anderen Gesichtspunkten aus behandelt hat. Der Zusammenhang der Abbildungen $Z = \cos z$ und $Z = \sin z$ wird uns auf die Transformation $Z = \sqrt{1 - z^2}$ führen. Dabei wird sich ein interessanter Zusammenhang zwischen den lemniscatischen und den Polarcoordinaten ergeben, der durch elliptische Coordinaten vermittelt wird. An diese Betrachtung schliesst sich eine wichtige Verallgemeinerung des obengenannten Satzes über das System confocaler Lemniscaten und gleichseitiger Hyperbeln an. Endlich soll nach specieller Betrachtung der Abbildung $Z = \sin am\, z$ der Zusammenhang zwischen den bei den Transformationen $Z = \sin am\, z$, $Z = \cos am\, z$, $Z = \Delta am\, z$ auftretenden Curvenschaaren untersucht werden.

Als Beispiele für gewisse Capitel der Riemann'schen Functionentheorie, auf welche die neueren Lehrbücher die Theorie der elliptischen Functionen begründen, werden die folgenden Betrachtungen manchem Leser nicht unwillkommen sein. Uebrigens wird die Abhandlung auf synthetischem Wege eine Anzahl von Abbildungsaufgaben lösen, die sich mit Hilfe des Dirichlet'schen Princips analytisch behandeln lassen.

§ 2. Die Abbildung $(X + Yi) = \cos(x + yi)$.

Das Additionstheorem giebt folgende Gleichungen:

$$X \pm Yi = \cos(x \pm yi) = \cos x \cos yi \mp \sin x \sin yi.$$

Aus demselben ergiebt sich durch Addition und Subtraction die Zerlegung in den reellen und imaginären Theil:

$$X = \cos x \cos yi, \qquad Yi = \sin x \sin yi.$$

Elimination von yi führt auf die Gleichung

$$1)\qquad \frac{X^2}{\cos^2 x} - \frac{Y^2}{\sin^2 x} = 1,$$



Elimination von x hingegen auf

$$2)\quad \frac{X^2}{\cos^2 yi} - \frac{Y^2}{\sin^2 yi} = 1 \text{ oder } 2^*)\ \frac{X^2}{\frac{1}{4}(e^y + e^{-y})^2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}(e^y - e^{-y})^2} = 1.$$

Dies sind die Gleichungen von Hyperbeln und Ellipsen mit den Brennpunkten ± 1. Nimmt man Rücksicht auf die reelle Periode des Cosinus, so findet demnach folgende Beziehung statt:

Sämmtlichen Linien $x = a \pm 2n\pi$ in der z-Ebene entspricht in der Z-Ebene die eine Hyperbel

$$\frac{X^2}{\cos^2 a} - \frac{Y^2}{\sin^2 a} = 1 \text{ oder } p - p_1 = 2\cos a;$$

den Linien $y = \pm c$ hingegen entspricht die Ellipse

$$\frac{X^2}{\frac{1}{4}(e^c + e^{-c})^2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}(e^c - e^{-c})^2} = 1 \text{ oder } p + p_1 = e^c + e^{-c}.$$

Daraus folgt, dass die confocalen Ellipsen und Hyperbeln sich rechtwinklig schneiden und ausserdem ein isothermisches Curvensystem in dem oben angegebenen Sinne bilden. Will man die Eintheilung der Z-Ebene in rechtwinklige Flächenräume, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben, wirklich durchführen, so verfährt man folgendermassen.

Die congruenten Rechtecke der z-Ebene mögen durch folgende Linien gebildet werden:

$$\pm x = 0,\ a,\ 2a,\ 3a \ldots,$$
$$\pm y = 0,\ c,\ 2c,\ 3c \ldots.$$

Dann haben die entsprechenden Hyperbeln und Ellipsen folgende Halbaxen:

$$\frac{p - p_1}{2} = 1,\ \cos a,\ \cos 2a,\ \cos 3a \ldots,$$

$$\frac{p + p_1}{2} = 1,\ \frac{e^c + e^{-c}}{2},\ \frac{e^{2c} + e^{-2c}}{2},\ \frac{e^{3c} + e^{-3c}}{2} \ldots,$$

oder, wenn man $e^c = b$ setzt:

$$\frac{p + p_1}{2} = 1,\ \ \tfrac{1}{2}\left(b + \frac{1}{b}\right),\ \ \tfrac{1}{2}\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right),\ \ \tfrac{1}{2}\left(b^3 + \frac{1}{b^3}\right) \ldots$$

Die Ausdrücke für die Halbaxen der Ellipsen sind leicht zu construiren. Denkt man sich für die Hyperbeln den Einheitskreis gezeichnet, so erkennt man, dass, wenn ihre Halbaxe gleich $\cos a$ ist, ihre Asymptoten mit der reellen Axe die Winkel $\pm a$ bilden. Folglich: Bei der genannten Eintheilung der Ebene folgen die Asymptoten der Hyperbeln unter gleichen Winkeln aufeinander.

Hat man also die nothwendigen Elemente für ein „Rechteck" der Z-Ebene, so lässt sich die ganze Eintheilung elementar durchführen.

Das obige Resultat ergiebt sich auch auf folgendem Wege: Bedenkt man, dass die Multiplication des Arguments mit i einer Drehung des Co-

ordinatensystems der z-Ebene um 90^0 entspricht, so lässt sich das, was in § 1 von der Abbildung $Z = e^z$ gesagt wurde, leicht auf die Transformation $Z = e^{zi}$ übertragen. Bei der letzteren gehen nämlich die Parallelen $x = a \pm 2n\pi$ in Gerade durch den Nullpunkt mit der Neigung $\vartheta = a$ über, während die Parallelen $y = c$ sich in Kreise um den Nullpunkt mit dem Radius $r = c$ verwandeln. Nach demselben Paragraphen werden aber durch die Function $Z = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$ die concentrischen Kreise und ihre Radien in confocale Ellipsen und Hyperbeln transformirt. Combinirt man Beides, indem man $u = e^{zi}$ setzt, so erhält man das obige Resultat für die Abbildung $Z = \frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi}) = \cos z$.

Aus $Z = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$ folgt umgekehrt $u = Z \pm \sqrt{Z^2 - 1}$, es findet demnach mit Ausnahme der Punkte ± 1 Zweideutigkeit statt. Nach Riemann muss man sich daher die Z-Ebene zunächst doppelt denken, jedoch so, dass ihre beiden Schichten in den Verzweigungspunkten ± 1 zusammenhängen. Beide Punkte müssen ferner durch einen „Schnitt" verbunden werden, dessen Ueberschreitung aus der einen Schicht in die andere führt. Wir wollen ihn direct als Gerade von -1 nach $+1$ legen.

Bei der andern Hilfsabbildung $Z = e^{zi}$ wird jeder unendlich lange Flächenstreif von der Breite 2π, welcher der imaginären Axe parallel ist, auf die ganze Z-Ebene abgebildet. Letztere ist also unendlichfach zu denken, und der Nullpunkt und der unendliche Punkt sind als Windungspunkte unendlicher Ordnung durch einen Schnitt zu verbinden, der am bequemsten längs der positiv reellen Axe gelegt wird.

Beide Betrachtungen combiniren sich bei der Abbildung $Z = \cos z = \frac{1}{2}(e^{zi} + e^{-zi})$ in folgender Weise: Jeder der genannten Flächenstreifen wird nicht auf die einfache, sondern auf die doppelt zu denkende Z-Ebene abgebildet. Dem directen Schnitte von $+1$ nach -1 entspricht eine Theilung des Flächenstreifs durch die reelle Axe. Es mag nun festgesetzt werden, dass der Theil des Streifens, der auf derselben Seite mit der positiv imaginären Axe liegt, der oberen Schicht des Blattes entsprechen soll, der andere Theil der unteren Schicht. Die ganze z-Ebene wird jedoch auf unendlich viele Blätter der Z-Ebene abgebildet, deren jedes aus zwei Schichten besteht.

Würden die einzelnen Flächenstreifen durch die Linien $x = 2n\pi$ bestimmt, so müsste man in der Z-Ebene noch einen Schnitt von $+1$ nach $+\infty$ legen, und dann liesse sich der Zusammenhang der einzelnen doppelschichtigen Blätter folgendermassen festsetzen:

Ein Ueberschreiten des Schnittes von -1 nach $+1$ führt aus der einen Schicht eines Blattes in die andere Schicht desselben Blattes, ein Ueberschreiten des Schnittes von $+1$ nach $+\infty$ führt aus der oberen Schicht eines Blattes in die

obere Schicht eines benachbarten Blattes, oder aus der unteren Schicht eines Blattes in die untere eines benachbarten.

Fig. 1 und 2, Taf. III, stellen das gegenseitige Entsprechen beider Ebenen dar. Die Rechtecke der z-Ebene werden auf die gleichbenannten der Z-Ebene abgebildet. Die gleichnamigen Rechtecke der z-Ebene fallen auf ein und dieselbe Stelle der Z-Ebene. Dort sind Blätter und Schichten in der oben angegebenen Weise übereinander liegend zu denken.

Geht man in der z-Ebene auf einer Parallelen zur x-Axe, die oberhalb der letzteren liegt, von links nach rechts, so durchwandert man in der Z-Ebene eine Ellipse in negativer Drehung, und zwar liegt dieselbe in einer oberen Schicht.

Macht man denselben Weg auf der Parallelen, welche gegen die x-Axe symmetrisch zur obigen liegt, so beschreibt man in einer unteren Schicht der Z-Ebene dieselbe Ellipse in positiver Drehung.

Ebenso einfach lässt sich das Wandern auf Parallelen zur y-Axe und den ihnen entsprechenden Hyperbelarmen feststellen.

Beiläufig mag noch folgende Frage erörtert werden:

Wie lautet die Gleichung der Curven, welche das System der confocalen Ellipsen mit den Brennpunkten ± 1 unter constantem Winkel schneiden?

Man hat nur nöthig, die Gleichung $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ der Transformation $Z=\cos z$ zu unterwerfen. Der Geraden $y=y_1$ entspricht die Ellipse $p+p_1=e^{y_1}+e^{-y_1}$, woraus sich folgende Relationen ergeben:

$$e^{y_1}=\frac{(p+p_1)\pm\sqrt{(p+p_1)^2-4}}{2} \quad \text{oder} \quad y_1=lg\,\frac{(p+p_1)\pm\sqrt{(p+p_1)^2-4}}{2}.$$

Den Geraden $x=x_1\pm 2n\pi$ entspricht die Hyperbel $p-p_1=2\cos x_1$, folglich ist

$$x_1=\arccos\frac{p-p_1}{2}.$$

Der Geraden $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ entspricht also die Curve

$$\frac{1}{a}\arccos\frac{p-p_1}{2}+\frac{1}{b}\,lg\,\frac{(p+p_1)\pm\sqrt{(p+p_1)^2-4}}{2}=1$$

oder

$$\frac{(p+p_1)\pm\sqrt{(p+p_1)^2-4}}{2}=e^{\frac{b}{a}\left(a-\arccos\frac{p-p_1}{2}\right)}.$$

Hat man die Ebene durch confocale Ellipsen und Hyperbeln in die entsprechenden „Rechtecke“ eingetheilt, so sind die eben behandelten Curven bestimmt durch die Eckpunkte der diagonal aufeinander folgenden Rechtecke. Auch sie geben ein isothermisches Curvensystem. Ihre Ortho-

gonalen und überhaupt alle Trajectorien, die sie unter constantem Winkel schneiden, gehören derselben Classe von Curven an. Sie sind einer ähnlichen Behandlung fähig, wie die Trajectorien der durch zwei Punkte gehenden Kreisschaar, welche in meinem oben citirten Aufsatze als logarithmische Doppelspiralen bezeichnet wurden. Beiläufig sei bemerkt, dass die Gleichung der letzteren ihre einfachste Gestalt bei Anwendung der Bicircularcoordinaten erhält.

§ 3. Zusammenhang der Abbildungen $Z = \cos z$, $Z = \sin z$, $Z = \sqrt{1 - z^2}$, und die Beziehungen zwischen elliptischen, lemniscatischen und Polar-Coordinaten.

Die Abbildung $Z = \sin z$ ist von der in § 2 untersuchten nicht wesentlich unterschieden. Auf dieselbe Weise, wie dort, ergeben sich aus dem Additionstheoreme die Gleichungen:

1) $$X = \sin x \cos yi, \quad Yi = \cos x \sin yi.$$

Eliminirt man erst x, dann yi, so erhält man

2) $$\frac{X^2}{\sin^2 x} - \frac{Y^2}{\cos^2 x} = 1 \quad \text{oder} \quad p - p_1 = 2 \sin x.$$

3) $$\frac{X^2}{\cos^2 yi} - \frac{Y^2}{\sin^2 yi} = 1 \quad \text{oder} \quad p + p_1 = e^c + e^{-c}.$$

Hier entspricht also den Linien $y = \pm c$ dieselbe Ellipse, wie dort; den Linien $x = a \pm 2n\pi$ hingegen entspricht eine Hyperbel mit der Halbaxe $\sin a$, während die des § 2 die Halbaxe $\cos a$ hatte. Die Summe der Quadrate beider Halbaxen giebt die Einheit, und die Winkel, welche die entsprechenden Asymptoten mit der reellen Axe bilden, ergänzen sich zu 90°. Wir wollen deshalb jedesmal die eine Hyperbel als „Complementarhyperbel" der anderen bezeichnen.

Die Periodicitätsverhältnisse sind dieselben, wie vorher. Jedes der unendlich vielen Blätter besteht aus zwei Schichten, die sich längs des Schnittes von -1 nach $+1$ durchkreuzen. Ueberschreitet man hingegen den Schnitt von $+1$ nach $+\infty$, so gelangt man aus der oberen Schicht eines Blattes in die obere eines benachbarten Blattes, aus der untern Schicht eines Blattes hingegen in die untere eines andern.

Vorher entsprach dem Wege von 0 bis 2π in der z-Ebene der geradlinige Weg von -1 nach $+1$ und zurück nach -1 in der Z-Ebene. Jetzt entspricht demselben der Weg von 0 nach $+1$, zurück bis -1 und von dort nach Null. Beachtet man bei jenen Wanderungen, welche Flächenräume man zur Linken, welche man zur Rechten hat, so ergiebt sich für das gegenseitige Entsprechen der Quadranten Folgendes: Dem 1., 2., 3., 4. Quadranten der oberen Schichten der Ebene $Z = \sin z$ entspricht

bezüglich der 4., 1., 2., 3. Quadrant der oberen Schichten der Ebene $Z = \cos z$; dem 1., 2., 3., 4. Quadranten der unteren Schichten der Ebene $Z = \sin z$ entspricht bezüglich der 2., 3., 4., 1. Quadrant der unteren Schichten der Ebene $Z = \cos z$.

Da nun $\sin z = \sqrt{1 - \cos^2 z}$ und gleichzeitig $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$ ist, so ergiebt sich für die involutorische Verwandtschaft $Z = \sqrt{1 - z^2}$ folgendes Resultat:

Bei der Abbildung $Z = \sqrt{1 - z^2}$ entspricht dem Systeme confocaler Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten ± 1 der einen Ebene dasselbe System confocaler Kegelschnitte in der anderen, und zwar erzeugt jede Ellipse sich selbst wieder, während jede Hyperbel in ihre Complementarhyperbel übergeht.

Die speciellen Fälle, in denen die Ellipsen oder Hyperbeln Gerade sind, erläutern sich selbst. Die gleichseitige Hyperbel erzeugt sich selbst wieder. Das Entsprechen der einzelnen Quadranten ist oben festgestellt. Gleichzeitig ergiebt sich, dass jedem Gebilde der einen Ebene, welches gegen beide-Axen symmetrisch ist, ein ebenfalls symmetrisches Gebilde der andern Ebene entspricht.

Eine andere wichtige Consequenz ist folgende:

Hat man die Gleichung einer Curvenschaar in elliptischen Coordinaten, bezogen auf die Brennpunkte ± 1, und setzt man in derselben $\sqrt{4 - d^2}$ an Stelle von $d = p - p_1$, während man $s = p + p_1$ unverändert lässt, so erhält man die Gleichung des Curvensystems, welches dem ersteren bei der Abbildung $Z = \sqrt{1 - z^2}$ entspricht.

Bei der Untersuchung, inwiefern die einzelnen Individua sich gegenseitig entsprechen, vergesse man nicht, dass Doppelebene auf Doppelebene abgebildet wird.

Nun ist, wie oben angegeben wurde, bekannt, dass durch die Transformation $Z = \sqrt{1 - z^2}$ das System der Geraden durch den Nullpunkt übergeht in ein System gleichseitiger Hyperbeln durch die Punkte ± 1, während die Kreise um den Nullpunkt in das orthogonale System confocaler Lemniscaten übergehen. (Umgekehrt findet dasselbe statt.)

Die Richtigkeit dieses interessanten Satzes lässt sich schon folgendermassen übersehen: P sei ein Punkt z der z-Ebene. J und J_1 seien die Brennpunkte ± 1, ferner seien p und p_1 die absoluten Beträge der Strecken JP und J_1P, ϑ und ϑ_1 ihre Winkel mit der positiv reellen Axe. Dann ist offenbar

$$p(\cos\vartheta + i \sin\vartheta) = z + 1, \quad p_1(\cos\vartheta_1 - i \sin\vartheta_1) = z - 1,$$

folglich findet für die Abbildung $Z=\sqrt{1-z^2}=i\sqrt{(z+1)(z-1)}$ folgende Beziehung statt:

$$Z=i\sqrt{p_1(\cos\vartheta_1+i\sin\vartheta_1).p(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)}$$
$$=\pm i\sqrt{p.p_1}\left(\cos\frac{\vartheta+\vartheta_1}{2}+i\sin\frac{\vartheta+\vartheta_1}{2}\right)$$

oder

$$4)\quad R(\cos\Phi+i\sin\Phi)=\sqrt{pp_1}\left[\cos\left(\frac{\vartheta+\vartheta_1}{2}\pm\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\vartheta+\vartheta_1}{2}\pm\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

woraus sich ergiebt

$$5)\quad R=\sqrt{p.p_1},$$

$$6)\quad \Phi=\frac{\vartheta+\vartheta_1}{2}\pm\frac{\pi}{2}\quad \text{oder}\quad \vartheta+\vartheta_1=2\Phi.$$

Jedem Kreise mit Radius $R=c$ entspricht eine Lemniscate (Cassinische Linie) $pp_1=c^2$, jeder Geraden mit der Neigung $\Phi=\Phi_1$ eine Curve, deren Radii vectores dem Gesetze $\vartheta+\vartheta_1=2\Phi_1$ folgen. Diese Curven sind bekanntlich gleichseitige Hyperbeln, deren eine Asymptote die Neigung $\Phi_1\pm\frac{\pi}{2}$ hat, während die andere senkrecht auf ihr steht.*

Einer doppelt zu denkenden Geraden durch den Nullpunkt mit der Neigung Φ_1 im ersten Quadranten entsprechen zwei getrennte Arme derselben Hyperbel, der eine im oberen, der andere im unteren Blatte liegend, und zwar der eine im vierten, der andere im dritten Quadranten. Die rückwärtsgehende Verlängerung der Geraden entspricht denselben Hyperbelarmen, nur vertauschen sich die beiden Schichten der Ebene. Die Senkrechte zu der besprochenen Geraden würde die Hyperbel vervollständigen.

Es geht aus dieser Betrachtung Folgendes hervor:

Hat man die Gleichung einer Curvenschaar in Polarcoordinaten, und setzt man $p.p_1$ an Stelle von r^2, und $\frac{1}{2}(\vartheta+\vartheta_1)$ an Stelle von φ, so erhält man die Gleichung der Curvenschaar, welche der ersteren bei der Transformation $Z=\sqrt{1-z^2}$ entspricht, und zwar in lemniscatischen Coordinaten, bezogen auf die Brennpunkte ± 1.

So geht z. B. die Gleichung der logarithmischen Spirale

$$7)\quad r=ck^{\varphi}$$

durch diese Operation über in

$$8)\quad p.p_1=c^2k^{\vartheta+\vartheta_1},$$

und dies ist also die Gleichung des Curvensystems, welches die confocalen Lemniscaten unter constantem Winkel schneidet.

---

* Vergl. *Lamé*: „*Leçons sur les coordonnées curvilignes*" *etc., pag.* 217.

Es ergiebt sich ferner aus den letzten Untersuchungen eine eigenthümliche Constructionsmethode des Systems der confocalen Lemniscaten und ihrer orthogonalen gleichseitigen Hyperbeln, ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen diesen und den Polarcoordinaten mittelst des Systems confocaler Ellipsen und Hyperbeln, der im Wesentlichen auf der oben erwähnten Vertauschung von d^2 mit $(4-d^2)$ beruht.

Man denke sich in das System concentrischer Kreise um den Nullpunkt und ihrer Radien ein System von confocalen Ellipsen und Hyperbeln mit den Brennpunkten $\pm a$ gezeichnet. Jeder Punkt bewege sich auf der durch ihn gehenden Ellipse bis zum Durchschnitt mit der Complementarhyperbel der durch ihn gehenden Hyperbel im gleichen Quadranten. Dann bilden die Punkte der Kreise in der neuen Lage ein System confocaler Lemniscaten, die Punkte der Radien ein System gleichseitiger Hyperbeln, welche durch die Brennpunkte der Lemniscaten gehen.

Der durch die Brennpunkte gehende Kreis verwandelt sich in die gewöhnliche, durch den Nullpunkt gehende Lemniscate, die grösseren Kreise geben geschlossene Lemniscaten, die kleineren solche, die aus zwei getrennten Ovalen bestehen. Umgekehrt gehen durch diese Uebertragung confocale Lemniscaten um $\pm a$ und ihre orthogonalen Hyperbeln in Kreise und Gerade über.

Bei der Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel geht die gleichseitige Hyperbel in sich selbst über. Daraus folgt z. B.:

Schneidet einer der Kreise die gleichseitige Hyperbel, so geht die entsprechende Lemniscate durch dieselben vier Durchschnittspunkte. Schneidet eine der Geraden dieselbe Hyperbel, so geht die entsprechende Hyperbel der ersteren durch dieselben zwei Durchschnittspunkte. Wird eine der Ellipsen durch einen Kreis von Innen berührt, so wird sie auch von der entsprechenden Lemniscate von Innen berührt, jedoch auf anderer Axe.

Jeder Kreis, dessen Radius > 1 ist (± 1 mögen die Brennpunkte sein), berührt zwei der confocalen Ellipsen, die eine auf der reellen, die andere auf der imaginären Axe. Dasselbe findet bei der entsprechenden Lemniscate statt, nur jedesmal auf der anderen Axe. Ist hingegen der Radius < 1, so berühren die beiden sich entsprechenden Curven eine Hyperbel, resp. ihre Complementarhyperbel und eine der Ellipsen. Aehnliche Bemerkungen lassen sich über die Geraden und Hyperbeln machen. Es folgen aus diesen Verhältnissen eine ganze Reihe geometrischer Sätze über diese Curvensysteme.

Um das System der confocalen Lemniscaten und ihrer orthogonalen Hyperbeln zu zeichnen, erinnere man sich noch des folgenden, analytisch leicht zu beweisenden Satzes:

Der Einheitskreis wird von den ihn schneidenden Lemniscaten horizontal, von jeder der Hyperbeln in zwei Punkten vertical durchschnitten.

Theilt man die Ebene durch concentrische Kreise und ihre Radien in ein System ähnlicher Flächenräume ein, so folgen die Geraden unter gleichen Winkeln aufeinander, während die Radien der Kreise eine geometrische Reihe bilden, z. B.

$$\ldots \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3 \ldots.$$

Will man die Ebene durch confocale Lemniscaten und die orthogonalen Hyperbeln in ein System rechtwinkliger Flächenräume eintheilen, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben, so folgt hieraus, dass die Asymptoten der Hyperbeln unter gleichen Winkeln aufeinander folgen, während die Producte $p.p_1$ für die Lemniscaten folgende Reihe bilden:

$$\ldots \frac{1}{a^6}, \frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^2}, 1, a^2, a^4, a^6 \ldots$$

Die grossen Halbaxen der letzteren bilden demnach die Reihe:

$$\ldots \sqrt{1+\frac{1}{a^6}}, \sqrt{1+\frac{1}{a^4}}, \sqrt{1+\frac{1}{a^2}}, \sqrt{2}, \sqrt{1+a^2}, \sqrt{1+a^4}, \sqrt{1+a^6} \ldots,$$

aus der sich ohne Schwierigkeit die Reihe für die kleinen Halbaxen ergiebt.

Fig. 3 stellt ein solches System der besprochenen Curven dar. — Es sei noch bemerkt, dass auch hier die Eckpunkte diagonal aufeinanderfolgender Rechtecke die Construction der Trajectorien ermöglichen, die durch Gleichung 8) dargestellt sind.

Die folgenden Paragraphen machen noch einige Verallgemeinerungen nöthig. Es ergiebt sich leicht, dass die Abbildung $Z=\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}$ ebenfalls Kreise um den Nullpunkt in Lemniscaten um ± 1 verwandelt, nur wird nicht der Einheitskreis, sondern der Kreis durch $\pm \frac{1}{\varkappa}$ in die durch den Nullpunkt gehende Lemniscate transformirt. Demnach ist auch die Abbildung $Z=\sqrt{1+z^2}=\sqrt{1-(iz)^2}$ nicht wesentlich von der oben behandelten unterschieden.

Die Abbildungen $Z=\lambda\sqrt{1-z^2}$ und $Z=\lambda\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}$ verwandeln die Kreise in Lemniscaten um die Punkte $\pm\lambda$. Die Factoren $\varkappa$ und λ dürfen auch complexe Werthe annehmen. Sie verändern die geometrischen Gebilde nur in Bezug auf den Massstab und bringen höchstens eine Drehung des entsprechenden Coordinatensystems hervor.



Für unsere Zwecke ist noch folgende Frage von Wichtigkeit: In welche Curven werden confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten $\pm\lambda$ verwandelt, wo λ eine complexe Zahl ist?

Die Abbildung $Z=\lambda\sqrt{1-z^2}$ verwandelt die Kreise um den Nullpunkt in Lemniscaten um $\pm\lambda$. Unterwerfen wir diese Lemniscaten der Transformation $Z=\sqrt{1-\zeta^2}$, so ist das Resultat offenbar dasselbe, als wenn wir die Kreise direct der Transformation $Z=\sqrt{1-(\lambda\sqrt{1-z^2})^2}$ unterwerfen. Nun ist aber der Ausdruck $Z=\sqrt{1-\lambda^2}\,.\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}z^2}$ mit dem vorgehenden identisch. Durch diese Transformation werden aber Kreise um den Nullpunkt in Lemniscaten mit den Brennpunkten $\pm\sqrt{1-\lambda^2}$ verwandelt. Wir haben also folgenden allgemeinen Satz:

Durch die Transformation $Z=\sqrt{1-z^2}$ verwandeln sich confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten $\pm\lambda$ in confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten $\pm\sqrt{1-\lambda^2}$ und die gleichseitigen Hyperbeln durch die Punkte $\pm\lambda$ in solche durch die Punkte $\pm\sqrt{1-\lambda^2}$.

Ist im speciellen Falle λ reell und <1, so liegen auch die Brennpunkte des zweiten Systems auf der reellen Axe. Ist $\lambda=1$, so fallen die Brennpunkte der zweiten Gruppe in den Nullpunkt, sie gehen also in Kreise über. Ist $\lambda=0$, d. h. ist das erste System das der concentrischen Kreise, so geht das zweite in Lemniscaten um ± 1 über.

Ist λ reell und >1, so liegen die Brennpunkte des zweiten Systems auf der imaginären Axe. Ist endlich λ imaginär, so liegen sie auf der reellen Axe ausserhalb der Strecke ± 1.

Der oben bewiesene Satz war also nur ein specieller Fall eines viel allgemeineren Theorems. Dasselbe gilt auch von der Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel.

Noch allgemeiner verwandelt die Transformation $Z=a\sqrt{1-\varkappa^2z^2}$ die Lemniscaten um $\pm\lambda$ in solche um $\pm a\sqrt{1-\varkappa^2\lambda^2}$.

Auf die geometrischen Consequenzen dieses interessanten Satzes wollen wir jetzt nicht näher eingehen.

§ 4. Die Abbildung $Z=\sin am\, z$ (für $\varkappa$ +, reell und <1).

In derselben Weise, wie die Abbildung $Z=\sin z$, lässt sich auch die der elliptischen Function $Z=\sin am z$ entsprechende behandeln. Hier gelten die Gleichungen

$$1)\ \sin am(x\pm yi)=X\pm Yi=\frac{\sin am x\cos am yi\,\Delta am yi\pm\sin am yi\cos am x\,\Delta am x}{1-\varkappa^2\sin^2 am x\sin^2 am yi}.$$

Addition und Subtraction geben als reellen und imaginären Theil



$$2)\qquad X=\frac{\sin am\, x \cos am\, yi\, \Delta\, am\, yi}{1-\varkappa^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi}.$$

$$3)\qquad Yi=\frac{\sin am\, yi \cos am\, x\, \Delta\, am\, x}{1-\varkappa^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi}.$$

Schliesslich erhält man durch Multiplication von $\sin am\,(x+yi)$ und $\sin am\,(x-yi)$

$$4)\qquad X^2+Y^2=\frac{\sin^2 am\, x-\sin^2 am\, yi}{1-\varkappa^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi}.$$

Zur Abkürzung mag gesetzt werden

$$\sin am\, x=l,\quad \sin am\, yi=\lambda,$$
$$\cos am\, x=m,\quad \cos am\, yi=\mu,$$
$$\Delta\, am\, x=n,\quad \Delta\, am\, yi=\nu.$$

Dann folgen aus Gleichung 4) die Relationen

$$l^2=\frac{\lambda^2+(X^2+Y^2)}{1+\varkappa^2\lambda^2(X^2+Y^2)},\qquad \lambda^2=\frac{l^2-(X^2+Y^2)}{1-\varkappa^2 l^2(X^2+Y^2)}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen 2) und 3) ein, so ergeben sich neue, die sich auf folgende Form bringen lassen:

$$5)\qquad (X^2+Y^2)^2+(X^2+Y^2)\frac{1+\varkappa^2\lambda^4}{\varkappa^2\lambda^2}-X^2\frac{(1-\varkappa^2\lambda^4)^2}{\varkappa^2\lambda^2\mu^2\nu^2}+\frac{1}{\varkappa^2}=0,$$

$$6)\qquad (X^2+Y^2)^2-(X^2+Y^2)\frac{1+\varkappa^2 l^4}{\varkappa^2 l^2}+Y^2.\frac{(1-\varkappa^2 l^4)^2}{\varkappa^2 l^2 m^2 n^2}+\frac{1}{\varkappa^2}=0.$$

Ist nun x constant, also

$$x=c=\int\limits_0^l\frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-\varkappa^2Z^2)}},$$

so werden auch l, m und n constant. Ebenso entsprechen constantem y constante Werthe von λ, μ, ν, wobei λ ebenfalls durch die obere Grenze eines bestimmten Integrals obiger Form dargestellt wird.

Beachtet man die doppelte Periodicität der elliptischen Function, so ergiebt sich demnach folgender Satz:

Sämmtlichen Parallelen zur y-Axe der z-Ebene von der Gleichung $x=a\pm 4nK$ entspricht eine Curve vierten Grades, deren Gleichung die Form 6) hat. Sämmtlichen Parallelen zur x-Axe von der Gleichung $y=\alpha\pm 2nK'$ entspricht eine Curve, deren Gleichung von der Form 5) ist.

Die beiden Curvensysteme sind orthogonal und gehören wieder zu den isothermischen. Da X und Y nur in geraden Potenzen vorkommen, so sind beide Systeme symmetrisch gegen beide Axen.

In Polarcoordinaten lauten die Gleichungen:

$$7)\qquad R^4+R^2\frac{1+\varkappa^2\lambda^4}{\varkappa^2\lambda^2}-R^2\cos^2\vartheta.\frac{(1-\varkappa^2\lambda^4)^2}{\varkappa^2\lambda^2\mu^2\nu^2}+\frac{1}{\varkappa^2}=0,$$

$$8)\qquad R^4-R^2.\frac{1+\varkappa^2 l^4}{\varkappa^2 l^2}+R^2\sin^2\vartheta\,\frac{(1-\varkappa^2 l^4)^2}{\varkappa^2 l^2 m^2 n^2}+\frac{1}{\varkappa^2}=0.$$

Nur in Gleichung 7) kann der Factor von $R^2 \cos^2 \vartheta$ verschwinden. Dies geschieht für $\lambda = \pm \frac{i}{\sqrt{\varkappa}}$. Dann geht die Gleichung über in $R^4 - R^2 \cdot \frac{2}{\varkappa^2} + \frac{1}{\varkappa^2} = 0$ oder in

7*) $$R^2 = \frac{1}{\varkappa}.$$

Nun ist aber

$$\sin am\left(\pm \frac{iK'}{2}\right) = \pm \frac{i}{\sqrt{\varkappa}};$$

folglich gilt der Satz:

Bei der Abbildung $Z = \sin am z$ ($\varkappa$ +, reell und < 1) entspricht den Parallelen $y = \pm \frac{2n+1}{2} K'$ der z-Ebene stets ein Kreis um den Nullpunkt der Z-Ebene mit dem Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$.

Im nächsten Paragraphen wird sich ferner zeigen, dass den Parallelen $x = \pm \frac{2n+1}{2} K$ stets eine Lemniscate mit den Brennpunkten $\pm \frac{1}{\varkappa}$ entspricht, welche durch die Punkte $\pm \frac{1}{\varkappa}\sqrt{1-\varkappa}$ und $\pm \frac{1}{\varkappa}\sqrt{1+\varkappa}$ geht. (Wir können auch schreiben: durch die Punkte $\pm \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}}$ und $\pm \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa}}$). Dies lässt sich auch direct zeigen. Setzt man nämlich $\sin am\left(\pm \frac{2n+1}{2} K\right)$, also $\pm \frac{1}{\sqrt{1+\varkappa}}$ wirklich in Gleichung 6) ein, so geht sie über in

$$(X^2 + Y^2)^2 - (X^2 - Y^2) \frac{2}{\varkappa^2} + \frac{1}{\varkappa^2} = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Lemniscate.

Für einen Augenblick werde jener Kreis als Einheitskreis betrachtet, was man durch die Transformation $\mathrm{R} = R \cdot \sqrt{\varkappa}$ erreicht. Dann nehmen die Gleichungen 7) und 8), wenn man sie noch mit $\frac{\varkappa^2}{\mathrm{R}^2}$ multiplicirt, folgende Gestalt an:

9) $$\mathrm{R}^2 + \frac{1 + \varkappa^2\lambda^4}{\varkappa\lambda^2} - \cos^2\vartheta \frac{(1-\varkappa^2\lambda^4)^2}{\varkappa\lambda^2\mu^2\nu^2} + \frac{1}{\mathrm{R}^2} = 0,$$

10) $$\mathrm{R}^2 - \frac{1 + \varkappa^2 l^4}{\varkappa l^2} + \sin^2\vartheta \frac{(1-\varkappa^2 l^4)^2}{\varkappa l^2 m^2 n^2} + \frac{1}{\mathrm{R}^2} = 0.$$

Diese Gleichungen sind reciprok. Für unsere Curvensysteme ergiebt sich also der Satz:

Der ausserhalb jenes Kreises liegende Theil beider Curvenschaaren lässt sich durch Transformation mittels reciproker Radii vectores aus dem innerhalb liegenden erzeugen.

Hieraus folgt beiläufig für die aus zwei Ovalen bestehende Lemniscate, dass sie reciprok gegen den Kreis um den Nullpunkt ist, der sie rechtwinklig schneidet.

Der genannten Reciprocität entspricht eine gewisse Symmetrie innerhalb des rechtwinkligen Periodenparallelogramms.

Untersucht man die Specialfälle $x = \pm K$, $x = \pm 2K$, $y = 0$, $y = \pm K'$, d. h. also $l = \pm 1$, $l = 0$, $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, so erkennt man, dass für diese Werthe die Curven in Gerade übergehen, und zwar entspricht sämmtlichen Linien $y = \pm 2nK'$ der Weg von -1 nach $+1$, hin und zurück unendlich oft durchlaufen; sämmtlichen Linien $x = (1 \pm 4n)K$ die Strecke der reellen Axe von $+1$ nach $+\frac{1}{\varkappa}$, den Parallelen $x = -(1 \pm 4nK)$ oder $x = (3 \pm 4nK)$ die Strecke zwischen -1 und $-\frac{1}{\varkappa}$, allen Parallelen $y = \pm (2n + 1)K'$ der Weg von $+\frac{1}{\varkappa}$ längs der reellen Axe nach ∞ und von $-\infty$ nach $-\frac{1}{\varkappa}$, schliesslich allen Parallelen $x = \pm 4nK$ die ganze Y-Axe.

Beobachtet man bei diesen Wanderungen, welche Flächenräume man zur Linken, welche man zur Rechten hat, so ergiebt sich zunächst, dass jedes rechtwinklige Periodenparallelogramm der z-Ebene auf eine doppelt zu denkende Ebene abgebildet wird, das halbe Periodenparallelogramm auf die einfache Ebene, der vierte Theil desselben auf das Innere oder Aeussere eines Kreises mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, wobei jedoch von $+1$, resp. $+\frac{1}{\varkappa}$, und von -1, resp. $-\frac{1}{\varkappa}$ nach der Peripherie desselben Schnitte zu denken sind.*

Im Riemann'schen Sinne wird man schliesslich zu folgender Vorstellung genöthigt: Es liegen in der Z-Ebene doppelt unendlich viele Blätter übereinander, deren jedes aus zwei Schichten besteht. Die Schnitte legt man am bequemsten in die reelle Axe, z. B. einen von $-\frac{1}{\varkappa}$ nach -1, den zweiten von $+1$ nach $+\frac{1}{\varkappa}$, einen dritten endlich von $+\frac{1}{\varkappa}$ über ∞ nach $-\frac{1}{\varkappa}$. Nur die Strecke von $+1$ nach -1 bleibt ohne Schnitt. Jedem dieser

* Hierauf beruht im Wesentlichen die von Herrn Prof. Schwarz gegebene Abbildung des Innern eines Kreises auf ein Rechteck. Vergl. dessen Abhandlung im 70. Bande des Crelle'schen Journals: „Ueber einige Abbildungsaufgaben". Es ist nur noch nöthig, durch Transformation mittels reciproker Radii vectores die Halbebene in das Innere eines nicht eingeschnittenen Kreises zu verwandeln.



Schnitte entspricht eine besondere Art von Durchkreuzungen. Man kann z. B. folgende Anordnung treffen: Längs des Schnittes von $+1$ nach $+\frac{1}{\varkappa}$ durchkreuzen sich stets die obere und untere Schicht desselben Blattes. Ueberschreitung des Schnittes von -1 nach $-\frac{1}{\varkappa}$ führt aus der untern Schicht eines Blattes in die obere Schicht eines benachbarten Blattes, oder umgekehrt. Längs des Schnittes von $\frac{1}{\varkappa}$ über ∞ nach $-\frac{1}{\varkappa}$ hängt die untere Schicht jedes Blattes mit der untern Schicht eines benachbarten, die obere Schicht jedes Blattes mit der oberen eines benachbarten zusammen. Es wäre wohl möglich, diese complicirte Art der gegenseitigen Durchkreuzung durch ein Modell darzustellen. Fig. 4 und 5 stellen das gegenseitige Entsprechen beider Ebenen dar. Die gleichnamigen Flächenräume der z-Ebene fallen sämmtlich auf einen entsprechenden Raum der Z-Ebene. Das halbe Periodenparallelogramm mit den Ecken $K \pm iK'$ und $-K \pm iK'$ ist besonders hervorgehoben.*

Die Conformität der Abbildung $Z = \sin am\, z$ hört, abgesehen vom unendlichen Punkte, noch auf in den Punkten ± 1 und $\pm \frac{1}{\varkappa}$. Dort entspricht jedem rechten Winkel der z-Ebene ein gestreckter in der Z-Ebene, jedem gestreckten der ersteren ein voller Winkel in der andern. Alle Linien, welche durch die entsprechenden Punkte der z-Ebene gehen, werden demnach in solche verwandelt, die in ± 1 und $\pm \frac{1}{\varkappa}$ Rückkehrpunkte haben. Bekanntlich beruht dies darauf, dass für diese Punkte der Differentialquotient von $\sin am\, z$ verschwindet. Nach Siebeck sind solche Punkte Brennpunkte für die betreffenden Curvenschaaren.

Will man die Ebene durch beide Curvensysteme in rechtwinklige Flächenräume eintheilen, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben, und sind die nöthigen Elemente für ein „Rechteck" gegeben, so lassen sich die übrigen mit Hilfe des Additionstheorems construiren. Folgen z. B. die Parallelen zur imaginären Axe der z-Ebene folgendermassen aufeinander:

$$x = 0,\ x = a,\ x = 2a \ldots,$$

so schneiden die entsprechenden Curven der Z-Ebene die reelle Axe in folgenden Punkten:

$$X = 0,\ x = \sin am\, a,\ x = \sin am\, 2a = \frac{2 \sin am\, a \cos am\, a\, \Delta am\, a}{1 - \varkappa^2 \sin^4 am\, a} \ldots,$$

Tabellen lassen sich also ohne Schwierigkeit darstellen.

* Das ganze Curvensystem ist dargestellt in der citirten Siebeck'schen Abhandlung im 57. Bande des Crelle'schen Journals.

Die Eckpunkte der diagonal aufeinander folgenden Rechtecke bestimmen wieder das System der Trajectorien. Nur zwei Gruppen derselben sind von besonderem Interesse und führen auf verhältnissmässig einfache Gleichungen, die Curvenschaaren nämlich, welche den Parallelen zu den Diagonalen des rechtwinkligen Periodenparallelogramms entsprechen. Diese schneiden die Axen unter Winkeln, welche sich durch die Gleichung

$$\tan\varphi = \pm \frac{K'}{2K}$$

bestimmen. Jede dieser Curven umschliesst entweder die Brennpunkte $+1$ und $-\frac{1}{\varkappa}$, oder -1 und $+\frac{1}{\varkappa}$ und kehrt dann in sich selbst zurück. Aus jener Gleichung folgt nun

$$\cos\varphi \pm i\sin\varphi = \frac{2K \pm iK'}{\sqrt{4K^2 + K'^2}}.$$

Multiplication des Arguments mit $(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ bringt aber eine Drehung des Coordinatensystems um den Winkel $\pm\varphi$ hervor. Man findet also die Gleichung jener Trajectorien, wenn man folgende Frage untersucht:

Welche Curven entsprechen den Parallelen zur reellen Axe bei den Abbildungen

$$11) \qquad X + Yi = \sin am \left[(x + yi)\, \frac{2K \pm iK'}{\sqrt{4K^2 + K'^2}}\right]?$$

Die Schwierigkeit dieses noch nicht behandelten Problems beruht darauf, dass die in § 1 angedeuteten Vereinfachungen hier nicht stattfinden. Am einfachsten gestaltet sich die Untersuchung in dem Falle, wo $2K = K'$ ist. Dann ist $\varphi = \pm 45^0$, und Gleichung 11) geht über in

$$12) \qquad X + Yi = \sin am \left[(x + yi)(1 \pm i)\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right],$$

wo jedoch der Modul $\varkappa$ dem Periodenverhältniss $\frac{K'}{2K} = 1$ gemäss zu bestimmen ist.

Einer der hierher gehörigen Specialfälle ist durch eine kurze Anmerkung am Schluss der Jochmann'schen Abhandlung im 14. Jahrgange dieser Zeitschrift erledigt.

Beiläufig sei bemerkt, dass die Behandlung der Abbildungen 11) und 12) auf interessante Resultate führt, die sich auf die Oberfläche der Kugel und des dreiaxigen Ellipsoids beziehen. Es ergiebt sich z. B., dass die Oberfläche des Ellipsoids durch zwei Systeme in sich selbst zurücklaufender Curven, welche die Krümmungslinien unter constantem, näher zu bestimmendem Winkel schneiden, in ein System schiefwinkliger Flächenräume eingetheilt werden kann, die mit zunehmender Kleinheit der Aehnlichkeit zustreben. Für die Kugel gehen bekanntlich die Krümmungslinien in zwei Systeme confocaler sphärischer Kegelschnitte über. Theilen im speciellen

Falle die Brennpunkte derselben den durch sie gehenden grössten Kreis in vier gleiche Theile, so ist das System von Trajectorien dasjenige, welches die sphärischen Kegelschnitte unter dem Winkel $\pm 45^0$ schneidet. Die vier durch die Brennpunkte gehenden Curven haben dort Rückkehrpunkte und bilden zusammen zwei grösste Kreise. Projicirt man dieses System stereographisch von einem Pole des Kreises aus, auf dem die Brennpunkte liegen, auf eine Ebene, so erhält man, wie aus der Schlussanmerkung der Jochmann'schen Abhandlung gefolgert werden kann, eine Gruppe der durch $Z = \cos am\, z$ (mit einem bestimmten Modul) dargestellten Curven.

Man vergleiche an dieser Stelle den Schlussparagraphen meiner oben citirten Abhandlung über die logarithmische Abbildung, welcher specieller auf den Zusammenhang der besprochenen Curvenschaaren mit den Krümmungslinien des Ellipsoids und den sphärischen Kegelschnitten hinweist.

Beiläufig ergiebt sich aus einer oben gemachten Anmerkung, dass eine bestimmte stereographische Projection desjenigen sphärischen Kegelschnitts, welcher die Halbkugel in zwei correspondirende Flächenräume eintheilt, auf eine aus zwei Ovalen bestehende Lemniscate führt.

Die Betrachtungen des folgenden Paragraphen machen es nöthig, für einen Augenblick auf die Siebeck'sche Abhandlung im 57. Bande des Crelle'schen Journals Bezug zu nehmen. Dort werden die Gleichungen unserer Curvenschaaren in elliptischen Coordinaten mit den Brennpunkten ± 1 dargestellt, und zwar stimmt die Entwickelung im Wesentlichen mit derjenigen überein, welche in § 3 für die Untersuchung der Abbildung $Z = \sqrt{1 - z^2}$ angewendet wurde.

P sei ein Punkt Z der Z-Ebene, P_1 der conjugirte Punkt, J und J_1 die Brennpunkte ± 1, dann gelten folgende Gleichungen:

$$JP = (X + Yi) - 1, \quad J_1 P = (X + Yi) + 1,$$
$$J_1 P = (X - Yi) - 1, \quad J_1 P_1 = (X - Yi) + 1.$$

Das Product zweier conjugirter Zahlen ist bekanntlich das Quadrat ihres absoluten Betrags. Der absolute Betrag von JP und JP_1 werde mit p, der von $J_1 P$ und $J_1 P_1$ mit p_1 bezeichnet. Dann finden für die Transformation $X + Yi = \sin am\,(x + yi)$ folgende Gleichungen statt:

$$p_1^2 = [1 + \sin am(x + yi)]\,[1 + \sin am(x - yi)] = \frac{(\sin am\, x\, \Delta\, am\, yi + \cos am\, yi)^2}{1 - \varkappa^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi}.$$

$$p^2 = [1 - \sin am(x + yi)]\,[1 - \sin am(x - yi)] = \frac{(\sin am\, x\, \Delta\, am\, yi - \cos am\, yi)^2}{1 - \varkappa^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi}.$$

Setzt man jetzt $JP + J_1 P = S$, $JP - J_1 P = D$, so ergiebt sich

$$S = \frac{2 \sin am\, x\, \Delta\, am\, x}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi}}, \quad D = \frac{2 \cos am\, yi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi}}.$$

Elimination von x führt auf die Gleichung:

$$\text{13)} \qquad \frac{D^2}{\cos^2 am\, yi} - \frac{S^2 \varkappa^2 \cos^2 co\, am\, yi}{\varkappa'^2} = 4$$

oder

$$13^*)\qquad \cos^2 co\, am\,(y\varkappa')\, S^2 + \cos^2 am\,(y\varkappa')\, D^2 = 4.$$

Durch Elimination von yi hingegen findet man

$$14)\qquad \frac{S^2}{\cos^2 co\, am\, x} - \frac{D^2 \varkappa^2 \cos^2 am\, x}{\varkappa'^2} = 4.$$

Die Brennpunkte $\pm \frac{1}{\varkappa}$ sind gleichberechtigt mit ± 1. Wir wollen die Gleichungen derselben Curven in elliptischen Coordinaten mit den Brennpunkten $\pm \frac{1}{\varkappa}$ darstellen. Der entsprechende Gang ist bei analoger Bezeichnung folgender:

$$p^2 = \left[\frac{1}{\varkappa} - \sin am\,(x+yi)\right].\left[\frac{1}{\varkappa} - \sin am\,(x-yi)\right]$$
$$= \frac{(\Delta\, am\, yi - \varkappa \sin am\, x \cos am\, yi)^2}{\varkappa^2 (1 - \varkappa^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi)},$$

$$p_1^2 = \left[\frac{1}{\varkappa} + \sin am\,(x+yi)\right].\left[\frac{1}{\varkappa} + \sin am\,(x-yi)\right]$$
$$= \frac{(\Delta\, am\, yi + \varkappa \sin am\, x \cos am\, yi)^2}{\varkappa^2 (1 - \varkappa^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi)},$$

folglich

$$S = \frac{2\Delta\, am\, yi}{\varkappa \sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi)}},\qquad D = \frac{2 \sin am\, x \cos am\, yi}{\sqrt{(1 - \varkappa^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi)}}.$$

Elimination von x führt auf die Gleichung

$$15)\qquad \frac{\varkappa_2 S^2}{\Delta^2 am\, yi} - \varkappa^2 D^2 \tan^2 am\, yi = 4$$

oder

$$15^*)\qquad \varkappa^2 S^2 \sin^2 co\, am\,(y\varkappa') + \varkappa^2 D^2 \sin^2 am\,(y\varkappa') = 4.$$

Elimination von yi führt auf

$$16)\qquad \frac{\varkappa^2 S^2 \Delta^2 am\, x}{\varkappa'^2} - \frac{\varkappa^2 D^2}{\varkappa'^2 \tan^2 am\, x} = 4.$$

Betrachtet man die Strecken $\frac{1}{\varkappa}$ als Einheit, so verändern sich diese Gleichungen nur insofern, als der Factor $\varkappa^2$ einfach wegfällt.

Die durch Gleichung 13), 13*), 15), 15*) dargestellten Curven entsprechen den Parallelen zur x-Axe, die durch 14) und 16) dargestellten den Parallelen zur y-Axe.

§ 5. Zusammenhang der Abbildungen $Z = \sin am\, z$, $Z = \cos am\, z$, $Z = \Delta\, am\, z$.

Die Abbildungen $Z = \cos am\, z$ und $Z = \Delta\, am\, z$ lassen sich ebenso behandeln, wie $Z = \sin am\, Z$. Sowohl die Anwendung des Additionstheorems, als auch der Siebeck'sche Weg führen zum Ziele. Einfacher erreichen

wir dasselbe, indem wir die oben gefundenen Resultate mit den Abbildungen $Z=\sqrt{1-z^2}$ und $Z=\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}$ combiniren.

Man würde z. B. die Gleichungen der Curven, welche bei der Abbildung $Z=\cos am\, z$ den Parallelen zu beiden Axen entsprechen, in lemniscatischen Coordinaten sofort erhalten, wenn man in den Gleichungen 7) und 8) des § 4 $p.p_1$ an Stelle von R^2, und $(\varphi+\varphi_1)$ an Stelle von 2ϑ setzte.

Ebenso leicht ergeben sie sich, wenn man in den Gleichungen 13) und 14) von § 4 $4-D^2$ an Stelle von D^2 setzt.

Geometrisch lassen sie sich aus den *sin am*-Curven construiren durch Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel unter Zugrundelegung des Systems confocaler Kegelschnitte um ± 1.

Die Brennpunkte der *cos am*·Curven sind ± 1 und $\pm \frac{\varkappa'}{\varkappa} i$, denn für die entsprechenden Werthe des Arguments verschwindet der Differentialquotient von $\cos am\, z$.

Der Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$, der bei den *sin am*-Curven auftrat, verwandelt sich in die Lemniscate $p.p_1=\frac{1}{\varkappa}$ mit den Brennpunkten ± 1, die Lemniscate mit den Brennpunkten $\pm \frac{1}{\varkappa}$ verwandelt sich nach den Resultaten des § 3 in eine Lemniscate mit den Brennpunkten $\pm i\frac{\varkappa'}{\varkappa}$, welche durch die Punkte $\pm\sqrt{\frac{\varkappa'}{1+\varkappa'}}$ und $\pm i\sqrt{\frac{\varkappa'}{1-\varkappa'}}$ geht.

Es gilt demnach folgender Satz:

Bei der Abbildung $Z=\cos am\, z$ entspricht stets den Linien $y=\frac{2n+1}{2}K'$ eine Lemniscate mit den Brennpunkten ± 1, welche durch die Punkte $\pm\sqrt{\frac{1+\varkappa}{\varkappa}}$ und $\pm i\sqrt{\frac{1-\varkappa}{\varkappa}}$ geht; den Linien $x=\frac{2n+1}{2}K$ eine Lemniscate mit den Brennpunkten $\pm i\frac{\varkappa'}{\varkappa}$, welche durch die Punkte $\pm\sqrt{\frac{\varkappa'}{1+\varkappa'}}$ und $\pm i\sqrt{\frac{\varkappa'}{1-\varkappa'}}$ geht.

Durch Vertauschung von D^2 mit $4-D^2$ geht Gleichung 14) des § 4 nach einigen Umformungen über in

$$1)\qquad \frac{S^2}{\sin^2 am\, x}+D^2.\varkappa^2 \sin^2 co\, am\, x=4.$$

Verwandelt man das Argument x in $u=K-x$, so geht die Gleichung über in

1*) $$\frac{S^2}{\sin^2 co\, am\, u} + D^2 \varkappa^2 \sin^2 am\, u = 4,$$

und dies ist die Form, in welcher sie Siebeck nach seiner Methode findet.

Durch dieselbe Operation geht Gleichung 13) des § 4 über in

2) $$\frac{D^2}{\sin^2 am\, y\, i} + S^2 \varkappa^2 \sin^2 co\, am\, y\, i = 4.$$

Verwandelt man hier das Argument $y i$ in $v = y i \pm K$, so entsteht die Gleichung

2*) $$D^2 \Delta^2 am (v \varkappa') - S^2 \varkappa^2 \tan^2 am (v \varkappa') = 4,$$

was ebenfalls mit dem Siebeck'schen Resultate übereinstimmt. Ebenso würde man von Gleichung 13*) gelangen auf

3) $$\frac{\varkappa^2 S^2}{\Delta^2 am (y \varkappa')} - \frac{D^2}{\tan^2 am (y \varkappa')} = 4,$$

wo die Vertauschung des Arguments y mit $y \pm i K$ auf Gleichung 2*) zurückführen würde.

Die Verschiebung des Coordinatensystems um $\pm K$ ist hier überhaupt oft von Vortheil, da $\cos am (\pm K) = 0$ ist und demnach durch jene Veränderung ein günstigeres Entsprechen beider Ebenen herbeigeführt wird.

Auch bei dieser Abbildung handelt es sich um doppelt unendlich viele Blätter, deren jedes aus zwei Schichten besteht. Schnitte und Durchkreuzungen lassen sich in ähnlicher Weise, wie oben, feststellen.

Auf die Abbildung $Z = \Delta am\, z$ gelangen wir, wenn wir die Ebene $Z = \sin am\, z$ der Transformation $Z = \sqrt{1 - \varkappa^2 z^2}$ unterwerfen. $Z = \varkappa z$ verwandelt zunächst die Strecke $\frac{1}{\varkappa}$ in die Einheit. Dadurch gehen die Gleichungen 15), 15*) und 16) des § 4 über in folgende:

4) $$\frac{S^2}{\Delta^2 am\, y\, i} - D^2 \tan^2 am\, y\, i = 4$$

oder

4*) $$S^2 \sin^2 co\, am (y \varkappa') + D^2 \sin^2 am (y \varkappa') = 4,$$

5) $$\frac{S^2 \Delta^2 am\, x}{\varkappa'^2} - \frac{D^2}{\varkappa'^2 \tan^2 am\, x} = 4.$$

Setzt man $4 - D^2$ an Stelle von D^2, so geht Gleichung 4*), resp. 5) über in

6) $$\frac{S^2}{\Delta^2 am (y \varkappa')} - D^2 \tan^2 am (y \varkappa') = 4,$$

7) $$S^2 \sin^2 am\, x + D^2 \sin^2 co\, am\, x = 4.$$

Gleichung 6) entspricht den Parallelen zur x-Axe, Gleichung 7) den Parallelen zur y-Axe. Durch die Transformation $Z = \varkappa z$ war zunächst der Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ in einen andern mit Radius $\sqrt{\varkappa}$ verwandelt. Derselbe geht durch die Transformation $Z = \sqrt{1 - \zeta^2}$ in eine Lemniscate $p p_1 = \varkappa$, bezogen auf die Brennpunkte ± 1, über. Folglich:

Bei der Abbildung $Z = \Delta am z$ entspricht den Parallelen zur x-Axe von der Gleichung $y = \pm \frac{2n+1}{2} K'$ stets eine Lemniscate mit den Brennpunkten ± 1, welche durch die Punkte $\pm \sqrt{1+\varkappa}$ und $\pm \sqrt{1-\varkappa}$ geht.

Hier ist $\varkappa < 1$, folglich besteht die Lemniscate aus zwei getrennten Ovalen.

Es muss noch folgender bereits angewendeter Satz bewiesen werden:

Bei der Abbildung $Z = \Delta am z$ entspricht den Parallelen zur y-Axe von der Form $x = \pm \frac{2n+1}{2} K$ ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $R = \sqrt{\varkappa'}$.

Um den Beweis zu liefern, entwickeln wir die Gleichungen der Δam-Curven mit Hilfe des Additionstheorems in gewöhnlichen Coordinaten.

Aus

$$8) \quad \Delta am(x \pm yi) = \frac{\Delta am x \, \Delta am y i \mp \varkappa^2 \sin am x \cos am x \sin am y i \cos am y i}{1 - \varkappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am y i}$$

folgt durch Addition und Subtraction

$$9) \quad X = \frac{\Delta am x \, \Delta am y i}{1 - \varkappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am y i}, \qquad Yi = -\frac{\varkappa^2 \sin am x \cos am x \sin am y i \cos am y i}{1 - \varkappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am y i},$$

und durch Multiplication von $\Delta am\,(x + yi)$ und $\Delta am\,(x - yi)$ ergiebt sich

$$10) \quad X^2 + Y^2 = \frac{\Delta^2 am x - \varkappa^2 \cos^2 am x \sin^2 am y i}{1 - \varkappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am y i} = \frac{\Delta^2 am y i - \varkappa^2 \cos^2 am y i \sin^2 am x}{1 - \varkappa^2 \sin^2 am x \sin^2 am y i}.$$

Führt man wieder die Bezeichnungen des § 4 ein, so folgt aus der letzten Gleichung

$$11) \quad \lambda^2 = \frac{n^2 - R^2}{\varkappa^2 (m^2 - R^2 l^2)}, \quad l^2 = \frac{\nu^2 - R^2}{\varkappa^2 (\mu^2 - R^2 \lambda^2)}.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 9) ein, so ergeben sich nach einigen Umformungen folgende Relationen:

$$12) \quad R^4 - R^2 \frac{\mu^4 + \varkappa'^2 \lambda^4}{\lambda^2 \mu^2} + R^2 \cos^2 \vartheta \frac{(\mu^2 - \lambda^2 \nu^2)^2}{\lambda^2 \mu^2 \nu^2} + \varkappa'^2 = 0,$$

$$13) \quad R^4 - R^2 \frac{m^4 + \varkappa'^2 l^4}{l^2 m^2} + R^2 \cos^2 \vartheta \frac{(m^2 - l^2 n^2)^2}{l^2 m^2 n^2} + \varkappa'^2 = 0.$$

Der Factor von $R^2 \cos^2 \vartheta$ kann nur in Gleichung 13) verschwinden, und zwar geschieht dies für $l^2 = \frac{1}{1 + \varkappa'}$. Nun ist aber

$$\sin am \left[\pm (2n+1) \frac{K}{2} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 + \varkappa'}},$$

und für diesen Werth geht die Gleichung über in

$$14) \quad R^2 = \varkappa'.$$

Allen Parallelen $x=(2n+1)\frac{K}{2}$ entspricht also, wie behauptet wurde, ein Kreis mit Radius $\sqrt{\varkappa'}$. Führt man in den Gleichungen 12) und 13) die Transformation $\mathrm{R}=\frac{R}{\sqrt{\varkappa'}}$ ein, wodurch dieser Kreis in den Einheitskreis verwandelt wird, so erkennt man, dass die Δam-Curven reciprok gegen denselben sind. (Mit geringen Veränderungen der Bezeichnung könnte Fig. 5 das System der Δam-Curven veranschaulichen.)

Aus den Gleichungen zwischen $\sin am\, z$, $\cos am\, z$ und $\Delta am\, z$ ergeben sich nun folgende geometrische Beziehungen zwischen den einzelnen Curvensystemen:

Legt man die confocalen Kegelschnitte mit den Brennpunkten ± 1 zu Grunde, so verwandelt die Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel, wenn wir von Vergrösserungsverhältnissen absehen, die $\sin am$-Curven in die $\cos am$-Curven, die $\cos am$-Curven in die $\sin am$-Curven, die Δam-Curven im Wesentlichen in die $\sin am$-Curven. Das Kegelschnittsystem um $\pm\frac{1}{\varkappa}$ führt die $\sin am$-Curven in die Δam-Curven, das Kegelschnittsystem um $\pm i\frac{\varkappa'}{\varkappa}$ die $\cos am$-Curven in die Δam-Curven über. Legt man schliesslich die Brennpunkte $\pm\varkappa'$ zu Grunde, so verwandelt die genannte Operation die Δam-Curven in die $\cos am$-Curven.

Es bleibt uns noch übrig, einige Specialfälle ins Auge zu fassen.

Ist zunächst der Modul $\varkappa=0$, so gehen $\sin am\, z$ und $\cos am\, z$ in $\sin z$ und $\cos z$ über. Dieser Fall ist in §§ 2 und 3 erledigt.

Ist hingegen $\varkappa=1$, so fällt zunächst $\cos am\, z$ mit $\Delta am\, z$ zusammen, während $\varkappa'$ verschwindet. Zwei der Brennpunkte fallen also im Nullpunkte zusammen. Für diesen Fall verwandelt sich

$$z=\int_0^Z \frac{dz}{\sqrt{(1-Z^2)(1-\varkappa^2 Z^2)}}$$

in

$$z=\int_0^Z \frac{dZ}{1-Z^2}=\tfrac{1}{2}\, lg\, \frac{1+Z}{1-Z},$$

$Z=\sin am\, z$ geht also über in

$$Z=\frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}=-i \tan zi,$$

während $\cos am\, z$ und $\Delta am\, z$ in $\frac{1}{\cos zi}$ übergehen.

Geometrisch ergiebt sich daraus Folgendes:

Für $\varkappa = 1$ verwandeln sich die *sinam*-Curven in ein System von Kreisen durch die Punkte ± 1 und in die orthogonale Kreisschaar; die *cosam*-Curven und *Δam*-Curven gehen in Linien vierter Ordnung über, die man erhält, wenn man das System confocaler Kegelschnitte mit den Brennpunkten ± 1 vom Nullpunkte aus durch reciproke Radii vectores abbildet.*

Der oben besprochene Kreis mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ wird dabei der Einheitskreis, die entsprechende Lemniscate wird die durch den Nullpunkt gehende, der Kreis mit Radius $\sqrt{\varkappa'}$ und die Lemniscate durch $\sqrt{\frac{\varkappa'}{1+\varkappa'}}$ und $\pm i\sqrt{\frac{\varkappa'}{1-\varkappa'}}$, werden unendlich klein. Man findet dabei den Satz bestätigt, dass die durch den Nullpunkt gehende Lemniscate die reciproke Curve der gleichseitigen Hyperbel ist. Gleichzeitig ergiebt sich folgender neue Beitrag zur Theorie der Abbildung $Z = \sqrt{1-z^2}$:

Bei der Abbildung $Z = \sqrt{1-z^2}$ verwandelt sich das System von Kreisen durch die Punkte ± 1 und die orthogonale Kreisschaar in die reciproken Curven der confocalen Kegelschnitte um ± 1.

Ein Gleiches gilt von der geometrischen Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel.

§ 6. Zusammenstellung der wesentlichen Resultate.

Die Transformation $Z = \sqrt{1-z^2}$ ist im Wesentlichen identisch mit der Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel, bei welcher das System confocaler Kegelschnitte mit den Brennpunkten ± 1 zu Grunde gelegt wird.

Durch beide Transformationen, welche übrigens involutorisch sind, verwandeln sich

1. Gerade durch den Nullpunkt in gleichseitige Hyperbeln durch ± 1 und umgekehrt;
2. Kreise um den Nullpunkt in confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten ± 1 und umgekehrt;
3. gleichseitige Hyperbeln durch die Punkte $\pm \lambda$ in gleichseitige Hyperbeln durch $\pm \sqrt{1-\lambda^2}$;
4. confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten $\pm \lambda$ in confocale Lemniscaten mit den Brennpunkten $\pm \sqrt{1-\lambda^2}$;

---

* Ueber die Abbildung $Z = \tan z$ vergl. Durège, Theorie der elliptischen Functionen, S. 311 etc.

5. confocale Kegelschnitte mit den Brennpunkten ± 1 in confocale Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten;
6. Kreise durch die Punkte ± 1 und die orthogonale Kreisschaar in die reciproken Curven der confocalen Kegelschnitte mit den Brennpunkten ± 1;
7. die *sinam*-Curven in die *cosam*-Curven und umgekehrt;
8. die Trajectorien jedes dieser Systeme in die Trajectorien des entsprechenden Systems.
9. Die Transformation $Z = a\sqrt{1 - \varkappa^2 z^2}$ ist nicht wesentlich von $Z = \sqrt{1 - z^2}$ unterschieden. Es kommen nur Veränderungen des Massstabes der Figuren und Drehungen der Coordinatensysteme zur Geltung. Man kann auch diese Abbildung geometrisch durch Uebertragung des Punktsystems von Hyperbel auf Complementarhyperbel deuten, jedoch muss in den entsprechenden Fällen ein Kegelschnittsystem mit anderen Brennpunkten gewählt werden. Specielle Fälle dieser Transformation verwandeln
10. die *sinam*-Curven in die *Δam*-Curven und umgekehrt;
11. die *cosam*-Curven in die *Δam*-Curven und umgekehrt.
12. Zu den *sinam*-Curven gehört stets ein Kreis und eine Lemniscate, ebenso zu den *Δam*-Curven, während zwei von den *cosam*-Curven stets Lemniscaten sind.

Vergleicht man die gewonnenen Resultate unter einander, und zieht man namentlich die in § 4 angedeuteten räumlichen Verhältnisse in Betracht, so wird man erkennen, dass der Gegenstand keineswegs erschöpft ist und dass namentlich die Geometrie in diesem Felde noch eine reiche Ausbeute zu erwarten hat.

IX.

Beitrag zur Mechanik ellipsoidischer Körper.

Von

Dr. TH. KÖTTERITZSCH,
Oberlehrer zu Freiberg.

Die folgenden Zeilen haben den Zweck, die Resultate, welche ich im 17. Bande dieser Zeitschrift im Allgemeinen mitgetheilt habe unter der Ueberschrift: „Beitrag zur Potentialtheorie", auf ellipsoidische Körper anzuwenden.

Am Ende des eben genannten Aufsatzes ist dies zwar schon für verlängerte Rotationsellipsoide geschehen, es wurde aber an jener Stelle die Cardinalfläche als bereits bekannt voraus angenommen, so dass es mehr ein Zufall zu nennen war, wenn man zur zugehörigen Niveaufläche eine der bekanntesten Flächen erhielt. Hier soll der umgekehrte und jedenfalls entsprechendere Gang eingeschlagen werden, dass die geometrische Beschaffenheit einer zur gesuchten Cardinalfläche gehörigen Niveaufläche allein als bekannt angenommen wird und dass aus ihr die Cardinalfläche ermittelt und dann die Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Punkte in den Coordinaten $\alpha\beta\gamma$ hergestellt wird. Es wird sich im Verlaufe der folgenden Rechnung zeigen, dass gerade bei ellipsoidischen Niveauflächen die Voraussetzungen (14, § 6 und die am Ende von § 2 der oben citirten Abhandlung) erfüllt sind, die in der oben genannten Abhandlung gemacht werden mussten, um eine Reihe wichtiger Eigenschaften der Entwickelungscoefficienten P_n zu ermitteln. Dadurch, dass die Cardinalfläche dieser Körper ermittelt wird, ist zugleich ein, wenn auch sehr kleiner Theil (und noch dazu in überwiegend verneinender Weise) derjenigen Aufgabe weiter geführt, die mir aus den beiden Abhandlungen (Bd. XIII S. 121—147 und Bd. XIV S. 230—309) übrig geblieben ist.

§ 1.

Die Cardinalfläche des dreiaxigen Ellipsoids.

Das als Niveaufläche gegebene dreiaxige Ellipsoid habe, bezogen auf ein gewöhnliches rechtwinkliges, räumliches Coordinatensystem, die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-l^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-p^2}=1, \quad l^2\leq p^2,$$

so dass, wie leicht hieraus ersichtlich:

$$l, \ p \ \text{und} \ \sqrt{p^2-l^2}=q$$

die Brennpunktsabstände vom Ellipsoidmittelpunkte darstellen.

Wir führen nun zunächst ein neues orthogonales Coordinatensystem der ϱ^2, μ^2 und ν^2 ein, indem wir diese Coordinaten als variable Parameter des bekannten orthogonalen Flächensystems:

$$\text{I)}\quad \begin{aligned}
&\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-l^2}+\frac{z^2}{\varrho^2-p^2}=1, \quad p^2<\varrho^2\leq\infty, \quad \text{Ellipsoid;}\\
&\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-l^2}-\frac{z^2}{p^2-\mu^2}=1, \quad l^2\leq\mu^2\leq p^2, \quad \text{Hyperboloid mit einem Mantel;}\\
&\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{l^2-\nu^2}-\frac{z^2}{p^2-\nu^2}=1, \quad 0<\nu^2\leq l^2, \quad \text{Hyperboloid mit zwei Mänteln,}
\end{aligned}$$

annehmen.

Aus der identisch giltigen Gleichung

$$\text{1)}\quad \begin{aligned}
\frac{(\lambda^2-\varrho^2)(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{\lambda^2(\lambda^2-l^2)(\lambda^2-p^2)}=1-\varrho^2.\frac{\mu^2}{p^2}.\frac{\nu^2}{l^2}.\frac{1}{\lambda^2}-(\varrho^2-l^2)\frac{\mu^2-l^2}{p^2-l^2}.\frac{l^2-\nu^2}{l^2}.\frac{1}{\lambda^2-l^2}\\
-(\varrho^2-p^2)\frac{p^2-\mu^2}{p^2-l^2}.\frac{p^2-\nu^2}{p^2}.\frac{1}{\lambda^2-p^2}
\end{aligned}$$

leiten wir, weil sie für $\lambda^2=\varrho^2, \mu^2, \nu^2$ bis auf eine blosse unbedeutende Formverschiedenheit mit den Gleichungen des Systems I) übereinstimmt, ab:

$$\text{II)}\quad \begin{aligned}
&x^2=\varrho^2.\frac{\mu^2}{p^2}.\frac{\nu^2}{l^2}, && x=\varrho.\frac{\mu}{p}.\frac{(\pm)\nu}{l},\\
&y^2=(\varrho^2-l^2)\frac{\mu^2-l^2}{p^2-l^2}.\frac{l^2-\nu^2}{l^2}, && y=\sqrt{\varrho^2-l^2}.\sqrt{\frac{\mu^2-l^2}{p^2-l^2}}.\frac{(\pm)\sqrt{l^2-\nu^2}}{l},\\
&z^2=(\varrho^2-p^2)\frac{p^2-\mu^2}{p^2-l^2}.\frac{p^2-\nu^2}{p^2}, && z=\sqrt{\varrho^2-p^2}.\frac{\sqrt{p^2-\nu^2}}{p}.\frac{(\pm)\sqrt{p^2-\mu^2}}{\sqrt{p^2-l^2}}.
\end{aligned}$$

Die doppelten Vorzeichen $(\pm)$ in den Werthen von x, y und z sollen sogleich andeuten, welche Werthe allein als positiv oder negativ anzunehmen sind, um durch das neue Coordinatensystem der ϱ, μ, ν alle Punkte des Raumes bezeichnen zu können. Diejenigen Grössen in den ebengenannten Werthen, vor denen sich kein doppeltes Vorzeichen befindet, verstehen wir fernerhin nur ihrem absoluten Werthe nach.

Mit Hilfe des ersten Systems II) entsteht weiter aus 1)

$$2)\qquad \frac{(\lambda^2-\varrho^2)(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{\lambda^2(\lambda^2-l^2)(\lambda^2-p^2)}=1-\frac{x^2}{\lambda^2}-\frac{y^2}{\lambda^2-l^2}-\frac{z^2}{\lambda^2-p^2}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach λ^2 und setzt alsdann der Reihe nach $\lambda^2=\varrho^2, \mu^2, \nu^2$, so entsteht

$$\text{III)}\qquad \begin{aligned}
\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}{\varrho^2(\varrho^2-l^2)(\varrho^2-p^2)}&=\left(\frac{x}{\varrho^2}\right)^2+\left(\frac{y}{\varrho^2-l^2}\right)^2+\left(\frac{z}{\varrho^2-p^2}\right)^2,\\
\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\mu^2(\mu^2-l^2)(p^2-\mu^2)}&=\left(\frac{x}{\mu^2}\right)^2+\left(\frac{y}{\mu^2-l^2}\right)^2+\left(\frac{z}{p^2-\mu^2}\right)^2,\\
\frac{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\nu^2(l^2-\nu^2)(p^2-\nu^2)}&=\left(\frac{x}{\nu^2}\right)^2+\left(\frac{y}{l^2-\nu^2}\right)^2+\left(\frac{z}{p^2-\nu^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Differentiirt man ferner die ersten Gleichungen des Systems II) logarithmisch partiell nach ϱ^2, μ^2 und ν^2, so entsteht

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \varrho^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{\varrho^2}, &&\frac{\partial x}{\partial \mu^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{\mu^2}, &&\frac{\partial x}{\partial \nu^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x}{\nu^2};\\
&\frac{\partial y}{\partial \varrho^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{y}{\varrho^2-l^2}, &&\frac{\partial y}{\partial \mu^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{y}{\mu^2-l^2}, &&\frac{\partial y}{\partial \nu^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{y}{l^2-\nu^2};\\
&\frac{\partial z}{\partial \varrho^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{z}{\varrho^2-p^2}, &&\frac{\partial z}{\partial \mu^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{z}{p^2-\mu^2}, &&\frac{\partial z}{\partial \nu^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{z}{p^2-\nu^2}.
\end{aligned}$$

Wir setzen die Summe der Quadrate der Werthe einer jeden dieser Colonnen der Reihe nach gleich N_1, N_2 und N_3, so dass wir erhalten

$$\text{IV)}\qquad \begin{aligned}
N_1&=\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho^2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varrho^2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho^2}\right)^2=\tfrac{1}{4}\cdot\left\{\left(\frac{x}{\varrho^2}\right)^2+\left(\frac{y}{\varrho^2-l^2}\right)^2+\left(\frac{z}{\varrho^2-p^2}\right)^2\right\},\\
N_2&=\left(\frac{\partial x}{\partial \mu^2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \mu^2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \mu^2}\right)^2=\tfrac{1}{4}\cdot\left\{\left(\frac{x}{\mu^2}\right)^2+\left(\frac{y}{\mu^2-l^2}\right)^2+\left(\frac{z}{p^2-\mu^2}\right)^2\right\},\\
N_3&=\left(\frac{\partial x}{\partial \nu^2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \nu^2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \nu^2}\right)^2=\tfrac{1}{4}\cdot\left\{\left(\frac{x}{\nu^2}\right)^2+\left(\frac{y}{l^2-\nu^2}\right)^2+\left(\frac{z}{p^2-\nu^2}\right)^2\right\}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Systems III) erhalten wir hieraus

$$\text{V)}\qquad \begin{aligned}
N_1&=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}{\varrho^2(\varrho^2-l^2)(\varrho^2-p^2)},\\
N_2&=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\mu^2(\mu^2-l^2)(p^2-l^2)},\\
N_3&=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{(\varrho^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\nu^2(l^2-\nu^2)(p^2-\nu^2)}.
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir das Oberflächenelement des Ellipsoids mit $d\sigma$, so ist bekanntlich

$$d\sigma=\sqrt{N_2}\sqrt{N_3}\,d\mu^2\,d\nu^2$$

oder

$$d\sigma=\tfrac{1}{4}(\mu^2-\nu^2)\sqrt{\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}{\mu^2(\mu^2-l^2)(p^2-\mu^2)\nu^2(l^2-\nu^2)(p^2-\nu^2)}}\,d\mu^2\,d\nu^2.$$

Denken wir uns das Ellipsoid isolirt und mit Elektricität geladen, so ist die Dichtheit ϱ' der Elektricität auf diesem Oberflächenelement $d\sigma$

$$\varrho' = \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{x}{\varrho^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\varrho^2 - l^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{\varrho^2 - p^2}\right)^2}},*$$

wenn k einen Factor bezeichnet, der sich nicht ändert, so lange man nur Punkte x, y, z in Betracht zieht, die auf dem gegebenen Ellipsoid selbst gelegen sind.

Vermittelst der ersten Gleichungen der Systeme IV) und V) geht der Werth von ϱ' über in

$$2^*)\qquad \varrho' = \frac{k}{2\sqrt{N_1}} = k\sqrt{\varrho^2(\varrho^2 - l^2)(\varrho^2 - p^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}}.$$

Auf dem Oberflächenelemente $d\sigma$ befindet sich demnach die Elektricitätsmenge

$$\varrho' d\sigma = \frac{k\sqrt{\varrho^2(\varrho^2 - l^2)(\varrho^2 - p^2)}}{4} \cdot \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu^2\, d\nu^2}{\sqrt{\mu^2(\mu^2 - l^2)(p^2 - \mu^2)\, \nu^2 (l^2 - \nu^2)(p^2 - \nu^2)}}.$$

Da dieser Ausdruck aber unabhängig vom Parameter des Ellipsoids ϱ^2 sein muss,** so folgt, dass

$$k\sqrt{\varrho^2(\varrho^2 - l^2)(\varrho^2 - p^2)} = k',$$

wenn k' einen Werth bezeichnet, der sich nicht ändert, wenn man von irgend einem Raumpunkte x, y, z zu irgend einem andern x', y', z' übergeht. Der vorige Werth von $\varrho' d\sigma$ wird daher einfacher zu

$$3)\qquad \varrho' d\sigma = \frac{k'}{4} \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu^2\, d\nu^2}{\sqrt{\mu^2(\mu^2 - l^2)(p^2 - \mu^2)\, \nu^2 (l^2 - \nu^2)(p^2 - \nu^2)}}.$$

Da dieser Werth von $\varrho' d\sigma$ sich nun nicht ändert, wenn man von dem gegebenen Ellipsoid zu einem andern confocalen übergeht, vorausgesetzt, dass der Uebergang längs der entsprechenden Durchschnittslinie der beiden confocalen Hyperboloide erfolgt, d. h. vorausgesetzt, dass man μ^2 und ν^2 unverändert lässt, so kann er auch sofort als für das innerste Ellipsoid, d. i. die Cardinalfläche giltig angesehen werden. Für diese Fläche ist aber nach dem System I) $\varrho^2 = p^2$, folglich nach dem System V)

$$N_2 = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2(\mu^2 - l^2)}, \quad N_3 = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\mu^2 - \nu^2}{\nu^2(l^2 - \nu^2)}.$$

Demnach ist das Oberflächenelement der Cardinalfläche

$$4)\qquad d\sigma' = \sqrt{N_2}\sqrt{N_3}\, d\mu^2\, d\nu^2 = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu^2\, d\nu^2}{\sqrt{\mu^2(\mu^2 - l^2)\, \nu^2 (l^2 - \nu^2)}}.$$

Dividiren wir die Gleichung 3) durch diese Gleichung 4), so entsteht für die Massendichtheit ϱ'' der Cardinalfläche im Punkte μ, ν der Ausdruck

$$5)\qquad \varrho'' = \frac{k'}{\sqrt{(p^2 - \mu^2)(p^2 - \nu^2)}} = \frac{k'}{\sqrt{p^4 - p^2(\mu^2 + \nu^2) + \mu^2 \nu^2}}.$$

---

* Vergl. des Verfassers „Lehrbuch der Elektrostatik", Seite 155 Gleichung 12.

** L. c. S. 70.



Um die Bedeutung dieser Gleichung genauer zu erkennen, drücken wir μ^2 und ν^2 wieder durch die gewöhnlichen rechtwinkligen, räumlichen Coordinaten aus und erhalten aus dem System I) für die Cardinalfläche die Transformationsgleichungen

$$\text{VI)}\qquad \begin{aligned} &z=0,\\ &\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-l^2}=1,\\ &\frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{l^2-\nu^2}=1. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichungen haben die gemeinsame Form

$$\frac{x^2}{\lambda}+\frac{y^2}{\lambda^2-l^2}-1=0,$$

die Werthe von μ^2 und ν^2 sind deswegen die Wurzeln dieser in Bezug auf λ quadratischen Gleichung, die auch geschrieben werden kann als

$$\lambda^2-\lambda\,(l^2+x^2+y^2)+x^2l^2=0.$$

Wir erhalten hieraus

$$\mu^2+\nu^2=l^2+x^2+y^2,\quad \mu^2\nu^2=x^2l^2,$$

und wenn wir dies in die Gleichung 5) substituiren:

$$\varrho''=\frac{k'}{\sqrt{p^4-p^2\,(l^2+x^2+y^2)+x^2l^2}}=\frac{k'}{\sqrt{p^2\,(p^2-l^2)-x^2\,(p^2-l^2)-y^2p^2}}$$

oder endlich, da $\sqrt{p^2-l^2}=q$:

$$\text{6)}\qquad \varrho''=\frac{k'}{pq}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}}}.$$

Wie hieraus ersichtlich, besitzt ϱ'' nur so lange reelle Werthe, als $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}\leq 1$, die Cardinalfläche ist demnach eine allenthalben mit Masse belegte ebene Fläche mit elliptischer Umgrenzung.

Es kann jetzt auch der Werth von k' in 6) bestimmt werden mit Hilfe der Bedingung, dass die gesammte auf der Cardinalfläche befindliche Masse 1 betragen soll, setzen wir also in 6) vor der Hand

$$x=p\,.\,s\cos\psi,\quad y=q\,.\,s\sin\psi,$$

folglich

$$dx\,dy=p.q.s.ds.d\psi,\quad \sqrt{1-\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}}=\sqrt{1-s^2},$$

so ergiebt die ebengenannte Bedingung, wenn man noch bedenkt, dass die Cardinalfläche als Doppelfläche (mit massenerfüllter oberer und unterer Seite) betrachtet werden muss:

$$2k'\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{s\,ds\,d\psi}{\sqrt{1-s^2}}=1,$$

woraus folgt

$$k' = \frac{1}{4\pi},$$

so dass wir aus der Gleichung 6) endlich noch erhalten

$$7) \qquad \varrho'' = \frac{1}{4\pi.p.q} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{p^2}-\frac{y^2}{q^2}}}.$$

Wir fassen das in der Gleichung 7) enthaltene Resultat in folgende Worte zusammen:

Die Cardinalfläche eines dreiaxigen Ellipsoides ist eben, sie ist enthalten in derjenigen Ebene, die durch die grössten beiden Ellipsoidaxen hindurch gelegt werden kann; sie ist umgrenzt von einer Ellipse, deren Mittelpunkt mit dem Ellipsoidmittelpunkte zusammenfällt, deren grosse Axe mit der grössten, deren kleine Axe mit der mittleren Ellipsoidaxe in dieselbe Richtung fällt. Erstere hat zur Länge den Brennpunktabstand der auf ihr gelegenen Ellipsoidbrennpunkte vom Ellipsoidmittelpunkte, letztere hat zur Länge den Abstand derjenigen Ellipsenbrennpunkte vom Ellipsoidmittelpunkte, die der Durchschnittsfigur angehören, welche eine durch die mittlere und kleinste Ellipsoidaxe gelegte Ebene entstehen lässt. Die Massenvertheilung auf der Cardinalfläche des Ellipsoids ist keine gleichförmige, wohl aber besitzen alle Punkte der Cardinalfläche, die auf einer zur begrenzenden Ellipse ähnlich gelegenen Ellipse liegen, deren Axen denselben Bruchtheil s der entsprechenden Axen der begrenzenden Ellipse zur Länge haben, dieselbe Dichtheit, und für Punkte, die auf verschiedenen derartigen Ellipsen liegen, ist die Dichtheit umgekehrt proportional zu $\sqrt{1-s^2}$, so dass auf der umgrenzenden Ellipse selbst die Dichtheit unendlich gross ist. Endlich ist auch die Cardinalfläche des Ellipsoides selbst eine Niveaufläche, d. h. die Potentialfunction der auf ihr befindlichen Massenvertheilung ist für alle Punkte der Cardinalfläche constant.

Hiermit ist bereits dargethan, dass für ellipsoidische Niveauflächen die am Ende von § 2 der eingangs citirten Abhandlung gestellte Bedingung erfüllt ist.

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die bisherige allgemeine Untersuchung als speciellere Fälle solche mit umfasst, wo

1. $l^2=0$ angenommen wird, d. h. den Fall des abgeplatteten Rotationsellipsoids als Niveaufläche, wo
2. $p^2=l^2$ angenommen wird, d. h. den Fall des verlängerten Rotationsellipsoids als Niveaufläche, und wo
3. $p^2=l^2=0$ angenommen wird, d. h. den Fall der Kugel als Niveaufläche.

Für alle eben genannten Specialfälle ist es leicht, die den eben gewonnenen entsprechenden Resultate durch einfache Grenzübergänge aus den eben erlangten Formeln abzuleiten. Das Resultat der hierbei etwas umständlicheren Rechnung für den zweiten Fall ist bereits aus dem Beispiele bekannt, das der oben citirten Abhandlung am Schlusse beigefügt wurde.

§ 2.

Einführung des Arguments α.

Da α die Grösse der Potentialfunction V bedeuten sollte, die die Cardinalfläche auf irgend einem Punkte der Niveaufläche besitzt, so könnte man einfach, um α als Function von ϱ zu gewinnen, die Resultate des vorhergehenden Paragraphen benützen und α durch ein bestimmtes Integral darstellen; einfacher ist aber folgender Weg.

Bekanntlich gilt die Gleichung

$$1)\qquad \frac{\partial V}{\partial n}=\frac{\partial \alpha}{\partial n}=-4\pi\varrho',$$

wenn ϱ' die Dichtheit der Elektricität auf der isolirten Niveaufläche im Gleichgewichtszustande bedeutet und $\frac{\partial V}{\partial n}$ oder $\frac{\partial \alpha}{\partial n}$ die Differentiation der Potentialfunction V oder α nach der nach Aussen auf der Niveaufläche errichteten Normalen bezeichnet.

Aus der Gleichung 1) folgt

$$\partial\alpha=-4\pi\varrho'\partial n.$$

Nun ist nach 2*), § 1, wenn man beachtet, dass

$$k\sqrt{\varrho^2(\varrho^2-l^2)(\varrho^2-p^2)}=k'=\frac{1}{4\pi},$$

$$\varrho'=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}}$$

und nach V), § 1

$$\partial n=\sqrt{N_1}\,\partial\varrho^2=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}{\varrho^2(\varrho^2-l^2)(\varrho^2-p^2)}}\,\partial\varrho^2.$$

Aus der vorigen Gleichung entsteht demnach

$$\partial\alpha=-\frac{\partial\varrho^2}{2\sqrt{\varrho^2(\varrho^2-l^2)(\varrho^2-p^2)}},$$

folglich durch Integration



2) $$2\alpha = -\int^{\varrho^2} \frac{d\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2(\varrho^2 - l^2)(\varrho^2 - p^2)}} + Const.$$

Um den Werth der Integrationsconstanten zu bestimmen, bedenken wir, dass für einen unendlich entfernten Punkt, also $\varrho^2 = \infty$, α verschwinden muss, dass demnach auch die Gleichung gilt

$$0 = -\int^{\infty} \frac{d\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2(\varrho^2 - l^2)(\varrho^2 - p^2)}} + Const.$$

Ziehen wir diese Gleichung von der Gleichung 2) ab und setzen zugleich vor der Hand

3) $$\varrho^2 = u,$$

so entsteht

4) $$2\alpha = \int_u^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u(u - l^2)(u - p^2)}}, \quad u > p^2.$$

Durch die Substitution

5) $$u = p \cdot l \cdot \frac{y-1}{y+1}$$

verwandelt sich die Gleichung 4) in

6) $$\alpha = \frac{1}{p-l} \int_y^{-1} \frac{dy}{\sqrt{(y^2 - 1)\left[\left(\frac{p+l}{p-l}\right)^2 - y^2\right]}}$$

und es durchwandert y das Intervall $-\frac{p+l}{p-l} \leq y < -1$, während u das Intervall $p^2 \leq u^2 \leq +\infty$ durchschreitet.

Es sei weiter

7) $$y = \frac{-1}{\sqrt{1 - \varkappa^2 z^2}}, \quad \varkappa^2 = \frac{4pl}{(p+l)^2},$$

so dass z das Intervall $1 \geq z \geq 0$ durchschreitet, während y dem Bereiche $-\frac{p+l}{p-l} < y < -1$ angehört. Die Gleichung 6) wird jetzt zu

$$\alpha = \frac{1}{p+l} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}}, \quad 0 \leq z < 1, \quad \varkappa^2 = \frac{4pl}{(p+l)^2}.$$

Ist endlich noch

8) $$z = \sin\varphi,$$

so wird aus der vorigen Gleichung

9) $$\alpha = \frac{1}{p+l} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}}, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \varkappa^2 = \frac{4\pi l}{(p+l)^2}.$$

Durch Umkehrung dieses Integrales folgt nun, wenn wir bekannte Bezeichnungen gebrauchen und die Gleichung 7) benützen:

$$y = -\frac{1}{\Delta am\left[(p+l)\alpha,\ \frac{2\sqrt{pl}}{p+l}\right]},$$

und hieraus folgt endlich noch mit Hilfe der Gleichungen 3) und 5)

$$10)\qquad \varrho^2 = p.l\,\frac{1+\Delta am\left[(p+l)\alpha,\ \frac{2\sqrt{pl}}{p+l}\right]}{1-\Delta am\left[(p+l)\alpha,\ \frac{2\sqrt{pl}}{p+l}\right]}.$$

Für die am Ende von § 1 aufgezählten Specialfälle bedarf es hier zum Theil einer gesonderten Untersuchung, weil wenigstens für den ersten Fall, $l^2=0$, oder für den dritten Fall, $p^2=l^2=0$, die Substitution aus der Gleichung 5) nicht ohne Weiteres möglich ist. Wir erhalten aber aus 4) im ersten Falle, für welchen $l^2=0$, d. h. für das abgeplattete Rotationsellipsoid als Niveaufläche:

$$2\alpha = \int_u^\infty \frac{du}{u\sqrt{u-p^2}} = \frac{2}{p}\left|arc\,tan\frac{\sqrt{u-p^2}}{p}\right|_u^\infty = \frac{2}{p}\left(\frac{\pi}{2} - arc\,tan\frac{\sqrt{u-p^2}}{p}\right),$$

folglich

$$\frac{\sqrt{u-p^2}}{p} = ctg\,p\,\alpha,$$

und mit Hilfe von Gleichung 3)

$$11)\qquad \varrho^2 = \frac{p^2}{sin^2 p\,\alpha},\quad (l^2=0,\ \text{abgeplattetes Rotationsellipsoid}).$$

Lässt man auf der rechten Seite der Gleichung 10) l unendlich abnehmen und bestimmt nach der bekannten Regel durch Differentiation den Grenzwerth dieser rechten Seite, dem sie sich für ein unendlich klein werdendes l ohne Ende nähert, so erhält man aus der Gleichung 10) dieselbe Gleichung 11), die vorhin direct gewonnen wurde.

Im dritten Specialfalle, nämlich wenn $p^2=l^2=0$, d. i. im Falle der Kugel als Niveaufläche erhält man aus der Gleichung 4)

$$2\alpha = \int_u^\infty \frac{du}{\sqrt{u^3}} = \frac{2}{\sqrt{u}},$$

folglich mit Hilfe der Gleichung 3)

$$12)\qquad \varrho^2 = \frac{1}{\alpha^2},\quad (p^2=l^2=0,\ \text{Fall der Kugel}).$$

Man erkennt leicht, dass die Gleichung 12) auch aus der Gleichung 11) durch den Grenzübergang von p zu Null gefolgert werden kann, wodurch auch dargethan ist, dass auch die Gleichung 12) aus der Gleichung 10) ge-

folgert werden kann, indem man in dieser Gleichung erst l, dann p ohne Ende sich der Null nähern lässt.

Für den zweiten Fall endlich, für welchen $p=l$, d. h. für den Fall des verlängerten Rotationsellipsoides als Niveaufläche kann die Gleichung 10) ohne Weiteres benützt werden, da für diesen Fall die Substitution aus der Gleichung 5) brauchbar ist. Wir erhalten für den jetzigen Fall aus 10)

$$\varrho^2 = l^2 \frac{1+\Delta am(2l\alpha, 1)}{1-\Delta am(2l\alpha, 1)} = l^2 \frac{1+\sqrt{1-\sin^2 am(2l\alpha, 1)}}{1-\sqrt{1-\sin^2 am(2l\alpha, 1)}}$$

$$= l^2 \frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{e^{2l\alpha}-e^{-2l\alpha}}{e^{2l\alpha}+e^{-2l\alpha}}\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{e^{2l\alpha}-e^{-2l\alpha}}{e^{2l\alpha}+e^{-2l\alpha}}\right)^2}}.$$

Hieraus wird schliesslich

$$13) \qquad \varrho^2 = \left(l\frac{e^{\alpha l}+e^{-\alpha l}}{e^{\alpha l}+e^{-\alpha l}}\right)^2, *$$

ein Werth, der uns bereits früher entgegengekommen ist.

Da die für die eben betrachteten Specialfälle giltigen Formeln hiernach auch als einfache Consequenzen aus der Gleichung 10) betrachtet werden können, so folgt daraus auch der für die praktische Rechnung wichtige Umstand, dass wir eine gesonderte Untersuchung der unterschiedenen Specialfälle fernerhin nicht nöthig haben, sondern dass wir nur die Gleichung 10) fernerhin unserer Rechnung zu Grunde zu legen brauchen, um gleichzeitig auch die für die unterschiedenen Specialfälle giltigen Resultate in unserer Betrachtung mit zu umschliessen.

Die Gleichung 10) ist in doppelter Weise zu verwerthen; sie hat nämlich einmal dazu zu dienen, ϱ zu bestimmen, wenn α gegeben ist, und dann α zu bestimmen, wenn ϱ gegeben ist. Die erstere Aufgabe ist zu lösen, wenn es sich darum handelt, vom System der $\alpha\beta\gamma$ zum System der $\varrho\mu\nu$, oder mit Hilfe der Gleichungen II), § 1, zum System der xyz überzugehen; die zweite Aufgabe, wenn der Uebergang in umgekehrter Richtung vorzunehmen ist.

Für die Lösung der ersten Aufgabe hat bereits die Gleichung 10) die gehörige Form und es kann aus ihr leicht ϱ bestimmt werden mit Hilfe der elliptischen oder auch der Thetafunctionen; für die Lösung der zweiten Aufgabe kann man unter Anwendung derselben Functionen durch eine Näherungsrechnung verhältnissmässig schnell den Werth von α erhalten, wenn ϱ bekannt ist.

Es mag hier noch besonders der Umstand hervorgehoben werden, dass, wie aus der Gleichung 10) leicht ersichtlich ist, immer $\frac{1}{\varrho}$ oder auch

---

* Vergl. die erste der Gleichungen 4), S. 300 des eingangs citirten Aufsatzes.

$\frac{1}{\varrho^2}$ in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von α entwickelt werden kann. (Man hat, um sich davon zu überzeugen, nur zu untersuchen, wo der Werth von $\frac{1}{\varrho}$ oder $\frac{1}{\varrho^2}$ für ein complex variabel gedachtes Argument α unendlich wird, und dann bekannte Gesetze über die Entwickelung einer Function mit complexen Argumenten nach Taylor anzuwenden.)

Endlich mag hier noch auf eine hübsche Erklärung des vollständigen elliptischen Integrals K erster Gattung, wie sie sich aus 9) ergiebt, hingewiesen werden. Aus dieser Gleichung entsteht nämlich, wenn die obere Integrationsgrenze $=\frac{\pi}{2}$:

$$(p+l)\,\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} = K,$$

und es bedeutet daher K das $(p+l)$-fache derjenigen Arbeit, die von der auf der Cardinalfläche haftenden anziehenden Masse geleistet wird, wenn ein Punkt mit der Masse $=1$ durch ihre Wirkung so bewegt wird, dass er aus unendlicher Entfernung bis auf die Cardinalfläche gelangt. Nimmt man den jetzt noch willkürlichen Massstab für Längeneinheiten so, dass für das gegebene Ellipsoid $p+l=1$, so stellt K die ebengenannte Arbeitsgrösse selbst dar. Wenn man will, kann man hierin einen Fingerzeig darüber erblicken, nach welchem Längenmassstabe man bei den später zu betrachtenden mechanischen Problemen am besten rechnen wird.

§ 3.

Einführung der Argumente β und γ, oder der Länge φ und der Breite Θ.

In der bereits mehrfach citirten Abhandlung allgemeineren Inhalts ist über die Argumente β und γ Nichts weiter vorausgesetzt worden, als dass sie, gewissen Functionen der Coordinaten x, y, z irgend eines Raumpunktes gleich gesetzt, die Gleichungen derjenigen beiden Flächensysteme ergeben, die zu Durchschnittslinien die Kraftlinien der gegebenen Niveauflächen besitzen. Anstatt dieser beiden Argumente β und γ können aber auch beliebige andere eingeführt werden, wenn diese nur den Rücksichten genügen, dass sie nur von β und γ, nicht von α abhängen und dass sich mit ihrer Hilfe die reciproke Entfernung zweier Punkte leicht darstellen und entwickeln lasse.

Vorausgesetzt, dass es sich nur um die Lösung statischer Probleme handle, so sind wir jetzt auch in der Lage, ein allgemeines Princip für die Wahl dieser beiden Argumente aufstellen zu können. Da nämlich alle

unsere Niveauflächen für ein verschwindendes α die Kugelfläche zur Grenze haben, und da die neu zu wählenden Argumente unabhängig von α sein sollen, so muss es sich empfehlen, sogleich diejenigen Argumente für β und γ einzuführen, die gewöhnlich dazu dienen, die Lage irgend eines Punktes auf einer gegebenen Kugelfläche zu bestimmen; es sind dies die Breite Θ und die Länge φ.

Das System II), § 1, ergiebt nun zur Einführung von Θ und φ folgenden Zusammenhang:

$$x = \varrho \frac{\mu}{p} \frac{(\pm)\nu}{l} = \varrho \cos \Theta,$$

$$y = \sqrt{\varrho^2 - l^2} \frac{\sqrt{\mu^2 - l^2}}{q} \frac{(\pm)\sqrt{l^2 - \nu^2}}{l} = \sqrt{\varrho^2 - l^2} \sin \Theta \cos \varphi,$$

$$z = \sqrt{\varrho^2 - p^2} \frac{\sqrt{p^2 - \nu^2}}{p} \frac{(\pm)\sqrt{p^2 - \mu^2}}{q} = \sqrt{\varrho^2 - p^2} \sin \Theta \sin \varphi.$$

Hieraus folgt

$$\text{I)} \quad \begin{aligned} &\frac{\mu}{p} \frac{(\pm)\nu}{l} = \cos \Theta, \\ &\frac{\sqrt{\mu^2 - l^2}}{q} \cdot \frac{(\pm)\sqrt{l^2 - \nu^2}}{l} = \sin \Theta \cos \varphi, \\ &\frac{\sqrt{p^2 - \nu^2}}{p} \cdot \frac{(\pm)\sqrt{p^2 - \mu^2}}{q} = \sin \Theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Mit Beachtung der Grenzbedingungen, welche dem Systeme I), § 1, beigesetzt wurden, ist es nicht schwer, sich zu überzeugen, dass immer die Relationen

$$\left(\frac{\mu}{p}\right)^2 \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \leqq 1, \quad \frac{\mu^2 - l^2}{q^2} \cdot \frac{l^2 - \nu^2}{l^2} \leqq 1, \quad \frac{p^2 - \nu^2}{p^2} \cdot \frac{p^2 - \mu^2}{q^2} \leqq 1$$

erfüllt sind und dass ausserdem immer die Summe der Quadrate der linken Seiten der Gleichungen des Systems I) gleich der Einheit ist, welche Werthe auch μ^2 und ν^2 haben mögen; damit ist aber zugleich auch nachgewiesen, dass in unserem Falle Θ und φ immer reelle Werthe besitzen.

Um die Argumente Θ und φ zu berechnen, wenn die entsprechenden Werthe von μ und ν gegeben sind, hat man aus den Gleichungen I)

$$\text{II)} \quad \begin{aligned} &\cos^2 \Theta = \left(\frac{\mu}{p}\right)^2 \left(\frac{\nu}{l}\right)^2 \\ &tng^2 \varphi = \frac{p^2 - \mu^2}{\mu^2 - l^2} \cdot \frac{p^2 - \nu^2}{l^2 - \nu^2} \cdot \frac{l^2}{p^2}. \end{aligned}$$

Umgekehrt erhält man zur Berechnung der Grössen μ^2 und ν^2, wenn Θ und φ gegeben sind, aus der ersten der Gleichungen I)

$$\mu^2 \nu^2 = p^2 l^2 \cos^2 \Theta$$

und aus der zweiten der Gleichungen I), wenn man zugleich die vorige Gleichung mit zu Hilfe nimmt:

$$\mu^2 + \nu^2 = p^2 + l^2 \cos^2 \Theta - q^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich, dass μ^2 und ν^2 die Wurzeln der in λ quadratischen Gleichung

$$1)\qquad \lambda^2 - (p^2 + l^2 \cos^2 \Theta - q^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \varphi)\,\lambda + p^2 l^2 \cos^2 \Theta = 0$$

sind, und zwar ist, weil immer $\mu^2 \geqq \nu^2$ sein soll, μ^2 die grössere, ν^2 die kleinere Wurzel der Gleichung 1).

Es ist jetzt hier nur noch übrig, den einen Umstand ins Klare zu stellen, in welchem Quadranten man die Winkel Θ und φ selbst zu suchen hat, nachdem man etwa durch die Gleichungen II) in den Besitz der absoluten Werthe ihrer trigonometrischen Functionen gelangt ist. Es geben aber die auch in den Gleichungen I) angedeuteten möglichen Vorzeichencombinationen hierüber leicht Aufschluss. Die erste der Gleichungen I) verlangt von Θ, dass $\cos \Theta$ positiv und negativ sein kann, dass mithin Θ selbst mindestens dem ersten und zweiten Quadranten angehören könne; ist dies für Θ entsprechend den Kugelcoordinaten festgestellt, also $\sin \Theta$ immer positiv, so verlangt die zweite und dritte der Gleichungen I) von φ, dass $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ alle möglichen Vorzeichencombinationen annehmen können, dass mithin φ selbst einem jeden der vier ersten Quadranten angehören könne.

Berücksichtigen wir ausser den Gleichungen 1) noch das System II), § 1, so sind wir im Stande, folgende Tabelle über die zusammengehörigen Werthe von x, y, z, ν, $\sqrt{l^2 - \nu^2}$, $\sqrt{p^2 - \mu^2}$, Θ und φ aufzustellen:

x.	y.	z.	ν.	$\sqrt{l^2-\nu^2}$.	$\sqrt{p^2-\mu^2}$.	Quadrant von Θ.	Quadrant von φ.
+	+	+	+	+	+	1	1
+	+	−	+	+	−	1	4
+	−	+	+	−	+	1	2
−	+	+	−	+	+	2	1
+	−	−	+	−	−	1	3
−	+	−	−	+	−	2	4
−	−	+	−	−	+	2	2
−	−	−	−	−	−	2	3

Hieraus entnehmen wir noch die Werthe der in der mehrfach citirten Arbeit eingeführten Integrationsgrenzen β_0, β_1, γ_0 und γ_1, nämlich

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \pi, \quad \gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 2\pi.$$

Es möge nun noch der in der früheren Abhandlung S. 258, 2) eingeführte Werth g ermittelt werden. An der genannten Stelle ist g definirt durch die Gleichung

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \alpha}{\partial n_\alpha}\, d\sigma = g\, d\beta\, d\gamma,$$

welche für unser jetzt angenommenes Coordinatensystem übergeht in

$$2) \qquad -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \alpha}{\partial n_\alpha} d\sigma = g\, d\Theta\, d\varphi.$$

Vermittelst des in § 1 ermittelten Werthes von ϱ' erhalten wir aber

$$3) \qquad -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \alpha}{\partial n_\alpha} = \varrho' = \frac{1}{4\pi\sqrt{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}}.$$

Weiter ist nach § 1 das Oberflächenelement $d\sigma$ des Ellipsoids

$$4) \qquad \begin{aligned} d\sigma &= \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu\nu}\sqrt{\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}{(\mu^2-l^2)(p^2-\mu^2)(l^2-\nu^2)(p^2-\nu^2)}}\, d\mu^2\, d\nu^2 \\ &= (\mu^2-\nu^2)\sqrt{\frac{(\varrho^2-\mu^2)(\varrho^2-\nu^2)}{(\mu^2-l^2)(p^2-\mu^2)(l^2-\nu^2)(p^2-\nu^2)}}\, d\mu\, d\nu. \end{aligned}$$

Vermittelst der Gleichungen 3) und 4) wird aus 2)

$$5) \qquad \frac{1}{4\pi}\frac{(\mu^2-\nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(\mu^2-l^2)(p^2-\mu^2)(l^2-\nu^2)(p^2-\nu^2)}} = g\, d\Theta\, d\varphi.$$

Ferner ist bekanntlich

$$d\mu\, d\nu = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial \mu} & \frac{\partial \Theta}{\partial \nu} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} & \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \end{vmatrix}^{-1} d\Theta\, d\varphi.$$

Ermittelt man die hier vorkommende Determinante vermittelst der sich aus den Gleichungen I) ergebenden nöthigen partiellen Differentialquotienten, indem man darauf Acht hat, alle in ihnen vorkommenden Functionen von Θ und φ vermittelst der Gleichungen I) durch Functionen von μ und ν darzustellen, so erhält man, abgesehen vom Vorzeichen (das unberücksichtigt bleiben kann) leicht

$$d\mu\, d\nu = \frac{\sqrt{(\mu^2-l^2)(p^2-\mu^2)(l^2-\nu^2)(p^2-\nu^2)}}{\mu^2-\nu^2}\cdot\frac{\sqrt{p^2 l^2-\mu^2\nu^2}}{p\, l}\, d\Theta\, d\varphi.$$

Hiermit entsteht aus der Gleichung 5)

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\sqrt{p^2 l^2-\mu^2\nu^2}}{p\, l}\, d\Theta\, d\varphi = g\, d\Theta\, d\varphi,$$

folglich

$$6) \qquad g = \frac{1}{4\pi}\sin\Theta.$$

Man vergl. hierzu: *l. c.* 8, § 2, und die Gleichung 8) in dem daselbst am Ende behandelten Beispiele des verlängerten Rotationsellipsoids.

Anmerkung. Der eben erlangte Werth von g stimmt nicht zufällig mit dem überein, wie er für kugelförmige Niveauflächen gilt, sondern er gilt für jede Art von Niveauflächen, wenn für β und γ die Coordinaten Θ und φ eingeführt werden, wie es im vorliegenden Falle geschehen ist. Der Grund davon ist einfach der, dass g unabhängig von α ist, folglich für alle Niveauflächen denselben Werth besitzen muss, also auch

für die unendlich entfernte Niveaufläche, d. i. die Kugelfläche mit unendlich grossem Radius R, deren Centrum im Endlichen liegt und die daher auch die nur mit endlichen Dimensionen versehene Cardinalfläche allenthalben in unendlich grosser Entfernung R umgiebt. Für diese Kugelfläche ist aber

$$d\sigma = \lim_{R=\infty} R^2 \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi, \quad \alpha = \lim_{R=\infty} \frac{1}{R},$$

folglich

$$\frac{\partial \alpha}{\partial n_\alpha} = \lim_{R=\infty} - \frac{1}{R^2},$$

und daher nach der Gleichung 2)

$$g \, d\Theta \, d\varphi = -\frac{1}{4\pi} \cdot \lim_{R=\infty} - \frac{1}{R^2} \cdot R^2 \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi,$$

folglich

$$g = \frac{1}{4\pi} \sin\Theta,$$

wie zu beweisen war.

§ 4.

Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Punkte für ellipsoidische Körper.

Die Entwickelung der reciproken Entfernung zweier Punkte, $F = \frac{1}{R}$, ist für die Coordinatensysteme der ϱ, Θ, φ, welche hier in Frage kommen, bereits geschehen (man vergl. darüber z. B. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, §§ 17 flgg. S. 348); deswegen können wir uns hier vollständig an den Rechnungsgang Heine's anschliessen und darauf beschränken, die einschlagenden Endresultate hier zusammenzustellen. Die verschiedenen Fälle, welche Heine freilich noch an der angegebenen Stelle in Bezug auf sein r, das mit unserem ϱ dieselbe geometrische Bedeutung hat, unterscheiden musste, klären sich natürlich nach unserer Erklärung des ϱ als Functionen von α (vergl. § 2) viel einfacher auf, und namentlich sind wir nicht gezwungen, für gewisse specielle Fälle zu imaginären Beziehungen greifen zu müssen, wie Heine thun musste. Wir haben so einen bedeutenden Vortheil auf unserer Seite, ganz abgesehen davon, dass auch die physikalische Bedeutung unseres ϱ (als Function von α, d. i. einer bestimmten Arbeitsleistung) dasselbe zu einem mechanisch greifbareren Begriffe macht, als Heine's r sein kann.

Sind xyz und $x_a y_a z_a$ die beiden Punkte, deren reciproke Entfernung ermittelt werden soll, so setzen wir

$$x = \varrho \cos\Theta, \qquad x_a = \varrho_a \cos\Theta_a,$$
$$y = \sqrt{\varrho^2 - l^2} \sin\Theta \cos\varphi, \qquad y_a = \sqrt{\varrho_a^2 - l^2} \sin\Theta_a \cos\varphi_a,$$
$$z = \sqrt{\varrho^2 - p^2} \sin\Theta \sin\varphi, \qquad z_a = \sqrt{\varrho_a^2 - p^2} \sin\Theta_a \sin\varphi_a,$$

und erhalten nach Heine's Vorgang, bei dem $\varrho = r_1$, $r_a = r$, $\varphi = \psi_1$, $\varphi_a = \psi$, $l = b$ und $p = c$ gesetzt ist, für

$$F = \frac{1}{R} = [(x_a - x)^2 + (y_a - y)^2 + (z_a - z)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

die Entwickelung

$$F = \frac{1}{2\pi} \sum_0^{\infty} {}^n \sum_{-n}^{+n} {}^r a_r^{(n)} P_r^{(n)}(\cos\Theta) \sum_{-n}^{+n} {}^s (-1)^s P_s^{(n)}(\cos\Theta_a) A_{s,r}^{(n)},$$

$$\text{I)} \qquad A_{s,r}^{(n)} = \int_0^{2\pi} P_r^{(n)}(\xi)\, Q_s^{(n)}(\xi_a) \frac{\cos r(\chi - \varphi) \cos s(\chi_a - \varphi_a)}{\sqrt{l^2\cos^2\eta + p^2\sin^2\eta}}\, d\eta.$$

Hierbei ist

$$a_r^{(n)} = a_{-r}^{(n)} = \frac{(1.3.5\ldots\overline{2n-1})^2}{\Pi(n+r)\,\Pi(n-r)}, \quad \Pi(m) = 1.2.3\ldots m,$$

$$P_r^{(n)}(x) = P_{-r}^{(n)}(x) = \sqrt{x^2-1}^{\,r} \Big\{ x^{n-r} - \frac{(n-r)(n-r-1)}{2.(2n-1)} x^{n-r-2}$$
$$+ \frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)(n-r-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)} x^{n-r-4} \mp \ldots \Big\},$$

$$Q_s^{(n)}(x) = Q_{-s}^{(n)}(x) = \sqrt{x^2-1}^{\,s} \Big\{ x^{-n-s-1} + \frac{(n+s+1)(n+s+2)}{2.(2n+3)} x^{-n-s-3}$$
$$+ \frac{(n+s+1)(n+s+2)(n+s+3)(n+s+4)}{2.4.(2n+3)(2n+5)} x^{-n-m-5} + \ldots \Big\},$$

$$\xi = \frac{\varrho}{\sqrt{l^2\cos^2\eta + p^2\sin^2\eta}}, \quad \xi_a = \frac{\varrho_a}{\sqrt{l^2\cos^2\eta + p^2\sin^2\eta}},$$

$$\sqrt{\xi^2-1}\cos\chi = \frac{\sqrt{\varrho^2 - l^2}\cos\eta}{\sqrt{l^2\cos^2\eta + p^2\sin^2\eta}}, \quad \sqrt{\xi_a^2-1}\cos\chi_a = \frac{\sqrt{\varrho_a^2 - l^2}\cos\eta}{\sqrt{l^2\cos^2\eta + p^2\sin^2\eta}},$$

$$\sqrt{\xi^2-1}\sin\chi = \frac{\sqrt{\varrho^2 - p^2}\sin\eta}{\sqrt{l^2\cos^2\eta + p^2\sin^2\eta}}, \quad \sqrt{\xi_a^2-1}\sin\chi_a = \frac{\sqrt{\varrho_a^2 - p^2}\sin\eta}{\sqrt{l^2\cos^2\eta + p^2\sin^2\eta}}.$$

Der ziemlich umständliche Coefficient $A_{s,r}^{(n)}$ kann noch in folgende Formen gebracht werden:

$$A_{s,r}^{(n)} = \cos r\varphi \cos s\varphi_a \int_0^{2\pi} P_r^{(n)}(\xi)\, Q_s^{(n)}(\xi_a) \frac{\cos r\chi \cos s\chi_a\, d\eta}{\sqrt{l^2\cos\eta^2 + p^2\sin^2\eta}}\, d\eta$$

$$+ \sin r\varphi \sin s\varphi_a \int_0^{2\pi} P_r^{(n)}(\xi)\, Q_s^{(n)}(\xi_a) \frac{\sin r\chi \sin s\chi_a}{\sqrt{l^2\cos^2\eta + p^2\sin^2\eta}}\, d\eta$$

$$= 4 \cos r\varphi \cos s\varphi_a \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_r^{(n)}(\xi)\, Q_s^{(n)}(\xi_a) \frac{\cos r\chi \cos s\chi_a}{\sqrt{l^2\cos^2\eta + p^2\sin^2\eta}}\, d\eta$$

$$+ 4 \sin r\varphi \sin s\varphi_a \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_r^{(n)}(\xi)\, Q_s^{(n)}(\xi_a) \frac{\sin r\chi \sin s\chi_a}{\sqrt{l^2\cos^2\eta + p^2\sin^2\eta}}\, d\eta.$$

Zugleich verschwindet $A_{s,r}^{(n)}$, wenn nicht zugleich r und s gerade oder ungerade ist.

Eine weitere Betrachtung der Coefficienten $A_{s,r}^{(n)}$ führt noch auf folgende Darstellung von F:

$$F = \frac{1}{2\pi} \sum_0^{\infty} {}^n (2n+1) \sum_{-n}^{+n} {}^r P_r^{(n)}(\cos\Theta) \sum_{-n}^{+n} {}^s (-1)^s a_s^{(n)} P_s^{(n)}(\cos\Theta_a)$$

$$\text{II)} \quad \times 4 \Bigg(\cos r\varphi \cos s\varphi_a \sum_{-n}^{+n} {}^q U_{q,r}^{(n)}(\varrho)\, W_{q,s}^{(n)}(\varrho_a)$$

$$+ \sin r\varphi \sin s\varphi_a \sum_{-n}^{+n} {}^q u_{q,r}^{(n)}(\varrho)\, w_{q,s}^{(n)}(\varrho_a) \Bigg),$$

wenn

$$U_{q,r}^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos q\eta\, d\eta \int_0^{2\pi} B^n \cos r\delta\, d\delta,$$

$$W_{q,s}^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos q\eta\, d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos s i t}{C^{n+1}}\, dt, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$u_{q,r}^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin q\eta\, d\eta \int_0^{2\pi} B^n \sin r\delta\, d\delta,$$

$$w_{q,s}^{(n)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin q\eta\, d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin s i t}{C^{n+1}}\, dt, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$B = \varrho + \sqrt{\varrho^2 - l^2} \cos\eta \cos\delta + \sqrt{\varrho^2 - p^2} \sin\eta \sin\delta,$$

$$C = \varrho_a + \sqrt{\varrho^2_a - l^2}\cos\eta\cos it + \sqrt{\varrho^2_a - p^2}\sin\eta\sin it, \quad i = \sqrt{-1},$$

$$= \varrho_a\left(1 + \sqrt{1 - \frac{l^2}{\varrho^2_a}}\cos\eta\cos it + \sqrt{1 - \frac{p^2}{\varrho^2_a}}\sin\eta\sin it\right).$$

Ueber die Functionen $U^{(n)}_{q,r}$, $u^{(n)}_{q,r}$, $W^{(n)}_{q,s}$ und $w^{(n)}_{q,s}$ hat Heine selbst S. 357 flgg. seines oben citirten Werkes Einiges hinzugefügt und auch die einschlagenden Originalarbeiten Jacobi's im 15. Bande des Crelle'schen Journals S. 1 flgg. und S. 205 flgg. citirt. Wir begnügen uns hier mit diesen Andeutungen und heben nur das folgende für uns Werthvolle hervor.

Die mit U und u bezeichneten Functionen sind allein von ϱ abhängig, die mit W und w bezeichneten allein von ϱ_a; durch die letzte Entwickelungsform wird also F so dargestellt, dass seine einzelnen Glieder nur Producte enthalten von Factoren, deren jeder einzelne nur von einer der Coordinaten ϱ, ϱ_a, Θ, Θ_a, φ und φ_a abhängt. Die Coordinate ϱ_a kommt nur in den Functionen W und w vor, und zwar so, dass $W^{(n)}$ und $w^{(n)}$ nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{1}{\varrho_a}$ sich leicht entwickeln lässt und als niedrigste Potenz von $\frac{1}{\varrho_a}$ die n^{te} enthält. Am Ende von § 2 wurde aber bemerkt, dass man immer $\frac{1}{\varrho_a}$ nach aufsteigenden Potenzen von α_a entwickeln könne, und es zeigt sich leicht, dass die niedrigste Potenz von α_a, welche in dieser Entwickelung von $\frac{1}{\varrho_a}$ vorkommt, die erste ist (indem das von α_a freie Glied der Entwickelung verschwindet). Denkt man sich nun die Functionen W und w nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{1}{\varrho_a}$ entwickelt und ebenso jede der vorkommenden Potenzen von $\frac{1}{\varrho_a}$ wieder nach aufsteigenden Potenzen von α_a, so hat man, wenn man endlich noch alle Glieder, die in dieselbe Potenz von α_a multiplicirt sind, vereinigt, diejenige Entwickelung des Ausdrucks F, die in der früheren Abhandlung § 4 als immer möglich nachgewiesen wurde, womit zugleich auch der Beweis für die Convergenz der obigen Entwickelung von F geliefert ist. Dasjenige W und w, welches bei dieser Entwickelung die niedrigste Potenz von α_a liefert, ist $W^{(0)}$ und $w^{(0)}$, und die wirklich hierbei vorkommende niedrigste Potenz von α_a ist die erste, es verschwindet also insbesondere das Glied mit α^0_a (vergl. *l. c.* S. 269 am Ende), und die genannte niedrigste Potenz von α_a, nämlich α^1_a, kommt nur her von der Function $W^{(0)}$, indem schon $W^{(1)}$ und $w^{(1)}$ als niedrigste Potenz von α_a die zweite ergeben und $w^{(0)}$ gleich Null ist. Die Function $W^{(0)}$ entsteht aber allein aus der Function $Q_0^{(0)}(\xi_a)$.

Endlich erkennt man aus den angegebenen Entwickelungen von F noch leicht, dass sie der in 14), § 6 S. 284 *l. c.*, gemachten Voraussetzung genügt

und dass daher auch für den jetzt vorliegenden Fall alle die Consequenzen Giltigkeit haben müssen, die in § 6 *l. c.* gezogen wurden.

§ 5.
Die Fundamentalaufgaben, welche mit Hilfe der Entwickelungen in § 4 gelöst werden können.

Die Fundamentalaufgaben, welche in diesem Paragraphen gelöst werden sollen, bestehen theils in der Verification der Sätze, die § 6 *l. c.* mitgetheilt wurden, speciell für ellipsoidische Körper, theils in der Lösung gewisser einfacher Probleme, die ohne Weiteres mit Hilfe der Entwickelungen in § 4 in Angriff genommen werden können, für die es also einer Entwickelung von F nach Potenzen von α_a nicht bedarf.

1. Es ist zu zeigen, dass die Entwickelungen des § 4 als Specialfall für $p=l=0$ den Fall der kugelförmigen Niveauflächen mit umschliessen.

Geht man aus von der Entwickelung I) in § 4, so kann man dort zunächst die Annahme $p=l$ einführen; man kommt dadurch leicht auf die Entwickelung, welche den verlängerten Rotationsellipsoiden als Niveauflächen angehört. Der Uebergang von diesen Niveauflächen zu den kugelförmigen ist aber bereits *l. c.* S. 306 und 307 geschehen.

2. Die Gleichungen 4, § 6 *l. c.*, sind zu verificiren für ellipsoidische Körper.

Denkt man sich etwa die Entwickelung II), § 4, von F nach absteigenden Potenzen von ϱ_a angeordnet und fassen wir zunächst diejenigen Glieder dieser Entwickelung ins Auge, die Potenzen von $\frac{1}{\varrho_a}$ enthalten, die von höherem als vom ersten Grade sind, so kommen diese Glieder, wie schon am Ende des vorigen Paragraphen bemerkt worden ist, nur her von solchen Functionen W und w, deren n grösser als Null ist. Der Coefficient irgend einer solchen Potenz von $\frac{1}{\varrho_a}$, etwa $\left(\frac{1}{\varrho_a}\right)^m$, $m>1$, aber ist eine ganze algebraische Function von $P_r^{(n)}(\cos\Theta)$ und $P_s^{(n)}(\cos\Theta_a)$, mindestens vom ersten Grade, übrigens aber frei von Θ und Θ_a. Bildet man nun die in 4), § 6 S. 280 *l. c.*, geforderte Integration, indem man die Gleichung 6), § 3, berücksichtigt, so verschwindet, wie verlangt wird, das Integrationsergebniss infolge des bekannten Satzes

$$\int_0^\pi P_m^{(n)}(\cos\Theta)\sin\Theta\, d\Theta=0,\quad n>0.$$

Es bleiben deswegen nur die Glieder der Entwickelungen des § 4 zur weiteren Betrachtung übrig, deren $n=0$. Entnehmen wir aber diese aus

der Entwickelung 1), § 4, so sind sie, da $a_0^{(0)} = P_0^{(0)} = 1$, einfach dargestellt durch $\frac{1}{2\pi} A_{0,0}^{(0)}$.

Nun ist aber

$$\frac{1}{2\pi} A_{0,0}^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_0^{(0)}(\xi_a) \frac{d\eta}{\sqrt{l^2 \cos^2\eta + p^2 \sin^2\eta}}.$$

Weiter ist bekanntlich

$$Q_0^{(0)}(\xi_a) = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{\xi_a + 1}{\xi_a - 1}\right) = \tfrac{1}{2} l\left(\frac{\varrho_a + \sqrt{l^2 \cos^2\eta + p^2 \sin^2\eta}}{\varrho_a - \sqrt{l^2 \cos^2\eta + p^2 \sin^2\eta}}\right),$$

folglich auch

$$\frac{\partial}{\partial(\varrho^2)} Q_0^{(0)}(\xi_a) = \frac{\partial}{\partial\varrho} Q_0^{(0)}(\xi_a) \frac{\partial\varrho}{\partial(\varrho^2)} = - \frac{\sqrt{l^2 \cos^2\eta + p^2 \sin^2\eta}}{(\varrho_a^2 - l^2)\cos^2\eta + (\varrho_a^2 - p^2)\sin^2\eta} \cdot \frac{1}{2\varrho_a}$$

und, da $Q_0^{(0)}(\xi_a)$ für $\varrho_a = \infty$ verschwindet, durch Integration dieser letzteren Gleichung zwischen den Grenzen ϱ_a^2 und ∞

$$Q_0^{(0)}(\xi_a) = \tfrac{1}{2} \int_{\varrho_a^2}^{\infty} \frac{\sqrt{l^2 \cos^2\eta + p^2 \sin^2\eta}\, d(\varrho_a^2)}{\sqrt{\varrho_a^2}\,[(\varrho_a^2 - l^2)\cos^2\eta + (\varrho_a^2 - p^2)\sin^2\eta]}.$$

Setzen wir diesen Werth von $Q_0^{(0)}(\xi_a)$ in den obigen Werth von $\frac{1}{2\pi} A_{0,0}^{(0)}$ ein und integriren zunächst in Bezug auf η, indem wir beachten, dass bekanntlich

$$\int_0^{2\pi} \frac{du}{\alpha^2 \cos^2 u + \beta^2 \sin^2 u} = \frac{\pi}{2\alpha\beta},$$

so erscheint

$$\frac{1}{2\pi} A_{0,0}^{(0)} = \tfrac{1}{2} \int_{\varrho_a^2}^{\infty} \frac{d\varrho_a^2}{\sqrt{\varrho_a^2(\varrho_a^2 - l^2)(\varrho_a^2 - p^2)}}.$$

Nach § 2 ist aber die rechte Seite dieser Gleichung gerade α_a. Bei einer Entwickelung von F nach aufsteigenden Potenzen von α_a ist daher der Coefficient von α_a^1 gleich 1, und damit sind auch für den Fall $n = 0$ die Gleichungen 4), § 6 *l. c.*, für ellipsoidische Körper erfüllt, da die auf der Cardinalfläche haftende Gesammtmasse gleich 1 sein sollte.

3. Das Ellipsoid, dem als Coordinate α angehört, werde mit einer unendlich dünnen Massenschicht belegt, deren Dichtheit im Punkte $\Theta\varphi$ $\psi(\Theta, \varphi)$ sei und die nirgends unendlich gross wird, sich aber übrigens beliebig stetig oder unstetig über das Ellipsoid verbreitet findet. Es ist die äussere und innere Poten-

tialfunction V_a und V_i dieser Massenschicht zu bestimmen.

Bezeichnen wir das Oberflächenelement des Ellipsoids mit $d\sigma$, so ist offenbar die Potentialfunction V der gegebenen Massenbelegung des Ellipsoids:

$$V = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \psi(\Theta, \varphi)\, F\, d\sigma,$$

wenn für F die Entwickelungen des § 4 genommen werden.

Will man nun V_a bestimmen, so hat man in den ebengenannten Entwickelungen von F die mit Θ und φ bezeichneten Werthe als die Integrationsvariablen zu betrachten, so dass man erhält

$$V_a = \frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty {}^n \sum_{-n}^{+n} {}^s (-1)^s P_s^{(n)}(\cos \Theta_a) \sum_{-n}^{+n} {}^r a_r^{(n)} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_{s,r}^{(n)} P_r^{(n)}(\cos \Theta)\, \psi(\Theta, \varphi)\, d\sigma.$$

Will man dagegen V_i bestimmen, so hat man in den obigen Entwickelungen von F für Θ_a, φ_a, ϱ_a resp. Θ, φ, ϱ zu schreiben und für Θ, φ, ϱ resp. Θ_i, φ_i, ϱ_i, wobei letztere Grössen für die gleich auszuführende Integration als constant gelten, so dass

$$V_i = \frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty {}^n \sum_{-n}^{+n} {}^r a_r^{(n)} P_r^{(n)}(\cos \Theta_i) \sum_{-n}^{+n} {}^s (-1)^s \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_{s,r}^{(n)} P_s^{(n)}(\cos \Theta)\, \psi(\Theta, \varphi)\, d\sigma$$

oder auch, bei anderer Anordnung der Summationen nach r und s:

$$V_i = \frac{1}{2\pi} \sum_0^\infty {}^r \sum_{-n}^{+n} {}^s a_s^{(n)} P_s^{(n)}(\cos \Theta_i) \sum_{-n}^{+n} {}^r (-1)^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} A_{r,s}^{(n)} P_r^{(n)}(\cos \Theta)\, \psi(\Theta, \varphi)\, d\sigma.$$

4. Gegeben ist eine Function Φ der beiden Argumente Θ und φ, die, so lange $0 \leqq \Theta \leqq \pi$ und $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ ist, immer endlich, wenn auch sonst etwa unstetig ist; es ist die Entwickelung von Φ nach den Entwickelungscoefficienten von F vorzunehmen.

Verwendet man die Gleichung 7), S. 281 *l. c.*, indem man für V_a und V_i die in der vorigen Aufgabe erlangten Entwickelungen benützt, so bekommt man, wenn man daselbst Φ statt $\psi(\Theta, \varphi)$ schreibt:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{\partial V_a}{\partial n_{\alpha_a}} \right)_{\alpha_a = \alpha} + \left(\frac{\partial V_i}{-\partial n_{\alpha_i}} \right)_{\alpha_i = \alpha} \right]$$

oder, weil $-\dfrac{\partial \alpha}{\partial n_\alpha} = h_\alpha$:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial V_a}{\partial \alpha_a} h_{\alpha_a}\right)_{\alpha_a=\alpha} - \left(\frac{\partial V_i}{\partial \alpha_i} h_{\alpha_i}\right)_{\alpha_i=\alpha}\right].$$

Berücksichtigt man weiter, dass nach 2) und 6), § 3

$$\frac{1}{4\pi} h_\alpha \, d\sigma = g \, d\Theta \, d\varphi = \frac{1}{4\pi} \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi,$$

und setzt man für V_a und V_i seine Werthe, indem man beachtet, dass darin immer $(-1)^r = (-1)^s$, weil $r \equiv s \mod 2$ war, so findet man

$$\Phi(\Theta', \psi') = \frac{1}{4\pi}$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \sum_0^{\infty}{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_s \sum_{-n}^{+n}{}_r (-1)^s P_s^{(n)}(\cos\Theta') \Big\{ a_r^{(n)} \left[\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial A_{s,r}^{(n)}}{\partial \alpha_a} P_r^{(n)}(\cos\Theta) \, \Phi \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi\right]_{\alpha_a=\alpha}$$

$$- a_s^{(n)} \left[\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial A_{r,s}^{(n)}}{\partial \alpha_i} P_r^{(n)}(\cos\Theta) \, \Phi \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi\right]_{\alpha_i=\alpha} \Big\}.$$

Diese Entwickelung von $\Phi(\Theta', \varphi')$ lässt sich aber noch wesentlich vereinfachen; die Rechnung ist jedoch dabei etwas langwierig und eignet sich an dieser Stelle nicht zur genaueren Auseinandersetzung. Deswegen mag die hier kurz skizzirte Angabe des Rechnungsganges genügen. Man führe die in der angegebenen Entwickelung geforderte Differentiation direct unter den Integralzeichen aus und gehe alsdann zur Grenze für $\alpha_a = \alpha_i = \alpha$ über, drücke ferner die vorkommenden Producte von Cosinus und Sinus der ganzen Vielfachen von χ durch Summen oder Differenzen von Cosinus oder Sinus der ganzen Vielfachen von χ aus und vereinige letztere möglichst zu den Formen $\cos m\chi + i \sin m\chi$, gebrauche ferner bei der Differentiation der Functionen P und Q die Differentialformeln, die S. 310 *l. c.* angegeben wurden, und führe endlich nach Massgabe von § 4 η in die Rechnung ein; den dabei vorkommenden Ausdruck $(\varrho^2 - l^2)\cos^2\eta + (\varrho^2 - p^2)\sin^2\eta$ ersetze man durch

$$(\sqrt{\varrho^2 - l^2}\cos\eta + i\sqrt{\varrho^2 - p^2}\sin\eta)(\sqrt{\varrho^2 - l^2}\cos\eta - i\sqrt{\varrho^2 - p^2}\sin\eta),$$

indem man zugleich in den Functionen P und Q diejenigen Entwickelungen gebraucht, welche gelten, wenn der untere Index dieser Functionen negativ genommen wird, und gebrauche endlich noch die Substitution

$$\sqrt{\varrho^2 - l^2}\cos\eta \pm i\sqrt{\varrho^2 - p^2}\sin\eta = \frac{\sqrt{p^2 - l^2}}{2}(e^{\alpha \pm i\eta} + e^{-\alpha \mp i\eta}).$$

Man findet alsdann, dass mit Ausnahme der beiden Fälle $r = \pm s$ immer Glieder der ebengenannten Substitution vorhanden sind, die einen ganzen negativen Exponenten besitzen, alle sonstigen aber etwa vorhandenen, von η abhängigen Glieder nur ganze Functionen ersten Grades von Cosinus oder Sinus der ganzen Vielfachen von η enthalten oder doch wenigstens auf solche gebracht werden können, oder auch in Bezug auf η constant sind.



Entwickelt man nun die Glieder der ebengenannten Substitution nach Cosinus und Sinus der ganzen Vielfachen von η, so ergiebt die Entwickelung, dass keine Glieder vorkommen, die unabhängig von η wären. Es ergiebt sich daher das Resultat, dass, so lange $r^2 \gtrless s^2$, die Integration nach η nur über Glieder von der Form $A \cos m\eta$, $B \sin m\eta$, $m \gtrless 0$ zu erstreben ist, dass demnach das Integrationsergebniss, weil zwischen den Grenzen 0 und 2π zu integriren ist, verschwindet. Dieses Verschwinden des Integrationsergebnisses tritt aber auch noch, wenn $r^2 = s^2$, ein bei allen denjenigen Gliedern, die nach Ausführung der in obiger Entwickelung verlangten Differentiation als abhängig von χ erscheinen. Dieses eben behauptete Rechnungsresultat als verificirt vorausnehmend, entsteht daher aus obiger Entwickelung von $\Phi(\Theta', \varphi')$

$$\Phi(\Theta', \varphi') = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_s (-1)^s a_s^{(n)} P_s^{(n)}(\cos\Theta')$$

$$\times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial A_{s,s}^{(n)}}{\partial \alpha_a} - \frac{\partial A_{s,s}^{(n)}}{\partial \alpha_i}\right]_{\alpha_a = \alpha_i = \alpha} P_s^{(n)}(\cos\Theta)\, \Phi(\Theta, \varphi) \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi,$$

$$\left[\frac{\partial A_{s,s}^{(n)}}{\partial \alpha_a} - \frac{\partial A_{s,s}^{(n)}}{\partial \alpha_i}\right]_{\alpha_a = \alpha_i = \alpha} = \left[\frac{\partial A_{s,s}^{(n)}}{\partial \xi_a} - \frac{\partial A_{s,s}^{(n)}}{\partial \xi_i}\right]_{\xi_a = \xi_i = \xi} \frac{\frac{\partial \varrho}{\partial \alpha}}{\sqrt{l^2 \cos^2\eta + p^2 \sin^2\eta}}$$

$$= \cos s(\varphi - \varphi') \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[P_s^{(n)} \frac{\partial}{\partial \xi} Q_s^{(n)}(\xi) - Q_s^{(n)}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} P_s^{(n)}(\xi)\right] \frac{\delta\eta}{l^2 \cos^2\eta + p^2 \sin^2\eta}.$$

Reducirt man den in [] eingeschlossenen Ausdruck dieses Werthes in ähnlicher Weise, wie es S. 311 *l. c.* geschah, so wird aus ihm

$$-\frac{2n+1}{\xi^2 - 1} = -(2n+1) \frac{l^2 \cos^2\eta + p^2 \sin^2\eta}{(\varrho^2 - l^2)\cos^2\eta + (\varrho^2 - p^2)\sin^2\eta};$$

setzt man dies ein und benützt die in der zweiten Aufgabe bereits gebrauchte Integralformel, so wird der ganze vorige Werth

$$-2\pi \cdot \frac{2n+1}{2} \frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} \cos s(\varphi - \varphi') \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - l^2}\sqrt{\varrho^2 - p^2}}$$

oder, weil nach § 2

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \alpha} = -\sqrt{(\varrho^2 - l^2)(\varrho^2 - p^2)}:$$

$$2\pi \cdot \frac{2n+1}{2} \cos s(\varphi - \varphi').$$

Hiermit aber geht die Entwickelung von $\Phi(\Theta', \varphi')$ über in

$$\Phi(\Theta', \varphi') = \sum_0^\infty{}_n \sum_{-n}^{+n}{}_m (-1)^m a_m^{(n)} P_m^{(n)}(\cos\Theta')$$

$$\times \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(\Theta, \varphi)\, P_m^{(n)}(\cos\Theta) \cos m(\varphi - \varphi') \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi,$$

d. h. in die längst bekannte Entwickelung einer Function Φ nach Kugelfunctionen.

Durch dieses Resultat sind die Gleichungen 8), 9), 15), 16), § 6 *l. c.*, ganz allgemein für ellipsoidische Niveauflächen bestätigt.

5. Es sind die Anziehungs- oder Abstossungskräfte zu bestimmen, die ein beliebig wie mit Masse angefülltes Ellipsoid auf einen Punkt mit der Masse m ausübt, wenn das Newton'sche Gesetz als Gesetz der Grösse der Kraftwirkung angenommen wird. Anstatt des vollen Ellipsoids kann auch eine von zwei confocalen Ellipsoiden begrenzte Schale genommen werden.

Ist die Potentialfunction V der gegebenen Masse auf den gegebenen Punkt m bekannt, so findet man daraus nach bekannten Regeln die verlangten Kräfte durch einfache Differentiation; die vorliegende Aufgabe kommt daher darauf zurück, V zu ermitteln. Bezeichnet nun dk das Volumenelement im Punkte $\varrho\,\Theta\,\varphi$ des dem gegebenen Ellipsoid angehörigen Raumes, und ist daselbst die bekannte Dichtheit der Masse $\psi(\varrho, \Theta, \varphi)$ vorhanden, so ist die gesuchte Potentialfunction

$$V = \int F \psi(\varrho, \Theta, \varphi)\, dk,$$

wenn die Integration über den ganzen mit Masse angefüllten ellipsoidischen Raum erstreckt wird. Wir setzen nun

$$\psi(\varrho, \Theta, \varphi)\, dk = \chi(\varrho, \Theta, \varphi) \sin\Theta\, d\Theta\, d\varphi\, d\varrho$$

und entwickeln nach der in der vorigen Aufgabe gewonnenen Anleitung $\chi(\varrho, \Theta, \varphi)$ nach Kugelfunctionen in Bezug auf Θ und φ, ferner gebrauchen wir für F seine Entwickelungen in § 4. Diese Entwickelungen, eingesetzt in die vorige Gleichung, reduciren die Bestimmung von V auf einfache Quadraturen, die noch dazu in Bezug auf Θ und φ ohne Weiteres ausgeführt werden können mit Hilfe der bekannten Formeln

$$\int_0^{2\pi} A e^{m\varphi i} d\varphi = A. \begin{Bmatrix} 0 \\ 2\pi \end{Bmatrix}, \text{ wenn } \begin{matrix} m \gtrless 0; \\ m = 0; \end{matrix}$$

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} P_m^{(n)}(\cos\Theta)\, P_\mu^{(\nu)}(\cos\Theta) \sin\Theta\, d\Theta = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dfrac{(-1)^m}{a_m^{(n)}} \end{Bmatrix}, \text{ wenn } \begin{matrix} n \gtrless \nu,\ m \gtrless \mu, \\ n = \nu,\ m = \mu, \end{matrix}$$

so dass einzig die Quadratur nach ϱ übrig bleibt, deren Grenzen sich leicht bestimmen lassen.

Bei dieser Integration nach ϱ ist aber noch besonders zu berücksichtigen, ob der gegebene Punkt m ausserhalb des Ellipsoids, innerhalb der elliptischen Schale oder in der Masse des Ellipsoids selbst gelegen ist.

Im ersteren Falle ist in den Entwickelungen von F in § 4 ϱ_a, Θ_a und φ_a constant, nämlich dem Punkte m angehörig, und die Integrationsvariablen sind ϱ, Θ und φ. Im zweiten Falle ist ϱ, Θ, φ constant, nämlich dem Punkte m angehörig, und die Integrationsvariablen sind ϱ_a, Θ_a und φ_a. Im letzten Falle endlich legen wir durch den gegebenen Punkt m ein dem gegebenen confocales Ellipsoid, durch das der gegebene ellipsoidische Körper in eine umhüllende ellipsoidische Schale und in einen eingehüllten elliptischen Körper oder in eine dergleichen elliptische Schale zerlegt wird. Die Potentialfunction V auf den jetzigen Punkt m besteht nun aus der Summe der Potentialfunctionen des eben genannten inneren Massenraumes, die sich nach dem besprochenen ersten Falle bestimmen lässt, und der Potentialfunction der umgebenden ellipsoidischen Schale, die nach dem zweiten Falle berechnet werden muss.

6. **Gegeben ist die Potentialfunction einer irgendwie im Raume vertheilten Masse für alle Punkte der Oberfläche eines Ellipsoids in der Form $f(\Theta, \varphi)$; es soll daraus entweder die äussere Potentialfunction V_a oder die innere Potentialfunction V_i ermittelt werden, die vorhanden sein würde, wenn die die Potentialfunction $f(\Theta, \varphi)$ erregende Masse entweder nur innerhalb oder nur ausserhalb des Ellipsoids befindlich wäre.**

Indem wir das Resultat der vierten Aufgabe benützen, setzen wir

$$f(\Theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_0^{\infty} {}^n \sum_{-n}^{+n} {}^m (-1)^m a_m^{(n)} P_m^{(n)}(\cos\Theta) . \frac{2n+1}{2} (g_m \cos m\varphi + h_m \sin m\varphi),$$

$$g_m = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\Theta, \varphi)\, P_m^{(n)}(\cos\Theta) \cos m\varphi \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi,$$

$$h_m = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\Theta, \varphi)\, P_m^{(n)} \cos\Theta) \sin m\varphi \sin\Theta \, d\Theta \, d\varphi.$$

Denken wir uns weiter die Masse, welche die Potentialfunction $f(\Theta, \varphi)$ erzeugt, äquivalent auf die Oberfläche des Ellipsoids transponirt, so ist aus der Aufgabe 3) ersichtlich, dass

$$V_a = \frac{1}{2\pi} \sum_0^{\infty} {}^n \sum_{-n}^{+n} {}^m P_m^{(n)}(\cos\Theta_a) \Big[(-1)^m \cos m\varphi_a \sum_{-n}^{+n} {}^r a_r^{(n)} B_{m,r}^{(n)} . G_r$$
$$+ (-1)^m \sin m\varphi_a \sum_{-n}^{+n} {}^r a_r^{(n)} B'^{(n)}_{m,r} . H_r \Big],$$

$$V_i = \frac{1}{2\pi} \sum_0^{\infty} {}^n \sum_{-n}^{+n} {}^m P_m^{(n)} (\cos \Theta_i) \left[a_m^{(n)} \cos m \varphi_i \sum_{-n}^{+n} {}^r (-1)^r C_{r,m}^{(n)} . G_r \right.$$

$$\left. + a_m^{(n)} \sin m \varphi_i \sum_{-n}^{+n} {}^r (-1)^r C'^{(n)}_{r,m} . H_r \right],$$

wobei allgemein

$$B_{u,v}^{(n)} = \int_0^{2\pi} P_v^{(n)} (\xi) \, Q_u^{(n)} (\xi_a) \frac{\cos v \chi \cos u \chi_a}{\sqrt{l^2 \cos^2 \eta + p^2 \sin^2 \eta}} d\eta,$$

$$B'^{(n)}_{u,v} = \int_0^{2\pi} P_v^{(n)} (\xi) \, Q_u^{(n)} (\xi_a) \frac{\sin v \chi \sin u \chi_a}{\sqrt{l^2 \cos^2 \eta + p^2 \sin^2 \eta}} d\eta,$$

$$C_{u,v}^{(n)} = \int_0^{2\pi} P_v^{(n)} (\xi_i) \, Q_u^{(n)} (\xi) \frac{\cos v \chi_i \cos u \chi}{\sqrt{l^2 \cos^2 \eta + p^2 \sin^2 \eta}} d\eta,$$

$$C'^{(n)}_{u,v} = \int_0^{2\pi} P_v^{(n)} (\xi_i) \, Q_u^{(n)} (\xi) \frac{\sin v \chi_i \sin u \chi}{\sqrt{l^2 \cos^2 \eta + p^2 \sin^2 \eta}} d\eta,$$

während die G und H nur numerische Werthe bezeichnen, die abhängig sind von den Massen, die die Potentialfunction $f(\Theta, \varphi)$ auf dem Ellipsoide erzeugen. Die mit B, B', C und C' bezeichneten Werthe sind nur abhängig von dem α oder ϱ des gegebenen Ellipsoids und dem α_a oder ϱ_a, resp. α_i oder ϱ_i des Punktes, auf den sich die Potentialfunctionen V_a, resp. V_i beziehen; es sind also diese Werthe B, B', C und C' vollständig bekannt, so dass allein nur noch die mit G und H bezeichneten Werthe unbekannt sind. Wir bestimmen sie durch folgende Betrachtung.

Die genannten Werthe von V_a und V_i haben die Form von Entwickelungen nach Kugelfunctionen, sie sind demnach nur auf die angegebene Weise in der genannten Form darstellbar; sie gelten ferner, und zwar V_a für jedes α_a, das der Bedingung genügt $\alpha_a < \alpha \leq 0$, und V_i für ein α_i, das der Bedingung genügt $\alpha_i \geq \alpha$ (die obere Grenze von α_i ist ein bestimmter numerischer Werth), und lässt man α_a und α_i innerhalb der eben angegebenen Grenzen beliebig seinen Werth ändern, so ändern sich dabei die Werthe der G und H nicht. Lassen wir also α_a mit α und α_i mit α in den obigen Werthen von V_a und V_i zusammenfallen, so müssen beide Potentialfunctionen identisch übereinstimmen mit der angegebenen Entwickelung von $f(\Theta, \varphi)$. Geht nun bei dem ebengenannten Grenzübergange allgemein $B_{m,r}^{(n)}$ in $D_{m,r}^{(n)}$, $B'^{(n)}_{m,r}$ in $D'^{(n)}_{m,r}$, $C_{r,m}^{(n)}$ in $E_{r,m}^{(n)}$ und $C'^{(n)}_{r,m}$ in $E'^{(n)}_{r,m}$ über, so sind auch die D und E bekannte Werthe und zur Bestimmung der Unbekannten G und H erhalten wir die Gleichungen:

a) wenn V_a gesucht wird:

$$a_m^{(n)} \frac{2n+1}{2} g_m = \sum_{-n}^{+n}{}_r\, a_r^{(n)} G_r D_{m,r}^{(n)},$$

$$a_m^{(n)} \frac{2n+1}{2} h_m = \sum_{-n}^{+n}{}_r\, a_r^{(n)} H_r D_{m,r}^{\prime(n)};$$

b) wenn V_i gesucht wird:

$$(-1)^m \cdot \frac{2n+1}{2} g_m = \sum_{-n}^{+n}{}_r\, (-1)^r G_r E_{r,m}^{(n)},$$

$$(-1)^m \cdot \frac{2n+1}{2} h_m = \sum_{-n}^{+n}{}_r\, (-1)^r H_r E_{r,m}^{\prime(n)}.$$

Die hieraus sich ergebenden Systeme von Gleichungen (m nimmt alle ganzzahligen Werthe von $-n$ bis $+n$ einschliesslich an) sind aber gerade hinreichend, um die Unbekannten G und H zu bestimmen.

Diese eben erlangten Systeme linearer Gleichungen vereinfachen sich noch wesentlich dadurch, dass die Coefficienten D und E verschwinden, wenn nicht zugleich m und r gerade oder ungerade ist. Aus diesem Grunde können auch von vornherein die in den Gleichungen unter *b)* beiderseitig vorkommenden Factoren $(-1)^m$ und $(-1)^r$ als gleichwerthig ohne Weiteres weggelassen werden.

Durch die Lösung dieser Aufgabe 6) ist der Lehrsatz S. 289 *l. c.* für ellipsoidische Niveauflächen bestätigt.

Die Ermittelung der Functionen V_a und V_i durch $f(\Theta, \varphi)$, wie sie eben angegeben wurde, stellt zugleich die Lösung des thermostatischen Problems für ellipsoidische homogene Körper dar, denn denkt man sich $f(\Theta, \varphi)$ als die gegebene Temperatur der Ellipsoidoberfläche, so ist V_i die Temperatur desjenigen Punktes im Innern des Ellipsoids, auf den sich V_i als Potentialfunction beziehen würde. Ist dagegen in einem irgendwie gestalteten homogenen Körper eine ellipsoidische Höhlung, und stellt $f(\Theta, \varphi)$ dar die Temperatur in den einzelnen Punkten der die Höhlung begrenzenden Fläche, so ist V_a proportional der Temperatur desjenigen Punktes des gegebenen Körpers, auf den sich V_a als Potentialfunction beziehen würde; Letzteres freilich noch unter der Bedingung, dass das den gegebenen Körper umgebende Medium in thermischer Beziehung mit ihm identisch ist.

Durch die Lösung dieser Aufgabe 6) können wir zugleich auch das Problem der äquivalenten Massentransposition für ellipsoidische Körper als gelöst betrachten, wenn es sich darum handelt, die gegebenen Massen äquivalent auf die Ellipsoidoberfläche zu transponiren. Ist nämlich eine solche äquivalent zu transponirende Masse gegeben, so ist damit auch ihre Potentialfunction bekannt, folglich auch der Werth $f(\Theta, \varphi)$, den diese Potentialfunction für die Punkte der Ellipsoidoberfläche annimmt; damit aber sind wir nach der eben durchgeführten Rechnung auch im Stande, die Po-

tentialfunctionen V_a und V_i anzugeben, die die äquivalent auf die Ellipsoidoberfläche transponirten gegebenen Massen erzeugen. Kennen wir aber von dieser transponirten Masse V_a und V_i, so giebt die Gleichung 7), S. 281 *l. c.*, die Dichtheit ϱ dieser Masse auf der Ellipsoidoberfläche selbst in der Form

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial V_a}{\partial n_{\alpha_a}}\right)_{\alpha_a=\alpha} + \left(\frac{\partial V_i}{-\partial n_{\alpha_i}}\right)_{\alpha_i=\alpha}\right].$$

Die weitere Rechnung selbst ist ganz analog der, welche bei der Lösung der vierten Aufgabe ausgeführt wurde.

Auf diese Aufgabe der äquivalenten Massentransposition werden wir von anderer, wirksamerer Seite wieder zurückkommen.

(Fortsetzung folgt.)

X.

Beziehungen zwischen dem Modul der elliptischen Functionen und den Invarianten der biquadratischen binären Form.

Von

Dr. Felix Müller
in Berlin.

Das elliptische Differential $\frac{dx}{\sqrt{Rx}}$ kann sowohl durch lineare Substitutionen, als durch solche zweiten Grades auf die Legendre'sche Form gebracht werden. Die betreffenden Formeln hat Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen über elliptische Functionen gegeben, und sind dieselben auch in dem Werke des Herrn Schellbach: „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen", Abschnitt XIII, veröffentlicht. Aus den Formeln, welche den Modul k^2 durch die Wurzeln der Gleichung dritten Grades $4s^3-g_2s-g_3=0$ ausdrücken, fliesst eine Anzahl von Relationen zwischen dem Modul und den Invarianten, auf die ich bei der Beschäftigung mit dem Transformationsproblem der elliptischen Functionen (besonders mit der Herleitung der Invariantenrelationen, welche den Jacobi'schen Modulargleichungen entsprechen), gestossen bin. Da dieselben für die Theorie der elliptischen Functionen überhaupt von Wichtigkeit sind, so erlaube ich mir, sie im Folgenden zusammenzustellen.

Erster Fall.

Die Wurzeln der Gleichung $4s^3-g_2s-g_3=0$ seien alle drei reell.

Wir bezeichnen diese Wurzeln mit e_1, e_2, e_3 und nehmen an, dass $e_1 > e_2 > e_3$ ist. Dann wird bei einer Transformation zweiten Grades, welche das Differential $\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}$ in $\frac{d\varphi}{\sqrt{e_1-e_3}\,.\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ verwandelt, k^2 durch die drei Wurzeln ausgedrückt lauten: *

---

* Schellbach: „Die Lehre von den elliptischen Integralen" etc., Seite 273.

$$1)\qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

Aus der Gleichung

$$2)\qquad 4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

folgt nun

$$3)\qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$4)\qquad e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1 = -\tfrac{1}{4} g_2,$$

$$5)\qquad e_1 e_2 e_3 = \tfrac{1}{4} g_3.$$

Aus 1) erhalten wir, mit Benutzung von 3)

$$k^2 = \frac{2e_2 + e_1}{2e_1 + e_2} = \frac{2\frac{e_2}{e_1} + 1}{2 + \frac{e_2}{e_1}}$$

und

$$\frac{e_2}{e_1} = -\frac{1 - 2k^2}{2 - k^2}.$$

Ganz ebenso findet man:

$$\frac{e_3}{e_2} = \frac{1 + k^2}{1 - 2k^2},$$

$$\frac{e_1}{e_3} = -\frac{2 - k^2}{1 - k^2}.$$

Ferner ergiebt sich aus 4) mit Benutzung von 3):

$$\tfrac{1}{4} g_2 = e_1^2 + e_1 e_2 + e_2^2$$

oder

$$\frac{g_2}{4e_1^2} = \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^2 + \frac{e_2}{e_1} + 1 = \left(\frac{1 - 2k^2}{2 - k^2}\right)^2 - \frac{1 - 2k^2}{2 - k^2} + 1,$$

also

$$6)\qquad \frac{g_2}{4e_1^2} = 3\,\frac{1 - k^2 + k^4}{(2 - k^2)^2}.$$

Nun folgt aus der Gleichung 2):

$$\frac{g_3}{4e_1^3} = 1 - \frac{g_2}{4e_1^2},$$

also wird

$$\frac{g_3}{4e_1^3} = 1 - 3\,\frac{1 - k^2 + k^4}{(2 - k^2)^2} = \frac{1 - k^2 - 2k^4}{(2 - k^2)^2},$$

oder

$$7)\qquad \frac{g_3}{4e_1^3} = \frac{(1 + k^2)(1 - 2k^2)}{(2 - k^2)^2}.$$

Ganz ebenso, wie die Gleichungen 6) und 7), ergeben sich die folgenden:

$$6')\qquad \frac{g_2}{4e_2^2} = 3\,\frac{1 - k^2 + k^4}{(1 - 2k^2)^2}, \quad \frac{g_2}{4e_3^2} = 3\,\frac{1 - k^2 + k^4}{(1 + k^2)^2},$$

$$7')\qquad \frac{g_3}{4e_2^3} = -\frac{(1 + k^2)(2 - k^2)}{(1 - 2k^2)^2}, \quad \frac{g_3}{4e_3^3} = -\frac{(2 - k^2)(1 - 2k^2)}{(1 + k^2)^2}.$$

Erhebt man jetzt die Gleichung 6) in die dritte, die Gleichung 7) in die zweite Potenz und dividirt beide durch einander, so ergiebt sich folgende Relation zwischen der absoluten Invariante $\frac{g_2^3}{27\,g_3^2}$ und dem Modul k^2:

$$8)\qquad \frac{g_2^3}{27\,g_3^2}=\frac{4\,(1-k^2+k^4)^3}{(1+k^2)^2\,.\,(2-k^2)^2\,.\,(1-2\,k^2)^2}.$$

Es ist dies dieselbe Relation, welche Herr Clebsch (Theorie der binären algebraischen Formen, S. 169) auf anderem Wege hergeleitet hat. k^2 ist nichts Anderes, als das dort mit σ bezeichnete Doppelverhältniss, und für $\frac{1}{2}g_2$ ist i, für $\frac{3}{4}g_3$ ist j zu setzen.

Man sieht sofort aus der Gleichung 8), dass der Werth der absoluten Invariante ungeändert bleibt, wenn man für k^2 setzt:

$$\frac{1}{k^2},\quad 1-k^2,\quad \frac{1}{1-k^2},\quad \frac{k^2-1}{k^2},\quad \frac{k^2}{k^2-1}.$$

Wir formen die Gleichung 8) noch etwas um, indem wir auf beiden Seiten 1 subtrahiren. Dadurch ergiebt sich die elegante Gleichung:

$$9)\qquad \tfrac{1}{27}\left(\frac{g_2^3}{27\,g_3^2}-1\right)=\frac{k^4\,(1-k^2)^2}{(1+k^2)^2\,.\,(2-k^2)^2\,.\,(1-2k^2)^2}.$$

Natürlich bleibt auch dieser Ausdruck ungeändert für die angegebenen Substitutionen.

Die Wurzeln der Gleichung 2) lassen sich ebenfalls durch k^2 und den Quotienten $\frac{g_3}{g_2}$ ausdrücken. Man erhält nämlich durch Division der Gleichungen 6) und 7) und der analogen 6') und 7'):

$$10)\qquad \begin{cases} e_1=\dfrac{3g_3}{g_2}\cdot\dfrac{1-k^2+k^4}{(1+k^2)\,(1-2k^2)}, \\ e_2=-\dfrac{3g_3}{g_2}\cdot\dfrac{1-k^2+k^4}{(1+k^2)\,(2-k^2)}, \\ e_3=-\dfrac{3g_3}{g_2}\cdot\dfrac{1-k^2+k^4}{(2-k^2)\,(1-2k^2)}. \end{cases}$$

Vergleichen wir diese Werthe mit den von Herrn Clebsch (a. a. O. S. 170) gefundenen, so sehen wir, dass die drei Wurzeln e_1, e_2, e_3, resp. den Wurzeln m', m'', m daselbst entsprechen. Durch Multiplication der drei Grössen 10) ergiebt sich wieder die Gleichung 8), die übrigens auch durch Multiplication der für $\frac{g_2}{4e_1^2}$, $\frac{g_2}{4e_2^2}$, $\frac{g_3}{4e_3^2}$ gefundenen Ausdrücke hätte gewonnen werden können, da $16\,.\,e_1^2 e_2^2 e_3^2 = g_3^2$ ist.

Durch die Gleichung 8) war die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{27\,g_3^2}$ eindeutig bestimmt durch k^2; will man umgekehrt k^2 durch ein gegebenes $\frac{g_2^3}{27\,g_3^2}$ be-

stimmen, so erscheint dieses k^2 nach Gleichung 8) als Wurzel einer Gleichung sechsten Grades. Diese Gleichung lässt sich aber auf folgende Weise in eine sehr einfache Gleichung dritten Grades verwandeln. Wir setzen

$$\text{a)} \qquad \pm\sqrt{\tfrac{1}{27}\left(\frac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}-1\right)}=\alpha,$$

so wird nach Gleichung 9)

$$\alpha=\frac{k^2(1-k^2)}{(1+k^2)(2-k^2)(1-2k^2)},$$

woraus folgt

$$k^6-\frac{3\alpha-1}{2\alpha}k^4-\frac{3\alpha+1}{2\alpha}k^2+1=0.$$

Durch die Substitution

$$\text{b)} \qquad k^2=k_1^{\,2}+\frac{3\alpha-1}{2\alpha}$$

geht aber dieselbe über in

$$k_1^{\,6}-\frac{27\alpha^2+1}{12\alpha^2}k_1^{\,2}+\frac{27\alpha^2+1}{108\alpha^3}=0.$$

Nun ist aber

$$27\alpha^2+1=\frac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}},$$

folglich erhält man

$$k_1^{\,6}-\frac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}\cdot\frac{k_1^{\,2}}{12\,\alpha^2}+\frac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}\cdot\frac{1}{108\,\alpha^3}=0.$$

Setzen wir noch

$$\text{c)} \qquad 3k_1^{\,2}\alpha=\mathfrak{K},$$

so erhalten wir schliesslich

$$\text{11)} \qquad \mathfrak{K}^3-\tfrac{3}{4}\cdot\frac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}\cdot\mathfrak{K}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}=0.$$

Fasst man die Substitutionen a), b), c) zusammen, so ist

$$\text{11')} \qquad k^2=\pm\frac{2\mathfrak{K}-1}{\sqrt{\tfrac{1}{3}\left(\frac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}-1\right)}}.$$

Zu jedem Werthe von $\frac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}$ giebt es sechs Werthe k^2, und wir wissen aus dem Obigen, dass, wenn man einen Werth k^2 hat, die übrigen die Form $\frac{1}{k^2}$, $1-k^2$, $\frac{1}{1-k^2}$, $\frac{k^2-1}{k^2}$, $\frac{k^2}{k^2-1}$ haben.

Beispiel. $g_2=84$, $g_3=80$, also $\frac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}=\frac{7^3}{2^2.5^2}$. Aus der Gleichung 11) folgt ein Werth $\mathfrak{K}=\frac{7}{20}$, mithin ist $k^2=\frac{1}{3}$. Die übrigen Werthe sind: 3,

$\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -2, -\frac{1}{2}$. Die Wurzeln der Gleichung $4s^3 - 84s - 80 = 0$ sind $e_1 = 5$, $e_2 = -1$, $e_3 = -4$, und daraus hat man ebenfalls $k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{1}{3}$.

Zweiter Fall.

Die Gleichung $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln.

In diesem Falle lässt sich nur eine Transformation ersten Grades anwenden, um das Differential $\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$ in die Legendre'sche Form zu bringen. Es sei e_1 reell und e_2, e_3 seien imaginär; dann muss man setzen:*

$$12)\qquad k^2 = \frac{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_1 - e_2}}{2i\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}},$$

und $s = e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \cdot \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}$, wodurch $\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$ in

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

übergeht.

Aus der Gleichung 12) erhält man durch Quadriren:

$$k^2 = \frac{-3e_1 + 2\sqrt{3e_1^2 - \frac{1}{4}g_2}}{4\sqrt{3e_1^2 - \frac{1}{4}g_2}} = \frac{1}{2} - \frac{3e_1}{4\sqrt{3e_1^2 - \frac{1}{4}g_2}},$$

und hieraus

$$13)\qquad \frac{g_2}{3e_1^2} = 4 - \frac{3}{(1 - 2k^2)^2} = \frac{1 - 16k^2 + 16k^4}{(1 - 2k^2)^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{g_3}{e_1^3} = 4 - \frac{g_2}{e_1^2},$$

folglich

$$14)\qquad \frac{g_3}{e_1^3} = \frac{1 + 32k^2 - 32k^4}{(1 - 2k^2)^2}.$$

Die absolute Invariante wird also

$$15)\qquad \frac{g_2^3}{27g_3^2} = \frac{(1 - 16k^2 + 16k^4)^3}{(1 + 32k^2 - 32k^4)^2 \cdot (1 - 2k^2)^2},$$

woraus noch folgt:

$$16)\qquad \frac{1}{27}\left(\frac{g_2^3}{27g_3^2} - 1\right) = -\frac{4k^2(1 - k^2)}{(1 + 32k^2 - 32k^4)^2 \cdot (1 - 2k^2)^2}.$$

Durch Division von 13) und 14) erhält man

---

* Schellbach, a. a. O. S. 272.

$$e_1 = \frac{3g_3}{g_2} \cdot \frac{1 - 16k^2 + 16k^4}{1 + 32k^2 - 32k^4}.$$

Ferner setzen wir

$$e_2 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 i, \quad e_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 i,$$

so ergiebt sich aus 3):

$$\varepsilon_2 = -\tfrac{1}{2} e_1 = -\frac{3g_3}{2g_2} \cdot \frac{1 - 16k^2 + 16k^4}{1 + 32k^2 - 32k^4}.$$

Da ferner

$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = \tfrac{9}{4} e_1^2 + \varepsilon_3^2$$

ist, so erhält man nach leichter Umformung der Gleichung 12)

$$\left(\frac{\varepsilon_3}{e_1}\right)^2 = \frac{9k^2(1-k^2)}{(1-2k^2)^2},$$

also

$$\varepsilon_3 = \pm \frac{9g_3}{g_2} \cdot \frac{(1 - 16k^2 + 16k^4) \cdot \sqrt{k^2(1-k^2)}}{(1-2k^2)(1 + 32k^2 - 32k^4)}.$$

Die drei Wurzeln e_1, e_2, e_3 nehmen also die Gestalt an:

$$17) \quad \begin{cases} e_1 = \dfrac{3g_3}{g_2} \cdot \dfrac{1 - 16k^2 + 16k^4}{1 + 32k^2 - 32k^4}, \\[2ex] e_2 = -\dfrac{3g_3}{g_2} \cdot \dfrac{1 - 16k^2 + 16k^4}{1 + 32k^2 - 32k^4} \left\{ \dfrac{1}{2} - 3i \dfrac{\sqrt{k^2(1-k^2)}}{1-2k^2} \right\}, \\[2ex] e_3 = -\dfrac{3g_3}{g_2} \cdot \dfrac{1 - 16k^2 + 16k^4}{1 + 32k^2 - 32k^4} \left\{ \dfrac{1}{2} + 3i \dfrac{\sqrt{k^2(1-k^2)}}{1-2k^2} \right\}. \end{cases}$$

Durch Multiplication dieser drei Werthe resultirt wieder die Gleichung 15), da $e_1 e_2 e_3 = \frac{1}{4} g_3$ ist.

Nun wollen wir die Gleichung für k^2 herleiten. Aus 16) folgt, wenn wir z. A.

$$\frac{g_2^3}{27 g_3^2} - 1 = 27\alpha^2$$

setzen:

$$\alpha^2 = \frac{-4k^2(1-k^2)}{(1 + 32k^2 - 32k^4)^2 (1-2k^2)^2};$$

und diese Gleichung verwandelt sich durch die Substitution

$$\text{a)} \qquad 1 - 2k^2 = \lambda$$

in

$$\lambda^6 - \tfrac{9}{4}\lambda^4 + \frac{81\alpha^2 - 1}{64\alpha^2}\lambda^2 + \frac{1}{64\alpha^2} = 0,$$

welche wieder durch die Substitution

$$\text{b)} \qquad \lambda^2 = \mathfrak{K} + \tfrac{3}{4}$$

auf die Normalform

$$\mathfrak{K}^3 - \frac{27\alpha^2 + 1}{64\alpha^2}\mathfrak{K} + \frac{27\alpha^2 + 1}{256\alpha^2} = 0$$

gebracht wird. Setzt man hier den Werth für α^2 wieder ein, so erhält man schliesslich:

$$18)\qquad \mathfrak{K}^3 - \frac{\dfrac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}}{\frac{64}{27}\left(\dfrac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}-1\right)}\,\mathfrak{K} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\dfrac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}}{\frac{64}{27}\left(\dfrac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}-1\right)} = 0.$$

Hat man hieraus $\mathfrak{K}$ gefunden, so ergiebt sich, vermöge der Substitutionen a), b), k^2 durch die Gleichung:

$$18')\qquad (1-2k^2)^2 = \mathfrak{K} + \tfrac{3}{4}.$$

Beispiel: $g_2 = -6$, $g_3 = 10$, also $\dfrac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}} = -\frac{2}{25}$. Aus der Gleichung 18) ergiebt sich ein Werth $\mathfrak{K} = -\frac{1}{4}$, also $k^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Die Wurzeln der Gleichung $4s^3 + 6s - 10 = 0$ sind $e_1 = 1$, $e_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, $e_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

Zum Schluss wollen wir noch diejenigen Werthe von k^2 zusammenstellen, welche besonderen Werthen der Invarianten entsprechen.

$$\text{A)}\qquad \frac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}} = 1.$$

Da für diesen besonderen Werth der absoluten Invariante stets zwei Wurzeln der Gleichung $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ einander gleich sind, so haben wir es nur mit dem ersten Falle zu thun. Die Gleichung 9) lehrt, dass hier entweder

$$k^2 = 1,\ \text{d. h. } e_1 = e_2 = -\frac{3g_3}{2g_2},\ e_3 = \frac{3g_3}{g_2},$$

oder

$$k^2 = 0,\ \text{d. h. } e_3 = e_2 = -\frac{3g_3}{2g_2},\ e_1 = \frac{3g_3}{g_2},$$

oder

$$k^2 = \infty,\ \text{d. h. } e_1 = e_3 = -\frac{3g_3}{2g_2},\ e_2 = \frac{3g_3}{g_2}.$$

$$\text{B)}\qquad g_2 = 0,\ g_3 \gtrless 0.$$

Da $e_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}g_3}$, $e_2 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}g_3}\,(-1 + i\sqrt{3})$, $e_3 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{4}g_3}\,(-1 - i\sqrt{3})$, so kommt hier der zweite Fall in Anwendung, und die Gleichung 13) giebt:

$$16k^4 - 16k^2 + 1 = 0,\quad \text{also } k^2 = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{3}.$$

$$\text{C)}\qquad g_3 = 0,\ g_2 > 0.$$

Alle Wurzeln sind reell, und entweder

$$k^2 = -1,\ \text{d. h. } e_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{g_2},\ e_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{g_2},\ e_3 = 0,$$

oder

$$k^2 = 2,\ \text{d. h. } e_1 = 0,\ e_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{g_2},\ e_3 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{g_2},$$

oder

$$k^2 = \tfrac{1}{2}, \text{ d. h. } e_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{g_2}, \; e_2 = 0, \; e_3 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{g_2}.$$

D) $g_3 = 0, \; g_2 < 0.$

Hier ist $e_1 = 0, \; e_2 = \frac{i}{2}\sqrt{-g_2}, \; e_3 = -\frac{i}{2}\sqrt{-g_2}$, und $k^2 = \frac{1}{2}$.

E) $g_3 = 0, \; g_2 = 0.$

Es ist $e_1 = e_2 = e_3 = 0$, und k^2 genügt der Gleichung

$$k^4 - k^2 + 1 = 0.$$

XI.

Erzeugnisse krumm-projectivischer Gebilde.

Von

MILINOWSKI,
Gymnasiallehrer in Tilsit.

I.

Auf einem Kegelschnitt K sei die Punktreihe $ABC \dots X$ projectivisch zu der Punktinvolution $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 \dots X_1 X_2$, d. h. jedem Punkt der Reihe $ABC \dots$ entspricht ein Punktpaar der Involution, also dem Punkt A das Paar $A_1 A_2$, und umgekehrt, jedem Punkt A_1 oder A_2 wieder jener Punkt A. Die Doppelpunkte der involutorischen Punktreihe seien $V_{12}\, W_{12}$ und ihnen entsprechen VW, welche Punkte (vergl. Weyr, Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde) die Verzweigungspunkte der Reihe $ABC \dots$ heissen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der beiden projectivischen Punktreihen umhüllen eine Curve, deren Classe zunächst bestimmt werden soll. Zu dem Zweck wähle man einen beliebigen Punkt P und ziehe PA, PB, $PC \dots$; diese Strahlen mögen K noch in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\dots$ treffen, dann ist, wenn man mit Q einen beliebigen Punkt von K bezeichnet, das Strahlenbüschel $Q(ABC \dots)$ projectivisch mit dem Büschel $Q(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\dots)$. Das erstere steht in projectivischer Beziehung mit der Involution $Q(A_1 A_2 B_1 B_2 \dots)$ und daher ist dasselbe mit dem zweiten Büschel der Fall. Die Linien, welche die Punkte $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2 \dots$ der Involution verbinden, schneiden sich in einem Punkt Π und bilden ein Strahlenbüschel, welches mit der Strahleninvolution in Q und daher auch mit dem Büschel $Q(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\dots)$ in projectivischer Beziehung steht. Von den beiden Büscheln $\Pi\,(A_1 B_1 C_1 \dots)$ und $Q\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\dots)$ wird ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ erzeugt, welcher K ausser in Q noch in drei Punkten $\mathfrak{M}\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ schneidet. Mit diesen müssen drei entsprechende Punkte $M_1 N_1 R_1$ zusammenfallen und da die Strahlen $P\mathfrak{M}$, $P\mathfrak{N}$, $P\mathfrak{R}$ den Kegelschnitt K noch in MNR schneiden, so sind sie die von P an die Umhüllungscurve zu ziehenden Tangenten. Dieselbe ist also von der dritten Classe und werde mit C_3 bezeichnet. — Weil K und $\mathfrak{K}$ sich ausser in Q

noch mindestens in einem reellen Punkt schneiden, so folgt, dass von jedem Punkt P sich entweder eine oder drei reelle Tangenten an C_3 ziehen lassen.

Auch auf folgende Art lässt sich die Classe der Curve bestimmen. Seien Q und Q_1 zwei entsprechende Punkte, so schneiden sich die Strahlen $Q_1 X$ und QX_1, QX_2 bei der Veränderung von X in den Punkten eines Kegelschnitts $\mathfrak{C}$; denn das in Q entstehende Büschel ist mit der Strahleninvolution in Q in projectivischer Beziehung und beide Büschel haben im gemeinschaftlichen Strahl QQ_1 zwei entsprechende Strahlen. $\mathfrak{C}$ und K schneiden sich ausser in Q noch in drei Punkten D', E', F', in deren jedem zwei entsprechende Punkte DD_1, EE_1, FF_1 zusammenfallen müssen. Zieht man von einem beliebigen Punkt P den Strahl PX_1, welcher K noch in X'_1 schneidet, darauf QX_1 und QX'_1, welche Linien $\mathfrak{C}$ in $\xi_1 \xi'_1$ treffen, und schliesslich $Q_1 \xi_1$ und $Q_1 \xi'_1$, so liefern ihre Durchschnitte mit K die den Punkten $X_1 X'_1$ entsprechenden Punkte XX'. Bei der Veränderung von X_1 umhüllt der Strahl XX' einen Kegelschnitt $\mathfrak{U}$, weil durch keinen Punkt mehr als zwei solcher Linien gehen können. Denn würden mehr als zwei, etwa die drei AA', BB', CC' durch einen Punkt gehen, so wären die sechs Strahlen Q_1 $(AA'BB'CC')$ in Involution; sie würden $\mathfrak{C}$ in $\alpha_1 \alpha'_1 \beta_1 \beta'_1 \gamma_1 \gamma'_1$ treffen und es müsste Q_1 auf $\mathfrak{C}$ liegen, da jeder Punkt von $\mathfrak{C}$, mit den letzten sechs Punkten verbunden, ein involutorisches Strahlenbüschel liefert und ausserhalb $\mathfrak{C}$ Punkte von dieser Eigenschaft nicht vorhanden sind. Da Q_1 nicht auf $\mathfrak{C}$ liegt, so können auch nicht drei Linien XX' durch einen Punkt gehen. Demnach umhüllen alle Linien XX' einen Kegelschnitt $\mathfrak{U}$. Jeder Linie PX_1 entspricht eine XX' und umgekehrt, daher ist das Strahlenbüschel $PX_1 \ldots$ in projectivischer Beziehung mit dem Tangentenbüschel $XX' \ldots$. Beide erzeugen (vergl. Schröter, Crelle's J. Bd. 54) eine Curve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkt P, welche K ausser in den drei Doppelpunkten $D'E'F'$ noch in drei Punkten schneidet, deren Verbindungslinien mit P die Tangenten geben, welche sich von P an C_3 ziehen lassen.

Noch auf folgende Art lässt sich die Classe der Curve bestimmen. Der Strahl PX_1 schneide K noch in X'_1, die Strahlen QX_1 und $Q_1 X'_1$ treffen sich in ξ. Wenn PX_1 sich um P dreht, so erzeugen die projectivischen Strahlenbüschel $QX_1 \ldots$ und $Q_1 X'_1 \ldots$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{M}$, welcher den vorhin genannten Kegelschnitt $\mathfrak{C}$ ausser in Q_1 noch in drei Punkten schneidet. Ist η einer dieser Punkte, so bestimmen die Strahlen $Q\eta$ und $Q_1 \eta$ auf K zwei Punkte, deren Verbindungslinien eine Tangente der Umhüllungscurve ist und durch P geht. Es giebt daher durch P nur drei Tangenten an letztere.

Jedem Punkt P entspricht ein Kegelschnitt $\mathfrak{M}$. Bewegt sich P auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ und sind $G_1 G'_1$ ihre Schnittpunkte mit K, so haben alle Kegelschnitte $\mathfrak{M}$ die Punkte QQ_1 und die Schnittpunkte von QG_1 mit $Q_1 G'_1$ und QG'_1 mit $Q_1 G_1$ gemeinschaftlich. Die Kegelschnitte $\mathfrak{M}$ bilden also ein Büschel. So oft einer dieser Kegelschnitte ausser in Q_1 den Kegelschnitt $\mathfrak{C}$

schneidet, soviel Tangenten lassen sich von dem entsprechenden Punkt P an C_3 ziehen. Wenn also ein Kegelschnitt $\mathfrak{M}$ den $\mathfrak{C}$ berührt, so lassen sich von dem entsprechenden Punkt P nur zwei Tangenten an C_3 ziehen. Da aber alle Kegelschnitte $\mathfrak{M}$ ein Büschel bilden und der eine Basispunkt Q_1 auf $\mathfrak{C}$ liegt, so giebt es vier Kegelschnitte des Büschels, welche $\mathfrak{C}$ berühren, also auch vier Punkte auf $\mathfrak{G}$, die zugleich auf C_3 liegen, oder C_3 ist von der vierten Ordnung.

Um den Berührungspunkt auf einer Tangente AA_1 zu finden, nehme man A und A_1 zu Scheiteln der Büschel $A\ (A_1 A_2 \ldots X_1 X_2)$ und $A_1\ (A \ldots X)$, welche einen Kegelschnitt $\mathfrak{R}$ erzeugen, den Reductionskegelschnitt des Punktpaares AA_1, da im gemeinschaftlichen Strahl AA_1 zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen. Ist B_1 der dem A_1 unendlich nahe Punkt auf K und schneidet AB_1 den Kegelschnitt $\mathfrak{R}$ in β, so trifft $A_1\beta$ den K im entsprechenden Punkte B von B_1, welcher dem A unendlich nahe liegt. Die Tangente BB_1 schneidet dann AA_1 im Berührungspunkte β' mit der Curve C_3. Für diesen Fall werden $AA_1\beta\beta'$ vier harmonische Punkte und wir folgern:

„Auf jeder Tangente AA_1 trennt der Berührungspunkt β' die Punkte A und A_1 von dem Schnittpunkte dieser Tangente mit dem Reductionskegelschnitt des Punktpaares AA_1 harmonisch."

Die Doppelpunkte der Punktreihe auf K und der ihr projectivischen Punktinvolution waren $D'E'F'$. Im ersteren fallen die Punkte D und D_1 zusammen. Da der Reductionskegelschnitt dieses Punktpaares sich auf den Punkt D' reducirt, so muss der Berührungspunkt der Tangente DD_1, welche zugleich Tangente an K ist, mit dem Punkte D' zusammenfallen, d. h. C_3 und K berühren sich selbst in D' und ebenso in E' und F'. Also:

„Die Curve C_3 berührt K in drei Punkten."

Von jedem Punkte von K lassen sich an C_3 drei Tangenten ziehen, von den beiden Verzweigungspunkten V und W aber nur zwei, weil in VV_{12} und WW_{12} je zwei Tangenten zusammenfallen. Die Punkte V und W liegen also auf C_3, d. h.:

„Die Curve C_3 schneidet K, ausser dass sie ihn in drei Punkten berührt, noch in zwei Punkten."

Jeder Punkt von K kann sowohl zur Reihe $ABC\ldots$, als zur Involution $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 \ldots$ gerechnet werden. Liegen also in einem Punkte die Punkte T_1 und U vereinigt, so entspricht ihm sowohl ein Punkt T, als auch ein Punktpaar $U_1 U_2$ der Involution. Es bleibt zu untersuchen, ob es nicht einen Punkt giebt, dessen entsprechende Punkte wieder zusammenfallen. Die Verbindungslinie zweier solcher Punkte wäre eine Doppeltangente. Nehmen wir an, es gäbe eine solche Doppeltangente RR_1 und es fiele mit R der Punkt S_1 zusammen, so müsste der ihm entsprechende Punkt S mit R_1 zusammenfallen. Die Verbindungslinien der Punktpaare der auf K gegebenen Involution schneiden sich in Π und bilden ein Büschel, welches

mit dem Büschel $Q(ABC\ldots)$ in projectivischer Beziehung ist und einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ erzeugt, welcher K in den drei Doppelpunkten $D'E'F'$ schneidet, wobei Q ein ganz beliebiger Punkt von K sein kann. Zieht man $\Pi D'$ und nimmt den andern Schnittpunkt $\mathfrak{D}$ als Scheitel des Büschels Q, so erzeugen die beiden Büschel $\Pi(A_1 B_1 C_1\ldots)$ und $\mathfrak{D}(ABC\ldots)$ ein Geradenpaar $\Pi D'$ und $E'F'$. Daher müssen sich die Linien ΠR und $\mathfrak{D}R_1$ sowohl, wie ΠR_1 und $\mathfrak{D}R$ auf $E'F'$ schneiden. Die Schnittpunkte seien ξ und η. Ist σ der Schnittpunkt von RR_1 mit $\Pi D'$ und τ der von $E'F'$ mit $\Pi D'$, so sind $\mathfrak{D}\Pi\sigma\tau$ vier harmonische Punkte, und zwar $\mathfrak{D}\Pi$ und $\sigma\tau$ zugeordnete, weil $\xi\eta RR_1\mathfrak{D}\Pi$ die Ecken eines vollständigen Vierseits sind. Ist ζ der Schnittpunkt von RR_1 mit $\xi\eta$, so sind $RR_1\zeta\sigma$ auch vier harmonische Punkte. Die Polare von σ in Bezug auf K geht daher durch ζ. Da σ construirt werden kann, so findet man ζ als Schnittpunkt von $\xi\eta$ oder $E'F'$ mit der Polare von σ; dann ist $\sigma\zeta$ eine Doppeltangente. — Um diese zu construiren, ziehe man $\Pi D'$ und nenne die Schnittpunkte dieser Linie mit K und mit $E'F'$ bezüglich $\mathfrak{D}$ und τ, bestimme denjenigen Punkt σ, welcher τ von Π und $\mathfrak{D}$ harmonisch trennt, construire die Polare von σ bezüglich K und nenne ζ ihren Schnittpunkt mit $E'F'$, so ist $\sigma\zeta$ eine Doppeltangente und es giebt keine zweite. Die wirkliche Construction der Doppeltangente würde auf dem angegebenen Wege sehr weitläufig sein, weil zunächst die Punkte $D'E'F'$ bestimmt werden müssen und man diese nur als Durchschnitte der Kegelschnitte K und $\mathfrak{K}$ erhält. Deshalb mag hier noch eine andere Construction erfolgen. Ist wieder RR_1 die Doppeltangente und fällt S_1 mit R zusammen, so liegt in R_1 noch S. Verbindet man zwei Punkte A und A_1 und verlängert die Verbindungslinie bis zum Durchschnitt mit RR_1 in α, zieht man ferner in A und A_1 die Tangenten, welche sich in $\mathfrak{A}$ schneiden, so geht die Polare von α bezüglich K durch $\mathfrak{A}$. Die Schnittpunkte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ von AR und A_1R_1, AS und A_1S_1 liegen auf dem Reductionskegelschnitte k_1 des Punktpaares AA_1 und zugleich auf der Polare des Punktes α in Bezug auf K, also liegen $\mathfrak{A}\mathfrak{R}\mathfrak{S}$ in einer Geraden. — Die Linien $\mathfrak{A}A$ und RR_1 mögen sich in $\mathfrak{A}_1$ schneiden, so ist $\mathfrak{A}_1$ ein bekannter Punkt; denn zieht man durch $\mathfrak{A}$ beliebige Strahlen, welche k_1 in $\mathfrak{R}'\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{R}''\mathfrak{S}''\ldots$ schneiden, ferner $A\mathfrak{R}'$, $A\mathfrak{S}'$, $A\mathfrak{R}''$, $A\mathfrak{S}''\ldots$, welche Strahlen K noch in $R'S'$, $R''S''\ldots$, so sind diese Punktpaare in Involution (weil A ein Schnittpunkt von k_1 und K ist) und die Geraden $R'S'$, $R''S''\ldots$ schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{A}_1$. Der Punkt A ist ein Doppelpunkt der Involution $R'S'\ldots$, also muss $\mathfrak{A}_1$ auf der Tangente in A an K, d. h. auf der Linie $\mathfrak{A}A$ liegen. Nimmt man den Reductionskegelschnitt k_2 von A und A_2, so bleibt der Punkt $\mathfrak{A}_1$ ungeändert. Jedem durch $\mathfrak{A}$ gezogenen Strahle werden zwei Strahlen in $\mathfrak{A}_1$ entsprechen. Zieht man nämlich durch $\mathfrak{A}$ einen beliebigen Strahl, welcher k_1 in $\mathfrak{R}'\mathfrak{S}'$ und k_2 in $\mathfrak{R}'_1\mathfrak{S}'_1$ schneidet, so treffen die Geraden $A\mathfrak{R}'$, $A\mathfrak{S}'$, $A\mathfrak{R}'_1$, $A\mathfrak{S}'_1$ den Kegelschnitt K noch in $R'S'$, $R'_1S'_1$ und beide Linien $R'S'$ und $R'_1S'_1$ gehen durch $\mathfrak{A}_1$. Es entstehen also in diesem Punkte zwei projectivische

Strahlenbüschel, deren Doppelstrahlen $\mathfrak{A}_1 A$ und die Doppeltangente sind. — Man kann auch den Reductionskegelschnitt der Punkte B und B_1 bestimmen, auf der Tangente in B an K den dem Punkte $\mathfrak{A}_1$ analogen Punkt $\mathfrak{B}_1$ aufsuchen und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ ziehen, so ist diese Linie auch die Doppeltangente.

Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so folgt:

„Befinden sich auf einem Kegelschnitte K die Punktreihe $ABC\ldots X$ und die Punktinvolution $A_1 A_1 B_1 B_2 C_1 C_2 \ldots X_1 X_2$ in projectivischer Beziehung, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve dritter Classe vierter Ordnung mit einer Doppeltangente, welche den Kegelschnitt K in drei Punkten berührt und in zwei anderen schneidet."

Ist C_3 eine Curve dritter Classe vierter Ordnung und K ein Kegelschnitt, welcher dieselbe dreifach berührt, nimmt man die drei Berührungspunkte DD_1, EE_1, FF_1 und die Schnittpunkte RS_1 und R_1S der Doppeltangente mit K als Elemente einer einfachen Punktreihe $DEFRS\ldots$ und einer zu ihr projectivischen involutorischen $D_1 E_1 F_1 R_1 S_1$, so ist durch diese fünf entsprechenden Elementenpaare die projectivische Beziehung vollständig bestimmt. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen eine Curve dritter Classe vierter Ordnung mit einer Doppeltangente, welche die gegebene in drei Punkten berührt und mit ihr dieselbe Doppeltangente hat. Beide Curven fallen also zusammen. Daraus folgt:

„Die Tangenten einer Curve dritter Classe vierter Ordnung schneiden einen dreifach berührenden Kegelschnitt in einer einfachen und einer involutorischen Punktreihe, welche in projectivischer Beziehung sind."

II.

Wenn auf einem Kegelschnitte K zwei projectivische Involutionen gegeben sind, so werden die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve umhüllen, deren hauptsächlichste Eigenschaften im Folgenden mitgetheilt werden sollen. Es seien

$$A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 \ldots X_1 X_2 V_1 V_2 V_{12} W_{12}$$

und

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \mathfrak{V}_{12} \mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \mathfrak{W}_{12}$$

die Punktpaare der projectivischen Involutionen. Dabei werde vorausgesetzt, dass die Doppelpunkte W_{12} und $\mathfrak{W}_{12}$ entsprechende Punkte sind. Die Punkte $V_1 V_2$, welche dem Doppelpunkte $\mathfrak{V}_{12}$, und $\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2$, welche dem Doppelpunkte V_{12} entsprechen, heissen die Verzweigungspunkte.

Um zu erkennen, wieviel Tangenten sich von irgend einem Punkte Π an die Umhüllungscurve C ziehen lassen, ziehe man den Strahl ΠX_1, welcher K noch in X'_1 schneidet; dann beschreiben bei der Veränderung von X_1 die Punkte $X_1\ldots$ und $X'_1\ldots$ zwei projectivische Punktreihen. Die Linien $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\ldots$ schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{P}$ und bilden ein

Strahlenbüschel, welches dem involutorischen Büschel $Q(A_1 A_2 B_1 B_2 \ldots)$ und also auch $Q(A_1 A'_1 B_1 B'_1 \ldots)$ projectivisch ist, wobei Q ein beliebiger Punkt von K ist. Das letzte Büschel erzeugt mit dem Büschel $\mathfrak{P}$ eine Curve dritter Ordnung, welche in Q einen Doppelpunkt hat und daher K nur in vier Punkten $M'_1\, N'_1\, O'_1\, P'_1$ schneidet. Mit diesen Punkten fallen vier Punkte $\mathfrak{M}_1\, \mathfrak{N}_1\, \mathfrak{O}_1\, \mathfrak{P}_1$ zusammen; die Verbindungslinien von Π mit $M'_1\, N'_1\, O'_1\, P'_1$ schneiden K noch in $M_1 N_1 O_1 P_1$ und daher sind diese Linien Tangenten von Π an C, weil sie die entsprechenden Punkte M_1 und $\mathfrak{M}_1$, N_1 und $\mathfrak{N}_1$, O_1 und $\mathfrak{O}_1$, P_1 und $\mathfrak{P}_1$ verbinden. Es folgt, dass die Curve C von der vierten Classe ist. Sie werde daher mit C_4 bezeichnet.

Die Verbindungslinien der Punktpaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2 \ldots$ und $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots$ schneiden sich in zwei Punkten P und $\mathfrak{P}$ und bilden in ihnen zwei projectivische Strahlenbüschel. Diese erzeugen einen Kegelschnitt k, welcher K in vier Punkten schneidet; in jedem dieser vier Punkte fallen entsprechende Punkte der beiden Involutionen zusammen, in $DEFG$ die Punkte $D_1 \mathfrak{D}_1$, $E_1 \mathfrak{E}_1$, $F_1 \mathfrak{F}_1$, $G_1 \mathfrak{G}_1$.

Die projectivischen Strahleninvolutionen $W_{12}(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots)$ und $\mathfrak{W}_{12}(A_1 A_2 \ldots)$ haben den gemeinschaftlichen Strahl $W_{12}\mathfrak{W}_{12}$ als entsprechenden Doppelstrahl und erzeugen einen Kegelschnitt R, der weder durch W_{12}, noch $\mathfrak{W}_{12}$ geht, vermittelst dessen man aber zu jedem Punkte $\mathfrak{X}_1$ der einen Punktinvolution auf K das entsprechende Punktpaar $X_1 X_2$ der andern finden kann. Man ziehe nämlich $W_{12}\mathfrak{X}_1$ und nenne $\xi_1 \xi_2$ die Schnittpunkte dieser Linie mit R, dann treffen $\mathfrak{W}_{12}\xi_1$ und $\mathfrak{W}_{12}\xi_2$ den Kegelschnitt K in X_1 und X_2.

Um einen beliebigen Punkt Π dreht sich eine Gerade g und schneidet K in G und G'. Verbindet man W_{12} und $\mathfrak{W}_{12}$ mit diesen Punkten, so erhält man zwei projectivische Strahlenbüschel, welche einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ erzeugen; dieser geht auch durch die Berührungspunkte der von Π an K gezogenen Tangenten. Jedem Punkte Π entspricht also ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Ist Γ irgend ein Punkt von $\mathfrak{K}$ und schneiden die Strahlen $W_{12}\Gamma$ und $\mathfrak{W}_{12}\Gamma$ den Kegelschnitt K in G und G', so geht GG' durch Π. Jedem Punkte Γ von $\mathfrak{K}$ entspricht also ein Strahl durch Π; jedem Punkte von R entspricht aber eine Tangente von C. Denn ist ξ ein beliebiger Punkt von R, und treffen die Linien $W_{12}\xi$ und $\mathfrak{W}_{12}\xi$ den K in $\mathfrak{X}_1$ und X_1, so ist $\mathfrak{X}_1 X_1$ eine Tangente der Umhüllungscurve. Die beiden Kegelschnitte R und $\mathfrak{K}$ schneiden sich in vier Punkten $\mu\nu o\pi$; die Linien $W_{12}\mu$ und $\mathfrak{W}_{12}\mu$ schneiden K in $\mathfrak{M}_1$ und M_1, dann ist $\mathfrak{M}_1 M_1$ eine Tangente und geht durch Π. Auch so folgt, dass die Umhüllungscurve C von der vierten Classe ist.

Fällt Π auf C, so fallen zwei von den vier Tangenten, die sich von Π an C ziehen lassen, mit der Tangente in Π an C zusammen; es müssen also auch von den vier Schnittpunkten der Kegelschnitte R und $\mathfrak{K}$ zwei zusammenfallen oder diese Kegelschnitte müssen sich berühren. — Allen Punkten $\Pi\ldots$ einer Geraden g entsprechen Kegelschnitte $\mathfrak{K}\ldots$ eines Büschels. Denn sind G und G' die Schnittpunkte von g mit K, Γ und Γ' die Schnitt-

punkte von $\mathfrak{W}_{12}G'$ mit $W_{12}G$ und $\mathfrak{W}_{12}G$ mit $W_{12}G'$, so müssen alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}\ldots$, welche Punkten $\Pi\ldots$ von g zugeordnet sind, durch Γ und Γ' gehen; also bilden alle diese Kegelschnitte $\mathfrak{K}\ldots$ ein Büschel mit den vier Grundpunkten $\mathfrak{W}_{12}\,W_{12}\,\Gamma\,\Gamma'$. Von ihnen berühren sechs den Kegelschnitt R, und zwar in den Punkten, in denen die Tripelcurve (vergl. Schroeter, Steiner's Vorlesungen) in Bezug auf R und irgend zwei Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ des Büschels den Kegelschnitt R schneidet. Daher muss die Gerade g die Curve C in sechs Punkten schneiden und:

„C ist von der sechsten Ordnung.“

Jeden Punkt Π auf K kann man sowohl zu der Involution $A_1\,A_2\,B_1\,B_2\ldots$, als auch zur Involution $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2\ldots$ rechnen. Zählt man ihn zur ersten und bezeichnet ihn demgemäss mit P_1, so sind, wenn $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2$ das ihm entsprechende Punktpaar ist, $P_1\mathfrak{P}_1$ und $P_1\mathfrak{P}_2$ Tangenten von P_1 oder Π an C. Zählt man ihn dagegen zur zweiten Involution, wobei er mit $\mathfrak{Q}_1$ bezeichnet werden mag, und sind $Q_1\,Q_2$ die beiden ihm in der andern Involution entsprechenden Punkte, so sind $\mathfrak{Q}_1\,Q_1$ und $\mathfrak{Q}_1\,Q_2$ die zwei anderen Tangenten von Π oder $\mathfrak{Q}_1$ an C. Von jedem Punkte von K lassen sich daher vier Tangenten an C ziehen; nur von den vier Verzweigungspunkten $V_1\,V_2\,\mathfrak{V}_1\,\mathfrak{V}_2$ nicht, weil z. B. auf $V_1\,\mathfrak{V}_{12}$ zwei Tangenten zusammenfallen, also müssen diese vier Punkte zugleich auf C liegen.

Nehmen wir zwei entsprechende Punkte A_1 und $\mathfrak{A}_1$ als Scheitel zweier involutorischen projectivischen Strahlenbüschel, indem wir A_1 mit $\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\ldots$ und $\mathfrak{A}_1$ mit $A_1\,A_2\ldots$ verbinden, so erzeugen dieselben eine Curve dritter Ordnung $\mathfrak{C}^{(3)}$ mit einem Doppelpunkte. Dieser ist nämlich der Schnittpunkt von $A_1\,\mathfrak{W}_{12}$ mit $\mathfrak{A}_1\,W_{12}$. Ist $\mathfrak{B}_1$ der dem $\mathfrak{A}_1$ unendlich nahe Punkt und ziehen wir $A_1\,\mathfrak{B}_1$, welche Linie $\mathfrak{C}^{(3)}$ in Q treffen mag, so trifft $\mathfrak{A}_1\,Q$ den Kegelschnitt K in B_1, welcher Punkt unendlich nahe an A_1 liegt und dem Punkte $\mathfrak{B}_1$ entspricht. Der Schnittpunkt der Tangenten $A_1\,\mathfrak{A}_1$ und $B_1\,\mathfrak{B}_1$ wird der Berührungspunkt P auf $A_1\,\mathfrak{A}_1$ sein, wenn diese Tangenten in eine zusammenfallen. Dann sind die vier Punkte $A_1\,\mathfrak{A}_1\,P\,Q$ vier harmonische Punkte. Nennen wir noch die Curve $\mathfrak{C}^{(3)}$ die Reductionscurve des Punktpaares $A_1\,\mathfrak{A}_1$, so können wir folgern:

„Der Berührungspunkt einer Tangente $A_1\,\mathfrak{A}_1$ ist zu ihren Schnittpunkten A_1 und $\mathfrak{A}_1$ mit K und ihrem Schnittpunkt mit der zu $A_1\,\mathfrak{A}_1$ gehörigen Reductionscurve $\mathfrak{C}^{(3)}$ der vierte harmonische, dem letzteren zugeordnete Punkt.“

Die Tangenten in den vier Doppelpunkten $DEFG$ der beiden projectivischen Punktinvolutionen auf K sind gleichzeitig Tangenten der Curve C. Die Reductionscurve $\mathfrak{C}^{(3)}$ des Punktpaares $D_1\,\mathfrak{D}_1$, welches in D vereinigt ist, ist der Punkt D selbst, daher muss die Tangente in D an K in diesem Punkte auch die Curve C berühren. Da dasselbe von den Punkten EFG gilt, so können wir folgern:

„Die Curve C berührt den Kegelschnitt K in den vier Doppelpunkten $DEFG$."

Die Linie $\mathfrak{W}_{12} W_{12}$, welche die beiden einander entsprechenden Doppelpunkte der projectivischen Punktinvolutionen verbindet, muss als Doppeltangente der Curve C angesehen werden, weil in ihr zwei einfache Tangenten zusammenfallen. Es lässt sich dies aber auch direct dadurch zeigen, dass nachgewiesen wird, dass sich von jedem Punkte der Linie $\mathfrak{W}_{12} W_{12}$ nur noch zwei Tangenten an C ziehen lassen. Wir fanden nämlich, dass jedem Punkte Π ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ entspricht, welcher den Kegelschnitt R, die Reductionscurve des Punktpaares $\mathfrak{W}_{12} W_{12}$, in vier solchen Punkten $\mu\nu o\pi$ schneidet, dass, wenn man einen von ihnen, etwa μ, mit $\mathfrak{W}_{12}$ und W_{12} verbindet, die Verbindungslinien K noch in zwei solchen Punkten M_1 und $\mathfrak{M}_1$ schneiden, dass die Gerade $M_1 \mathfrak{M}_1$ eine Tangente an C durch Π ist. Liegt Π auf $\mathfrak{W}_{12} W_{12}$, so reducirt sich der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ auf eine Gerade p, die Polare von Π bezüglich K. Da diese R nur in zwei Punkten schneidet, so lassen sich von Π auch nur noch zwei Tangenten an C ziehen. Wenn aber Π auf der Doppeltangente sich bewegt, so dreht sich seine Polare um den Pol von $\mathfrak{W}_{12} W_{12}$ bezüglich K. Von allen diesen Polaren berühren nur zwei den Kegelschnitt R, also kann die Doppeltangente die Curve C auch nur in zwei Punkten schneiden und muss sie daher in zwei anderen berühren. Auch diese Berührungspunkte lassen sich leicht construiren. Denn schneidet die Doppeltangente die Reductionscurve R des Punktpaares $\mathfrak{W}_{12} W_{12}$ in P und P' und sind Q und Q' die Punkte, welche jene von $\mathfrak{W}_{12}$ und W_{12} harmonisch trennen, so sind Q und Q' die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente mit C.

Zunächst ist zu untersuchen, ob die Curve C noch andere Doppeltangenten hat. Giebt es noch andere, so muss jede derselben K in zwei solchen Punkten schneiden, dass, wenn in dem einen R_1 und $\mathfrak{S}_1$ liegen, in dem andern die entsprechenden Punkte $\mathfrak{R}_1$ und S_1 liegen müssen. Der Kegelschnitt R war gefunden als Erzeugniss der projectivischen Strahleninvolutionen $\mathfrak{W}_{12}$ $(A_1\, A_2\, B_1\, B_2 \ldots)$ und W_{12} $(\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2 \ldots)$. Gäbe es nun zwei solche Punkte $(R_1 \mathfrak{S}_1)$ und $(\mathfrak{R}_1 S_1)$, so müssten die Schnittpunkte ϱ und σ von $W_{12} R_1$ und $\mathfrak{W}_{12} \mathfrak{R}_1$, $W_{12} \mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{W}_{12} S_1$ auf R liegen. Ist P der Schnittpunkt von $W_{12} \mathfrak{W}_{12}$ mit $R_1 \mathfrak{R}_1$, so ist $\varrho\sigma$ die Polare von P in Bezug auf K und muss durch den Pol Q von $W_{12} \mathfrak{W}_{12}$ bezüglich K gehen, also müssen die Punkte ϱ und σ auf einer Geraden durch Q liegen. Zieht man nun durch Q beliebige Gerade, welche R in $\varrho_1 \sigma_1$, $\varrho_2 \sigma_2 \ldots$ treffen, so schneiden die Verbindungslinien $\mathfrak{W}_{12} \varrho_1$ und $\mathfrak{W}_{12} \sigma_1$, $\mathfrak{W}_{12} \varrho_2$ und $\mathfrak{W}_{12} \sigma_2 \ldots$ auf $\mathfrak{K}$ solche Sehnen aus, welche einen Kegelschnitt $\mathfrak{W}$ umhüllen. Verbindet man W_{12} mit jenen Punkten, so schneiden die Geraden $W_{12} \varrho_1$ und $W_{12} \sigma_1 \ldots$ auf K gleichfalls Sehnen aus, welche einen andern Kegelschnitt W umhüllen, und eine Doppeltangente muss beide Kegelschnitte berühren.

Im Vorigen fanden wir, dass die Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ ... und $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ ... zwei projectivische Strahlenbüschel bilden, deren Scheitel P und $\mathfrak{P}$ waren. Der von jenen erzeugte Kegelschnitt k dient dazu, zu einem beliebigen Punkte X_1 von K die entsprechenden Punkte $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$ zu construiren. Denn schneidet $P X_1$ den Kegelschnitt k in ξ, so trifft $\mathfrak{P} \xi$ den Kegelschnitt K in $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$. Entspricht nun dem Punkte $R_1 \mathfrak{S}_1$ der Punkt $\mathfrak{R}_1 S_1$, so müssen sich $P R_1$ und $\mathfrak{P} \mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{P} \mathfrak{S}_1$ und $P S_1$ in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ auf k schneiden. Ist ferner T der Schnittpunkt von $\mathfrak{P} P$ und $\mathfrak{R} \mathfrak{S}$, so ist $R_1 \mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{S}_1 S_1$ die Polare von T bezüglich k und muss also durch den Pol U von $P \mathfrak{P}$ in Bezug auf k gehen. Daraus folgt, dass die Doppeltangenten von C sich in U schneiden. Da sie auch gemeinschaftliche Tangenten der Kegelschnitte W und $\mathfrak{W}$ sind, so folgt, dass es nur noch zwei Doppeltangenten geben kann und dass die beiden Kegelschnitte W und $\mathfrak{W}$ nur zwei gemeinschaftliche Tangenten haben können. Sie müssen sich also doppelt berühren. — Die beiden Berührungspunkte einer solchen Doppeltangente $(\mathfrak{R}_1 S_1)(R_1 \mathfrak{S}_1)$ lassen sich nach dem Obigen leicht finden. Man construirt die Schnittpunkte dieser Doppeltangente mit den Reductionscurven der Punktpaare $(R_1 \mathfrak{R}_1)$ oder $(S_1 \mathfrak{S}_1)$ und dann diejenigen Punkte, welche jene von R_1 und $\mathfrak{R}_1$ harmonisch trennen.

Da die Doppeltangenten durch U gehen müssen, so lässt sich auch auf folgende Art leicht erkennen, dass es ausser $W_{12} \mathfrak{W}_{12}$ nur noch zwei Doppeltangenten geben kann. Es ist nämlich die Gerade $R_1 T$ die Polare von $\mathfrak{R}_1$ bezüglich k und daher werden R_1 und $\mathfrak{R}_1$ durch k harmonisch getrennt. Durch den Punkt U lassen sich aber nur zwei solche Strahlen ziehen, dass ihre Schnittpunkte mit K durch die Schnittpunkte mit k harmonisch getrennt werden. Es giebt also durch U zwei Doppeltangenten.

Das gefundene Resultat ist also:

„Die Verbindungslinien entsprechender Punktpaare zweier projectivischen Punktinvolutionen auf einem Kegelschnitt K umhüllen, wenn zwei Doppelpunkte entsprechende Punkte sind, eine Curve vierter Classe sechster Ordnung, welche K viermal schneidet, viermal berührt und drei Doppeltangenten hat."

III.

Die eben erhaltene Curve lässt sich auch noch auf andere Art herstellen. Auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ ist eine Punktreihe $ABC \ldots X$ in projectivischer Beziehung zu einer Punktinvolution $A_1 A_2\, B_1 B_2\, C_1 C_2 \ldots X_1 X_2$ auf einem Kegelschnitt K. Die Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ ... schneiden sich in einem Punkte Π und wenn P ein ganz beliebiger Punkt ist, so ist das in Π entstandene Strahlenbüschel in projectivischer Beziehung mit dem Büschel $P(ABC \ldots X)$. Beide Büschel erzeugen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, der durch P und Π geht und K in vier Punkten $T_1 U_1 V_1 W_1$ schneidet. Die Linien PT_1, PU_1, PV_1, PW_1 sind Tangenten an die Curve C, welche von den Ver-

bindungslinien entsprechender Punkte der beiden projectivischen Punktreihen umhüllt wird, denn sie schneiden 𝔊 in den Punkten $TUVW$, welche den Punkten $T_1 U_1 V_1 W_1$ projectivisch entsprechen. Daher ist C von der vierten Classe.

Der Kegelschnitt 𝔎 schneidet 𝔊 in zwei Punkten Q und S; die Linien ΠQ und ΠS schneiden K in $Q_1 Q_2$ und $S_1 S_2$ und sind also zwei Doppeltangenten von C. — Rückt man mit dem beliebig gewählten P in die Gerade 𝔊, so geht der Kegelschnitt 𝔎 in ein Linienpaar über, dessen einer Theil 𝔊 ist, während der andere durch Π geht und K in zwei Punkten schneidet, nach denen zwei Tangenten von P an C gerichtet sind. Da sich also von jedem Punkte P der Geraden 𝔊 nur zwei Tangenten an C ziehen lassen, so ist 𝔊 eine Doppeltangente. Dies lässt sich auch daraus erkennen, dass wir die beiden Schnittpunkte von 𝔊 und K mit E_1 und F_1 bezeichnen und demgemäss zu K rechnen, die ihnen auf 𝔊 entsprechenden E und F mit ihnen durch zwei Gerade EE_1 und FF_1 verbunden denken; dann ist sowohl EE_1 als FF_1 eine Tangente von C und da beide in die Gerade 𝔊 zusammenfallen, so ist 𝔊 eine Doppeltangente. — Die Curve C hat also drei Doppeltangenten und kann nicht mehr haben, denn ausser 𝔊 muss jede Doppeltangente eine Gerade sein, welche 𝔊 und K in einem Punkte und dem ihm entsprechenden Punktpaare der Involution schneidet. Sie muss also durch Π gehen und durch Π giebt es nur zwei solche Gerade. — Um die Eigenschaften der Doppeltangenten zu erkennen, wähle man auf der einen, ΠQ, einen beliebigen Punkt P, dann ist der Strahlenbüschel $P(ABC\ldots X)$ in projectivischer Beziehung mit dem Strahlenbüschel $\Pi(abc\ldots x)$, wenn mit $abc\ldots x$ die Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2 \ldots X_1 X_2$ bezeichnet werden. Beide Büschel haben aber perspectivische Lage und der Durchschnitt entsprechender Strahlen ist daher eine Gerade, welche K in den beiden Punkten schneidet, deren Verbindungslinien mit P die einzig möglichen Tangenten von P an die Curve C sind.

Liegt der Punkt P auf K, so erzeugen die projectivischen Büschel $P(ABC\ldots X)$ und $\Pi(abc\ldots x)$ einen Kegelschnitt 𝔎, welcher K ausser in P noch in drei Punkten $T_1 U_1 V_1$ schneidet, und es sind PT_1, PU_1, PV_1 drei Tangenten von P an C. Die vierte erhält man, wenn man in P an 𝔎 eine Tangente zieht. Denn bezeichnet man P als zur Involution gehörig mit W_1, so trifft ΠW_1 den K noch in W_2; der Strahl PW entspricht aber dem Strahl ΠW_2 projectivisch, und daher trifft die Tangente in P oder W_1 an 𝔎 die Gerade 𝔊 in dem Punkte W, welcher dem Punkte W_1 der Involution entspricht. — Wir fanden, dass sich von jedem Punkte P der Geraden 𝔊 nur zwei Tangenten an C ziehen lassen, die beiden Geraden nämlich, welche P mit seinen entsprechenden Punkten $P_1 P_2$ der Involution verbindet. Nur zwei Punkte machen hiervon eine Ausnahme: die Verzweigungspunkte V und W, welche den Doppelpunkten V_{12} und W_{12} entsprechen. Von jedem derselben lässt sich nur eine Tangente an C ziehen: die Gerade VV_{12} und WW_{12}; also

liegen V und W auf der Curve C. Die Curve C berührt daher die Doppeltangente 𝔖 in zwei Punkten und schneidet sie in zwei anderen, ist also von der sechsten Ordnung. Dies letzte Resultat soll jedoch noch auf anderem Wege abgeleitet werden.

Wenn P sich auf einer Geraden l bewegt, so lassen sich stets vier Tangenten an C ziehen; sobald aber P ein Schnittpunkt von l mit C ist, müssen zwei von diesen Tangenten in die Tangente des Punktes an C zusammenfallen. Die Tangenten von einem beliebigen Punkte werden aber gefunden, indem man die Durchschnittspunkte des Kegelschnitts K mit 𝔎, welcher durch die projectivischen Strahlenbüschel $P(ABC\ldots X)$ und $\Pi(abc\ldots x)$ erzeugt wird, mit P verbindet. Jedem Punkte P von l entspricht ein Kegelschnitt 𝔎. Alle diese Kegelschnitte 𝔎 haben den Punkt Π und die beiden Punkte Q und S, in denen die durch Π gehenden Doppeltangenten die Gerade 𝔖 schneiden, gemeinschaftlich. Schneidet l die Gerade 𝔖 in Z und sind $Z_1 Z_2$ die entsprechenden Punkte, so entspricht der Geraden l, als Strahl des Büschels $P(ABC\ldots X)$ aufgefasst, die Gerade $Z_1 Z_2$ oder z, wenn man sie zum Büschel Π rechnet. Es müssen daher alle Kegelschnitte 𝔎 durch den Schnittpunkt 𝔷 von l mit z gehen, weil l in allen Büscheln $P(ABC\ldots X)$ bei der Veränderung von P auf l stets dem Strahl z projectivisch entspricht. Die Kegelschnitte 𝔎 bilden also ein Büschel mit den Grundpunkten ΠQS𝔷. Jedem Punkte P entspricht ein Kegelschnitt 𝔎. So oft P auf C liegt, muss der entsprechende Kegelschnitt 𝔎 den K berühren, weil sich dann nur drei Tangenten durch P an die Curve C legen lassen, und umgekehrt, so oft einer der Kegelschnitte 𝔎 den Kegelschnitt K berührt, so oft schneidet l die Curve C. Unter den Kegelschnitten 𝔎 giebt es aber sechs, welche K berühren, daher schneidet l die C in sechs Punkten und es ist also C von der sechsten Ordnung.

Um den Berührungspunkt auf einer Tangente XX_1 zu finden, denken wir uns auf K einen dem X_1 unendlich nahen Punkt X'_1. Der ihm entsprechende X' auf 𝔖 liegt dem Punkte X unendlich nahe und der Schnittpunkt dieser unendlich benachbarten Tangenten ist der Berührungspunkt auf XX_1. Das Büschel $\Pi(abc\ldots x)$ schneidet die Tangente t in X_1 an K in einer zu $ABC\ .\ X$ projectivischen Punktreihe. Der auf t dem X_1 unendlich nahe liegende Punkt hat einen ihm projectivisch entsprechenden auf 𝔖, welcher dem Punkte X unendlich benachbart ist. Bezeichnen wir beide Punkte mit X'_1 und X', so sind X'_1X und X'_1X' zwei unendlich benachbarte Tangenten des Kegelschnitts k, welcher die Verbindungslinien entsprechender Punkte der projectivischen Punktreihen auf 𝔖 und t umhüllt. Wir fassen X_1 und X'_1 als diejenigen unendlich nahen Punkte von K auf, in denen K von t geschnitten wird. Dann ist der Schnittpunkt von X_1X und X'_1X' der Berührungspunkt von X_1X sowohl mit dem Kegelschnitt k, als auch mit der Curve C. Demnach lassen sich die Berührungspunkte auf den Tangenten von C construiren. Aus dem Obigen ergiebt sich unmittelbar die Construc-

tion der beiden Berührungspunkte auf der Doppeltangente $\mathfrak{G}$. Werden die Schnittpunkte derselben mit E_1 und F_1 bezeichnet und zu der Punktinvolution auf K gerechnet, so sind die ihnen projectivisch auf $\mathfrak{G}$ entsprechenden Punkte E und F die Berührungspunkte von $\mathfrak{G}$ mit C.

Es kann der Fall eintreten, dass die Tangente X_1X in X_1 den Kegelschnitt K berührt. Dann muss X_1 zugleich der Berührungspunkt von C mit X_1X, also auch mit K sein. Um die Zahl der Punkte zu bestimmen, in denen C und K sich berühren, denken wir uns die Polaren $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x}$ von $ABC\ldots X$ auf $\mathfrak{G}$ in Bezug auf K. Dieselben schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{P}$, dem Pol von $\mathfrak{G}$ bezüglich K. Das von ihnen gebildete Strahlenbüschel $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ldots\mathfrak{x})$ ist in projectivischer Beziehung mit dem Büschel $\Pi(abc\ldots x)$ und erzeugt also mit diesem einen Kegelschnitt, welcher K in vier Punkten $T_1^0U_1^0V_1^0W_1^0$ schneidet. Der Strahl $\mathfrak{P}T_1^0$ schneide $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{T}^0$, dann ist $\mathfrak{P}\mathfrak{T}^0$ die Polare eines Punktes T^0 von $\mathfrak{G}$ und T^0 der dem Punkte T_1^0 entsprechende Punkt. Da die Polare $\mathfrak{P}T_1^0$ von T^0 durch T_1^0 geht, so muss die Polare von T_1^0, d. i. die Tangente in T_1^0 an K, durch T^0 gehen. Also ist die Linie $T_0T_1^0$ zugleich Tangente in T_1^0 an K und an C und T_1^0 einer der vier Berührungspunkte von C und K.

„C berührt also K in vier Punkten.“

Ist P ein beliebiger Punkt, so kann man die vier von ihm an die Curve C auch noch auf folgende Art finden. Wir verbinden P mit $ABC\ldots X$ und einen beliebigen Punkt Q_1 auf K mit $A_1A_2B_1B_2C_1C_2\ldots X_1X_2$, so erhalten wir die in projectivischer Beziehung stehenden Büschel $P(ABC\ldots X)$ und $Q_1(A_1A_2B_1B_2C_1C_2\ldots X_1X_2)$, welche eine Curve $C^{(3)}$ der dritten Ordnung mit dem Doppelpunkte Q_1 erzeugen. Diese schneidet K ausser in Q_1 in vier Punkten, deren Verbindungslinien mit P die gesuchten vier Tangenten durch P sind. Sie schneidet aber auch $\mathfrak{G}$ in drei Punkten $U'V'W'$ und es sind Q_1U', Q_1V', Q_1W' drei Tangenten von Q_1 an C; die vierte ist die Verbindungslinie von Q_1 mit dem ihm auf $\mathfrak{G}$ projectivisch entsprechenden Punkte Q. — Wenn P sich auf einer Geraden l ändert, so entspricht jedem Punkte P eine andere Curve $C^{(3)}$. Alle diese Curven gehen durch die drei festen Punkte $U'V'W'$ und haben Q_1 zum Doppelpunkt. Die Gerade l schneide $\mathfrak{G}$ in Z; die dem Punkte Z auf K entsprechenden Punkte sind Z_1Z_2, dann müssen alle $C^{(3)}$ durch die Schnittpunkte $\sigma\varrho$ von l mit Q_1Z_1 und Q_1Z_2 gehen. Wir erhalten somit ein Büschel von Curven dritter Ordnung, die sämmtlich durch die fünf festen Punkte $U'V'W'\sigma\varrho$ gehen und Q_1 zum Doppelpunkt haben. So oft eine von ihnen K berührt, so oft schneidet l die Curve C. Da aber, wie vorher bewiesen, l und C sich in sechs Punkten schneiden, so können wir folgern:

„Von allen Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, welche fünf gemeinschaftliche Punkte und einen gemeinschaftlichen Doppelpunkt haben, berühren sechs einen durch den Doppelpunkt gehenden



Kegelschnitt, vorausgesetzt, dass drei von den gemeinschaftlichen Punkten in einer Geraden liegen."

Setzen wir jetzt fest, dass P ein fester Punkt ist, während Q_1 sich auf K ändert, so entspricht jedem Punkte Q_1 eine Curve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkte Q_1. Alle diese Curven dritter Ordnung haben ebenfalls fünf gemeinschaftliche Punkte, nämlich P und die vier Punkte $L_1 M_1 N_1 O_1$ auf K, nach denen die vier Tangenten von P an C gezogen werden können. Sie berühren ausserdem die beiden Geraden PV und PW, wenn V und W die den Doppelpunkten V_{12} und W_{12} von K projectivisch entsprechenden Punkte auf 𝔊 sind. So oft eine von diesen Curven die Gerade 𝔊 berührt, so oft müssen K und C sich schneiden, und umgekehrt. K und C berühren sich in vier Punkten und können sich daher nur noch in vier Punkten schneiden, da C von der sechsten Ordnung ist; also berühren auch nur vier jener Curven die Gerade 𝔊. Daher können wir schliessen:

„Von allen Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, welche fünf gemeinschaftliche Punkte haben und zwei durch einen dieser Punkte gehende Gerade berühren, berühren vier eine beliebige Gerade, vorausgesetzt, dass der Doppelpunkt einer jeden auf einem Kegelschnitt liegt, der durch die anderen vier gemeinschaftlichen Punkte geht."

IV.

Auf einer Geraden 𝔊 sei eine Punktinvolution in projectivischer Beziehung zu einer Punktreihe auf einem Kegelschnitt K. Die Involution sei $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 \dots X_1 X_2$ und die Punktreihe $ABC \dots X$. Die Geraden AA_1, AA_2, BB_1, $BB_2 \dots$ umhüllen eine Curve C, deren Classe zunächst wieder bestimmt werden soll. Dazu nehmen wir einen beliebigen Punkt P_1 und suchen die Anzahl der Tangenten von P_1 an die Umhüllungscurve zu bestimmen. Ist P ein beliebiger Punkt von K, so ist das Strahlenbüschel $P(ABC \dots X)$ in projectivischer Beziehung mit der Involution $Q_1(A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 \dots X_1 X_2)$. Beide Büschel erzeugen eine Curve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkte Q_1, welche durch P geht und daher K nur noch in fünf Punkten schneidet, deren Verbindungslinien mit Q_1 die Tangenten liefern, welche sich von Q_1 an die Umhüllungscurve ziehen lassen. Dieselbe ist also von der fünften Classe.

Sind E und F die Schnittpunkte von 𝔊 mit K, so entsprechen ihnen, wenn wir sie zu K rechnen, auf 𝔊 die vier Punkte $E_1 E_2$ und $F_1 F_2$; es fallen also mit 𝔊 vier Tangenten zusammen EE_1, EE_2, FF_1, FF_2 und es ist 𝔊 also eine vierfache Tangente der Umhüllungscurve. Eine Doppeltangente kann dieselbe nicht haben, denn es giebt ausser 𝔊 keine Gerade, welche durch ein Punktpaar der Involution und den ihm entsprechenden Punkt auf K geht.

Um den Berührungspunkt einer Tangente XX_1 mit der Curve C zu finden, projicire man die Punktreihe $ABC \dots X$ von K aus einem beliebigen

Punkte P von K auf die Gerade XX_1. Man erhält dann auf dieser eine Punktreihe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots\mathfrak{X}$, die mit der Involution auf $\mathfrak{G}$ in projectivischer Beziehung sich befindet. Der Punkt $\mathfrak{X}$ fällt mit X zusammen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte der Punktreihen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ . . und $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 \ldots$ umhüllen eine Curve dritter Ordnung, welche $\mathfrak{G}$ zur Doppeltangente hat und die Gerade $X_1 X$ oder $X_1 \mathfrak{X}$ in demselben Punkte berührt, in welchem sie von der Curve C berührt wird. Um diesen zu construiren, verbinde man $\mathfrak{X}$ mit den Punktpaaren der Involution auf $\mathfrak{G}$ und erhält dadurch in $\mathfrak{X}$ eine Strahleninvolution, welche zu dem Strahlenbüschel $X_1(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots)$ in projectivischer Beziehung steht. Da der gemeinschaftliche Strahl sich selbst entspricht, so erzeugen die beiden Büschel einen Kegelschnitt, welcher durch $\mathfrak{X}$ geht und die Gerade $\mathfrak{X}X_1$ noch in einem Punkte $\mathfrak{X}'$ schneidet. Construirt man den Punkt X'_1, welcher $\mathfrak{X}'$ von $\mathfrak{X}X_1$ harmonisch trennt, so ist es der Berührungspunkt von XX_1 mit der Curve C.

Ist $\mathfrak{P}$ der Pol von $\mathfrak{G}$ bezüglich K und sind $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 \ldots$ die Polaren von $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 \ldots$ bezüglich K, so ist die Involution $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 \ldots)$ in projectivischer Beziehung zu dem Büschel $P(ABC\ldots X)$. Beide Büschel erzeugen eine Curve dritter Ordnung mit dem Doppelpunkte $\mathfrak{P}$, welche auch durch P geht und K noch in fünf Punkten schneidet. In ihnen wird K von der Curve C berührt. — Wenn P den Kegelschnitt K durchläuft, so erzeugt das Büschel $P(ABC\ldots X)$ mit der Strahleninvolution $\mathfrak{P}(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots)$ immer andere Curven dritter Ordnung, die alle $\mathfrak{P}$ zum Doppelpunkt haben und K in den fünf Punkten schneiden, in denen K von C berührt wird. Jede dieser Curven schneidet $\mathfrak{G}$ in drei Punkten, deren Verbindungslinien mit P drei Tangenten von P an C geben. Die anderen beiden sind PP_1 und PP_2, wenn P_1 und P_2 die dem Punkte P von K projectivisch entsprechenden Punkte auf $\mathfrak{G}$ sind. Die Curven dritter Ordnung bilden ein Büschel und schneiden $\mathfrak{G}$ in den Punktgruppen einer cubischen Involution. Jeder Gruppe entspricht ein Punkt P auf K, dessen Verbindungslinien mit den Punkten der Gruppe drei Tangenten von P an C liefern. Fallen zwei Punkte einer Gruppe zusammen, so lassen sich von dem entsprechenden Punkte P ausser nach den ihm projectivisch entsprechenden Punkten P_1 und P_2 nur noch zwei Tangenten an C ziehen. Der Punkt P liegt also auf C. Daher schneidet K die Umhüllungscurve C noch in soviel Punkten, als die cubische Involution Doppelpunkte hat, also in vier Punkten. Ausser diesen Punkten giebt es aber noch zwei auf K, durch welche C geht, nämlich die Verzweigungspunkte V und W, welche den Doppelpunkten V_{12} und W_{12} der quadratischen Involution auf $\mathfrak{G}$ projectivisch entsprechen. Somit folgt als Resultat, dass die Umhüllungscurve C den Kegelschnitt K in fünf Punkten berührt und in sechs anderen schneidet, also 16 Punkte mit ihm gemeinschaftlich hat. Schon hieraus könnte geschlossen werden, dass C von der achten Ordnung ist; doch soll dieses noch besonders bewiesen werden.

Die Gerade l verbinde zwei entsprechende Punkte Q und Q_1 von K und $\mathfrak{G}$ und schneide K noch in P. Ist dann Π irgend ein Punkt von l, so erzeugen die beiden Büschel $\Pi(A_1 A_2 B_1 B_2 \ldots X_1 X_2)$ und $P(ABC \ldots X)$, weil sie in reducirter Lage sind, einen Kegelschnitt k, welcher durch Π geht, $\mathfrak{G}$ in zwei Punkten μ und ν schneidet und ausserdem die Geraden PV und PW berührt. Aendert sich nun Π, so entstehen immer neue Kegelschnitte k, die alle PV und PW berühren und durch μ und ν gehen; denn $P\mu$ und $P\nu$ sind zwei von P aus an C zu legende Tangenten. Die Berührungspunkte von k mit den Tangenten PV und PW seien β und γ. Bei der Veränderung von k beschreiben β und γ zwei projectivische Punktreihen, weil die Geraden ΠV_{12} und ΠW_{12} jene Tangenten PV und PW in den Punkten β und γ schneiden. Wenn Π nach P rückt, so geht der Kegelschnitt k in das Linienpaar $P\mu$, $P\nu$ über und P ist ein sich selbst entsprechender Punkt beider Punktreihen $\beta\ldots$ und $\gamma\ldots$. Diese sind also in perspectivischer Lage und alle Linien $\beta\gamma$ schneiden sich in einem Punkte. Alle Kegelschnitte, welche zwei feste Gerade berühren und durch zwei feste Punkte gehen, theilen sich in zwei Schaaren, die sich dadurch unterscheiden, dass die Verbindungslinien der Berührungspunkte eines jeden Kegelschnittes mit den beiden festen Tangenten durch einen von zwei festen Punkten gehen. Von beiden Schaaren haben wir es in unserem Falle also nur mit einer zu thun. So oft ein Kegelschnitt derselben den Kegelschnitt K berührt, so oft schneidet l die Curve C. Die Anzahl der Schnittpunkte lässt sich aber auf folgende Art ermitteln. Es sei $\mathfrak{K}$ ein beliebiger Kegelschnitt und π die Polare von Π bezüglich desselben. Die Pole von π bezüglich aller Kegelschnitte k liegen auf einem Kegelschnitte durch P, welcher π in zwei Punkten Π' und Π'_1 schneidet. Jedem Punkte Π entsprechen also zwei Punkte Π'. Die Polaren von Π' bezüglich der Kegelschnitte k umhüllen einen Kegelschnitt. Von diesen Polaren gehen also nur zwei durch den Pol von l bezüglich $\mathfrak{K}$; es sind die Polaren von zwei Punkten Π und Π_1 auf l bezüglich $\mathfrak{K}$. Jedem Punkte Π' entsprechen daher zwei Punkte Π; also bilden die Punkte Π und Π' zwei Punktreihen, die in zwei-zweigliedriger Beziehung stehen und vier Doppelpunkte haben. Da es auf jeder Geraden vier solcher Doppelpunkte giebt, so ist der Ort aller dieser Doppelpunkte eine Curve vierter Ordnung, welche $\mathfrak{K}$ in acht Punkten schneidet. In diesen wird $\mathfrak{K}$ von acht Kegelschnitten der Schaar $k\ldots$ berührt. — In unserem Falle geht $\mathfrak{K}$, d. i. K, durch P. Die Ortscurve vierter Ordnung berührt l in P und kann daher K nur noch in sechs Punkten schneiden. Es wird also K auch nur von sechs Kegelschnitten der Schaar $k\ldots$ berührt und daher schneidet l die Umhüllungscurve in sechs Punkten. Die Curve C ist daher, da sie mit l sechs Schnittpunkte und einen Berührungspunkt gemein hat, von der achten Ordnung.

Statt auf einer Tangente, soll Π sich auf einer beliebigen Geraden l bewegen. Die Büschel $\Pi(A_1 A_2 B_1 B_2 \ldots X_1 X_2)$ und $P(AB\ldots X)$ erzeugen

dann eine Reihe von Curven dritter Ordnung, die durch P gehen und die beiden Geraden PV und PW berühren, wenn V und W die Verzweigungspunkte der Punktreihe auf K sind. Ferner schneiden alle Curven dritter Ordnung die Gerade $\mathfrak{G}$ in drei festen Punkten $T_1\, U_1\, V_1$, deren Verbindungslinien mit P drei von den an C durch P zu ziehenden Tangenten sind. Bezeichnet man den Schnittpunkt von l und $\mathfrak{G}$ mit Z_1 und ist Z der dem Z_1 projectivisch entsprechende Punkt auf K, dann ist der Schnittpunkt ζ von l mit PZ ebenfalls ein den Curven dritter Ordnung gemeinschaftlicher Punkt. Dieselben bilden also eine Schaar von Curven dritter Ordnung, die durch fünf feste Punkte $PT_1\, U_1\, V_1\, \zeta$ gehen, zwei feste Gerade PV und PW, die sich in einem P der fünf Punkte schneiden, berühren und deren Doppelpunkte Π sämmtlich auf einer Geraden l durch einen andern, ζ, der fünf Punkte liegen. Die Berührungspunkte $\beta \ldots$ und $\gamma \ldots$ dieser Curven mit PV und PW sind die Schnittpunkte auf diesen Geraden mit ΠV_{12} und ΠW_{12} bei Veränderung von Π. Die dadurch in V_{12} und W_{12} entstehenden perspectivischen Strahlenbüschel werden von den Geraden ΠV und ΠW in projectivischen Punktreihen geschnitten, also umhüllen die Verbindungslinien $\beta\gamma, \ldots$ der Berührungspunkte einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. So oft eine der Curven dritter Ordnung den Kegelschnitt K berührt, so oft wird die Curve C von l geschnitten. Da dies nach dem Vorigen aber achtmal geschieht, so kann gefolgert werden:

„Von allen Curven dritter Ordnung, die durch fünf feste Punkte $PT_1\, U_1\, V_1\, \zeta$ gehen, zwei durch einen derselben, P, gehende Gerade so berühren, dass die Verbindungslinien der Berührungspunkte einen Kegelschnitt umhüllen, und deren Doppelpunkte auf einer Geraden l liegen, die durch einen der anderen gemeinschaftlichen Punkte, ζ, geht, berühren acht einen Kegelschnitt durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten."

V.

Auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ und einem Kegelschnitt K befinden sich die projectivischen Involutionen

$$\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{C}_1\, \mathfrak{C}_2 \ldots \mathfrak{V}_1\, \mathfrak{V}_2\, \mathfrak{V}_{12}\, \mathfrak{W}_{12}$$

und

$$A_1\, A_2\, B_1\, B_2\, C_1\, C_2 \ldots V_{12}\, V_1\, V_2\, W_{12},$$

so dass also zwei Doppelpunkte entsprechende Punkte sind. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen eine Curve C, deren Classe zunächst untersucht werden soll. Die Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2 \ldots$ schneiden sich in einem Punkte Π und bilden ein Strahlenbüschel $\Pi(abc\ldots)$, welches zu jeder der Involutionen in projectivischer Beziehung steht. Ist P ein beliebiger Punkt, so erzeugen die Büschel $P(\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2 \ldots)$ und $\Pi(abc\ldots)$ eine Curve dritter Ordnung, welche K in sechs Punkten schneidet. Daraus folgt, dass C von der sechsten Classe ist. Dieselbe Curve dritter Ordnung schneidet $\mathfrak{G}$ in drei Punkten $\mathfrak{Q}_1\, \mathfrak{R}_1\, \mathfrak{S}_1$ und es sind $\Pi\mathfrak{Q}_1$, $\Pi\mathfrak{R}_1$, $\Pi\mathfrak{S}_1$ drei Tangenten von C; sie müssen aber auch durch die entsprechenden Punkt-

paare $Q_1 Q_2$, $R_1 R_2$, $S_1 S_2$ gehen und sind daher drei Doppeltangenten der Curve C. Eine vierte Doppeltangente ist die Gerade $V_{12} W_{12}$ und $\mathfrak{G}$ ist eine vierfache Tangente.

„Die Curve C hat also eine vierfache Tangente und vier Doppeltangenten, von denen drei durch einen Punkt gehen.“

Um den Berührungspunkt auf einer Tangente $X_1 \mathfrak{X}_1$ zu finden, projicire man die Punktpaare der Involution auf K von einem Punkte dieses Kegelschnittes auf die Tangente $X_1 \mathfrak{X}_1$ und erhält auf derselben eine neue Involution $A'_1 A'_2 B'_1 B'_2 \ldots X'_1 X'_2$, welche mit $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$ auf $\mathfrak{G}$ in projectivischer Beziehung steht. Die Verbindungslinien entsprechender Punktpaare umhüllen eine Curve vierter Classe sechster Ordnung mit drei Doppeltangenten, und der Berührungspunkt derselben mit $X_1 \mathfrak{X}_1$ ist zugleich der Berührungspunkt dieser Tangente mit C. Um ihn zu bestimmen, construire man die Reductionscurve des Punktpaares $X_1 \mathfrak{X}_1$, indem man die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen der projectivischen Büschel $X_1 (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots)$ und $\mathfrak{X}_1 (A'_1 A'_2 B'_1 B'_2 \ldots)$ bestimmt. Diese Curve ist von der dritten Ordnung und schneidet $X_1 \mathfrak{X}_1$ in X_1 und $\mathfrak{X}_1$ und noch in einem dritten Punkte. Dann ist derjenige Punkt, der den letzten von X_1 und $\mathfrak{X}_1$ harmonisch trennt, der gesuchte Berührungspunkt.

Die Polaren $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots$ von $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$ bezüglich K schneiden sich im Pol $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$ und bilden in demselben ein involutorisches Strahlenbüschel $\mathfrak{P} (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 \ldots)$, welches zu dem Büschel $\Pi (ab \ldots)$ in projectivischer Beziehung steht und mit ihm eine Curve dritter Ordnung erzeugt. Diese schneidet K in sechs Punkten, in denen sich C und K berühren.

Um die Ordnung der Curve zu bestimmen, ist es am einfachsten, zu untersuchen, in wieviel Punkten eine der Doppeltangenten dieselbe schneidet. Wir wählen die Doppeltangente $\mathfrak{W}_{12} W_{12}$ und nennen P_1 ihren Schnittpunkt mit K. Ferner sei $\mathfrak{P}$ ein veränderlicher Punkt auf $\mathfrak{W}_{12} W_{12}$, dann erzeugen die projectivischen Involutionen $P_1 (A_1 A_2 B_1 B_2 \ldots)$ und $\mathfrak{P} (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots)$ Kegelschnitte, welche durch zwei feste Punkte von $\mathfrak{G}$ gehen, sie mögen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ heissen, und zwei feste Gerade berühren, nämlich $P_1 V_1$ und $P_1 V_2$. Von P_1 lassen sich an C vier Tangenten legen; zwei von ihnen sind die Verbindungslinien von P_1 mit den diesem Punkte projectivisch entsprechenden Punkten $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, die beiden anderen treffen $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, und durch diese beiden Punkte müssen alle durch die Büschel $P (A_1 A_2 B_1 B_2 \ldots)$ und $\mathfrak{P} (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots)$ bei der Aenderung von $\mathfrak{P}$ erzeugten Kegelschnitte gehen. Von allen diesen Kegelschnitten berühren nur sechs den Kegelschnitt K und daher kann $V_{12} W_{12}$ die Curve C auch nur in sechs Punkten schneiden. Rechnet man dazu die beiden doppelt zu zählenden Berührungspunkte, so folgt, dass die Curve C von der zehnten Ordnung ist. Sie berührt die Gerade $\mathfrak{G}$ in vier Punkten und schneidet sie ausserdem in $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$.

Die in III, IV und V erhaltenen Resultate lassen sich kurz zusammenfassen:

III. Wenn eine Punktinvolution auf einem Kegelschnitt K in projectivischer Beziehung zu einer Punktreihe auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ ist, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve vierter Classe sechster Ordnung, welche drei Doppeltangenten hat, zu denen auch die Gerade $\mathfrak{G}$ gehört, und den Kegelschnitt K in vier Punkten berührt.

IV. Wenn eine Punktinvolution auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ in projectivischer Beziehung zu einer Punktreihe auf einem Kegelschnitte K steht, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve fünfter Classe achter Ordnung, welche $\mathfrak{G}$ zu einer vierfachen Tangente hat, K in fünf Punkten berührt und in sechs anderen schneidet.

V. Wenn eine Punktinvolution auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ in projectivischer Beziehung zu einer Punktinvolution auf einem Kegelschnitte K steht und zwei Doppelpunkte entsprechende Punkte sind, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punktpaare eine Curve sechster Classe zehnter Ordnung, welche $\mathfrak{G}$ zu einer vierfachen Tangente und ausserdem vier Doppeltangenten hat, von denen drei durch einen Punkt gehen und die K in sechs Punkten berührt.

VI.

Auf einem Kegelschnitt K seien zwei projectivische Punktinvolutionen, doch sollen sich zwei Doppelpunkte nicht entsprechen. Dann umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve C. Es seien $A_1 A_2 B_1 B_2 \ldots V_1 V_2 W_1 W_2 V_{12} W_{12} \ldots$ und $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_{12} \mathfrak{W}_{12} \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{W}_1 \mathfrak{W}_2 \ldots$ die beiden Involutionen. Projicirt man dieselben aus den Punkten $\mathfrak{A}_1$ und A_1, so erhält man in ihnen zwei projectivische Strahleninvolutionen, in deren gemeinsamem Strahle zwei entsprechende Strahlen vereinigt liegen. Die Involutionsbüschel erzeugen daher eine Curve $C^{(3)}$ dritter Ordnung, die auch durch A_1 und $\mathfrak{A}_1$ geht. Verbindet man einen beliebigen Punkt X dieser Curve mit A_1 und $\mathfrak{A}_1$ und treffen $A_1 X$ und $\mathfrak{A}_1 X$ den Kegelschnitt K noch in $\mathfrak{X}_1$ und X_1, so sind $\mathfrak{X}_1$ und X_1 entsprechende Punkte der projectivischen Punktinvolutionen; jedem Punkte X von $C^{(3)}$ entspricht also eine Tangente $X_1 \mathfrak{X}_1$ der Umhüllungscurve C. Um die Zahl der Tangenten zu finden, die sich von irgend einem Punkte P an die Curve ziehen lassen, zieht man durch P einen veränderlichen Strahl, der K in den Punkten X' und X'' schneidet. Dann liegen die Schnittpunkte von $A_1 X'$ und $\mathfrak{A}_1 X''$, $A_1 X''$ und $\mathfrak{A}_1 X'$ mit den Punkten A_1 und $\mathfrak{A}_1$ auf einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$, so dass jedem Punkte $\mathfrak{X}$ dieses Kegelschnittes eine Gerade durch P entspricht. Verbindet man nämlich $\mathfrak{X}$ mit A_1 und $\mathfrak{A}_1$ und sind X' und X'' die Schnittpunkte dieser Linien mit K, so geht $X'X''$ durch P. Da sich die Curven $C^{(3)}$ und $\mathfrak{K}$ in A_1 und $\mathfrak{A}_1$ und ausserdem noch in vier Punkten schneiden, so kann gefolgert

werden, dass sich durch P vier Tangenten an die Umhüllungscurve C ziehen lassen. — Aendert sich P auf einer Geraden g, so bilden alle Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ ein Büschel. So viele von ihnen die Curve $C^{(3)}$ berühren, so oft schneidet g die Umhüllungscurve. Da die gerade Polare eines Berührungspunktes bezüglich $C^{(3)}$ mit der Polare desselben bezüglich des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, welcher $C^{(3)}$ in diesem Punkte berührt, zusammenfällt, so hat man nur den Ort der Punkte aufzusuchen, deren gerade Polaren bezüglich $C^{(3)}$ mit den Polaren der Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ zusammenfallen. Dieser Ort ist aber (vergl. Cremona, Einleitung in die Theorie der ebenen Curven) von der vierten Ordnung und hat in A_1 und $\mathfrak{A}_1$ zwei Doppelpunkte; er schneidet daher $C^{(3)}$ nur noch in acht Punkten. Daher ist die Umhüllungscurve von der achten Ordnung. Die übrigen Eigenschaften der Umhüllungscurve folgern sich so, wie in II. Dieselben lassen sich in folgenden Satz zusammenfassen:

„Die Verbindungslinien entsprechender Punktpaare zweier projectivischen Punktinvolutionen auf einem Kegelschnitt K umhüllen eine Curve vierter Classe achter Ordnung, welche K achtmal schneidet, viermal berührt und zwei Doppeltangenten hat.“

Kleinere Mittheilungen.

X. Das harmonische Hexaeder und das harmonische Octaeder.

(Hierzu Taf. III, Fig. 6 und 7.)

Bei der Benutzung homogener Tetraedercoordinaten treten Gruppen von acht Punkten und acht Ebenen auf, welche eine ähnliche Rolle spielen, wie die acht Punkte und acht Ebenen, deren Descartes'sche Coordinaten sich nur in den Vorzeichen, nicht aber in Bezug auf den numerischen Betrag unterscheiden. Es schien mir daher nicht unzweckmässig, diese Gruppen als besondere Figuren unter besonderen Namen zusammenzufassen und ihre nächstliegenden Eigenschaften zusammenzustellen. Dabei findet sich Veranlassung, die Raumfiguren hervorzuheben, welche die centralprojicirenden Geraden und Ebenen eines vollständigen Vierecks und Vierseits bilden; die erstere Figur kann als vollständige vierkantige Ecke, die letztere als vollständige vierseitige Ecke bezeichnet werden.

Eine vollständige vierkantige Ecke hat sechs Ebenen, die durch je zwei Kanten bestimmt werden; dieselben schneiden sich in den vier Kanten und noch ausserdem in drei neuen Kanten; die durch die letzteren bestimmte Ecke heisse die Diagonalecke. Auf jeder Ebene der Ecke finden sich dann zwei harmonische Strahlenpaare: die beiden auf ihr liegenden Kanten der Ecke sind das eine Paar, das andere wird von der auf ihr liegenden Kante der Diagonalecke und von dem Durchschnitt der Ebene mit der dieser Kante gegenüberliegenden Seite der Diagonalecke gebildet.

Eine vollständige vierseitige Ecke enthält sechs Kanten: die Durchschnitte von je zweien der vier Ebenen der Ecke. Durch je zwei dieser Kanten sind ausser den Seiten der Ecke noch drei neue Ebenen bestimmt; die von ihnen begrenzte Ecke heisse die Diagonalecke. Jede der sechs Kanten der Ecke ist Träger von zwei harmonischen Ebenenpaaren: das eine sind die beiden durch die Kanten gehenden Ebenen der Ecke; das andere wird gebildet von der durch die Kante gehenden Seite der Diagonalecke und von der Ebene, welche durch die dieser Seite gegenüberliegende Kante der Diagonalecke geht.

Die Figur (Taf. 3 Fig. 6), welche durch drei Ebenenpaare gebildet wird, deren Schnittlinien in einer Ebene liegen, heisse „harmonisches Hexader".

Die Ebene sei A_4, die drei Schnittgeraden $C_1\ C_2\ C_3$, das Ebenenpaar durch C_i sei $N'_i\ N''_i$. Da $C_1 C_2 C_3$ auf einer Ebene liegen, so können die Polynomien N_i in solcher Form vorausgesetzt werden, dass sie die Identitäten erfüllen:

Die Figur (Taf. 3 Fig. 7), welche durch drei Punktpaare gebildet wird, deren drei Verbindungsgeraden durch einen Punkt gehen, heisse „harmonisches Octaeder".

Der Punkt sei A_4, die drei Geraden $C_1\ C_2\ C_3$, das Punktpaar auf C_i sei $N'_i\ N''_i$. Da $C_1 C_2 C_3$ durch einen Punkt gehen, so können die Polynomien N_i unter solcher Form vorausgesetzt werden, dass sie die Identitäten erfüllen:

1) $$N'_1 + N''_1 \equiv N'_2 + N''_2 \equiv N'_3 + N''_3.$$

Alsdann ist

$$A_4 \equiv N'_1 + N''_1 \equiv N'_2 + N''_2 \equiv N'_3 + N''_3 = 0$$

die Gleichung der Ebene A_4.

Die sechs Ebenen N_i schneiden sich dreimal zu je vieren in den Punkten $C_i\,C_k$. Ausserdem schneiden sie sich zu je dreien in acht Punkten; diese mögen als die Eckpunkte des *H. H.* bezeichnet werden. Die zwölf Geraden, in welchen sich je zwei Ebenen N schneiden, die nicht demselben Paare angehören, mögen als Kanten des *H. H.* gelten.

Bezeichnet man eine Kante oder einen Punkt durch Nebeneinanderstellung der Symbole für die zwei, beziehendlich drei Ebenen, auf welchen dieselben liegen, so mögen die Kanten und Punkte als gegenüberliegende gelten, deren Symbole durch Vertauschung aller oberen Indices in einander übergehen.

Je zwei Gegenkanten liegen auf einer Ebene. Die Ebene der Gegenkanten $N'_i\,N''_k$ und $N''_i\,N'_k$ mag mit D_l, die Ebene der Gegenkanten $N'_i\,N'_k$ und $N''_i\,N''_k$ mit E_l bezeichnet werden.

die Gleichung des Punktes A_4.

Die sechs Punkte N_i liegen dreimal zu je vieren auf den Ebenen $C_i\,C_k$. Ausserdem bestimmen sie noch zu je dreien acht neue Ebenen; diese mögen als die Ebenen des *H. O.* bezeichnet werden. Die zwölf Geraden, welche durch je zwei Punkte N gehen, die nicht demselben Paare angehören, mögen als Kanten des *H. O.* gelten.

Bezeichnet man eine Kante oder Ebene durch Nebeneinanderstellung der Symbole für die zwei, beziehendlich drei Punkte, durch welche dieselben bestimmt werden, so mögen die Kanten und Ebenen als gegenüberliegende gelten, deren Symbole durch Vertauschung aller oberen Indices in einander übergehen.

Je zwei Gegenkanten gehen durch einen Punkt. Der Schnittpunkt der Gegenkanten $N'_i\,N''_k$ und $N''_i\,N'_k$ mag mit D_l, der Schnittpunkt der Gegenkanten $N'_i\,N'_k$ und $N''_i\,N''_k$ mit E_l bezeichnet werden.

Die Gleichungen von D_l und E_l sind:

$$D_l \equiv N'_i - N''_k \equiv N'_k - N''_i = 0,$$
$$E_l \equiv N'_i - N'_k \equiv N''_k - N''_i = 0.$$

Schreibt man in diesen Aufstellungen für $D_1 E_1$, $D_2 E_2$, $D_3 E_3$ für die Indices l, i, k einen Cyklus von 1, 2, 3, so gelten die Identitäten

2) $$D_i - D_k - E_i - E_k = 0.$$

Hieraus folgt, dass je zwei von den Ebenenpaaren $D_l E_l$ durch einen Punkt gehen; oder ist F_l der Schnitt der Ebenen D_l und E_l, so folgt, dass sich je zwei von diesen drei Geraden in einem Punkte schneiden. Da nun jede durch eine Ecke des Dreiecks $C_1 C_2 C_3$ geht und sie nicht in der Ebene dieses Dreiecks enthalten sind, so folgt:

Die sechs Ebenen, welche je zwei Gegenkanten verbinden, gehen durch einen Punkt; oder die Geraden $F_1 F_2 F_3$ gehen durch einen Punkt; oder die Geraden je zweier Gegenpunkte gehen durch einen Punkt.

Dieser Punkt sei B_4; ist ferner B_l der Schnittpunkt $C_k C_l$, so werde $B_1 B_2 B_3 B_4$ als das dem harmonischen Hexaeder zugehörige Tetraeder bezeichnet. In demselben liegt also der Punkt B_4 gegenüber der Ebene A_4; die Kanten F_i verbinden B_4 mit B_i, die Kanten C_l verbinden B_k mit B_l.

Ferner werden bezeichnet die Eckpunkte des $H.H.$:

$N'_1 N'_2 N'_3$ mit Q_8,
$N''_1 N'_2 N'_3$ „ Q_1,
$N'_1 N''_2 N'_3$ „ Q_2,
$N'_1 N'_2 N''_3$ „ Q_3.

Dann gehen die Geraden

$Q_8 Q_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$

durch B_i und die Geraden

Hieraus folgt, dass je zwei von den Punktpaaren $D_l E_l$ auf einer Ebene liegen; oder ist F_l die Gerade $D_l E_l$, so folgt, dass die Geraden $F_1 F_2 F_3$ sich zu je zweien in einem Punkte schneiden. Da nun jede auf einer der Ebenen der Ecke $C_1 C_2 C_3$ liegt und sie nicht durch den Punkt A_4 gehen, so folgt:

Die sechs Punkte, in welchen sich je zwei Gegenkanten schneiden, liegen auf einer Ebene; oder die Geraden $F_1 F_2 F_3$ liegen auf einer Ebene; oder die Schnittgeraden je zweier gegenüberliegenden Ebenen liegen auf einer Ebene.

Diese Ebene sei B_4; ist ferner B_i die Ebene der Geraden C_k und C_l, so werde $B_1 B_2 B_3 B_4$ als das dem harmonischen Octaeder zugehörige Tetraeder bezeichnet. In demselben liegt also die Ebene B_4 dem Punkte A_4 gegenüber; die Kanten F_i sind Durchschnitte der Ebenen B_4 und B_i, die Kanten C_i sind Schnitte von B_k und B_l.

Ferner werden bezeichnet die Ebenen des $H.O.$:

$N''_1 N''_2 N''_3$ mit Q_4,
$N'_1 N''_2 N''_3$ „ Q_5,
$N''_1 N'_2 N''_3$ „ Q_6,
$N''_1 N''_2 N'_3$ „ Q_7.

Dann liegen die Geraden

$Q_8 Q_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$

auf B_i, und die Geraden

$Q_8 Q_{i+4}$ $(i=1, 2, 3)$
gehen durch die Tetraederkanten F_i und C_i.

Jede der Ebenen $N_i D_i E_i$ enthält vier Eckpunkte des *H.H.* und schneidet das zugehörige Tetraeder in dem dem Viereck dieser Eckpunkte zugehörigen Diagonaldreieck. Es ist daher

$Q_8 Q_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$

harmonisch mit B_i und dem Punkte R_i, in welchem diese Gerade $Q_8 Q_i$ die Ebene $B_k B_l B_m$ schneidet. Ferner ist

$Q_8 Q_{i+4}$ $(i=1, 2, 3)$

harmonisch mit den beiden Punkten S_i und T_i, welche $Q_8 Q_{i+4}$ mit den Gegenkanten F_i und C_i gemein hat.

$Q_8 Q_{i+4}$ $(i=1, 2, 3)$
gehen durch die Tetraederkanten F_i und C_i.

Durch jeden der Punkte $N_i D_i E_i$ gehen vier Ebenen des *H.O.*; die Ecken des zugehörigen Tetraeders werden von jedem dieser Punkte aus durch die Kanten der Diagonalecke der von den vier Ebenen des *H.O.* gebildeten vierseitigen Ecke projicirt. Es ist daher

$Q_8 Q_i$ $(i=1, 2, 3)$

harmonisch mit B_i und der Ebene R_i, welche die $Q_8 Q_i$ mit $B_k B_l B_m$ verbindet. Ferner ist das Paar

$Q_8 Q_{i+4}$ $(i=1, 2, 3)$

harmonisch mit den Ebenen S_i und T_i, welche durch $Q_8 Q_i$ und durch die Gegenkanten F_i und C_i bestimmt sind.

Sind q_{ki}, b_{ki}, r_{ki}, s_{ki}, t_{ki} die homogenen Coordinaten von Q_i, B_i, R_i, S_i, T_i in Bezug auf B_1, B_2, B_3, B_4, so lassen sich mit Rücksicht auf die harmonische Lage von $Q_8 Q_i B_i R_i$ vier Zahlen $\lambda' \mu' \lambda'' \mu''$ finden, welche die Gleichungen erfüllen:

$$b_{ki} = \lambda' q_{ki} + \mu' q_{k8},$$
$$r_{ki} = \lambda'' q_{ki} + \mu'' q_{k8},$$
$$\lambda' : \mu' = -\lambda'' : \mu''.$$

Da nun

$$b_{ki} = b_{li} = b_{mi} = 0 \text{ und } r_{ii} = 0,$$

so folgt aus diesen Formeln

$$q_{ki} : q_{k8} = q_{li} : q_{l8} = q_{mi} : q_{m8} = -q_{ii} : q_{i8}$$

oder

$$3)\quad \begin{aligned} q_{18} : q_{28} : q_{38} : q_{48} &= -q_{11} : q_{21} : q_{31} : q_{41}, \\ &= q_{12} : -q_{22} : q_{32} : q_{42}, \\ &= q_{13} : q_{23} : -q_{33} : q_{43}, \\ &= q_{14} : q_{24} : q_{34} : -q_{44}. \end{aligned}$$

Ferner lassen sich mit Rücksicht auf die harmonische Lage von $Q_8 Q_{i+4} S_i T_i$ vier Zahlen $\lambda' \mu' \lambda'' \mu''$ finden, für welche

$$s_{ki} = \lambda' q_{k,i+4} + \mu' q_{k8},$$
$$t_{ki} = \lambda'' q_{k,i+4} + \mu'' q_{k8},$$
$$\lambda' : \mu' = -\lambda'' : \mu''.$$

Da nun

$$s_{ki} = s_{li} = 0, \quad t_{ii} = t_{4i} = 0 \; (i, k, l = 1, 2, 3),$$

so folgt

$$q_{i,i+4} : q_{i8} = q_{4,i+4} : q_{48} = -q_{k,i+4} : q_{k8} = -q_{l,i+4} : q_{l8}$$

oder

$$4)\quad \begin{aligned} q_{18} : q_{28} : q_{38} : q_{48} &= -q_{15} : q_{25} : q_{35} : -q_{45}\,, \\ &= q_{16} : -q_{26} : q_{36} : -q_{46}\,, \\ &= q_{17} : q_{27} : -q_{37} : -q_{47}. \end{aligned}$$

Die Formeln 3) und 4) lassen sich auch in folgende zusammenfassen:

Die Coordinaten der Ecken eines harmonischen Hexaeders, beziehendlich der Ebenen eines harmonischen Octaeders, bezogen auf das zugehörige Tetraeder, sind unter der Form enthalten:

$$5)\quad q^2_1 : q^2_2 : q^2_3 : q^2_4 = a^2_1 : a^2_2 : a^2_3 : a^2_4.$$

Sind die Coordinaten auf ein beliebiges Tetraeder bezogen, so ergeben sich hieraus die Formeln

$$6)\quad q_k = (\pm\, a_1 b_{k1} \pm a_2 b_{k2} \pm a_3 b_{k3} \pm a_4 b_{k4}) : \sigma,$$

wenn σ die Summe der Coefficienten der b_k bezeichnet.

Wie man leicht sieht, lassen sich die in 5) und 6) enthaltenen Sätze umkehren:

Die acht verschiedenen Punkte, deren Coordinaten den Beziehungen 5) oder 6) genügen, sind die Eckpunkte eines harmonischen Hexaeders, das dem Tetraeder $B_1 B_2 B_3 B_4$ zugehört; d. h. diese Punkte liegen sechsmal zu je vieren auf einer Ebene, und die Geraden, in welchen sich je zwei gegenüberliegende dieser sechs Ebenen schneiden, liegen auf einer Ebene $(B_1 B_2 B_3)$.

Die acht verschiedenen Ebenen, deren Coordinaten den Beziehungen 5) oder 6) genügen, sind die Ebenen eines harmonischen Octaeders, das dem Tetraeder $B_1 B_2 B_3 B_4$ zugehört; d. h. diese Ebenen gehen sechsmal zu je vieren durch einen Punkt, und die Geraden, in welchen je zwei gegenüberliegende dieser sechs Punkte enthalten sind, schneiden sich in einem Punkte $(B_1 B_2 B_3)$.

Die Proportionen 5) lehren:

Alle Flächen zweiter Ordnung, welche durch die Ecken eines *H. H.* gehen, haben das zugehörige Tetraeder zum Polartetraeder.

Alle Flächen zweiter Ordnung, welche die Ebenen eines *H. O.* berühren, haben das zugehörige Tetraeder zum Polartetraeder.

Die Eckpunkte eines *H. H.* sind in einer doppelt unendlichen Anzahl von Flächen zweiter Ordnung enthalten.

Die Ebenen eines *H. O.* werden von einer doppelt unendlichen Anzahl von Flächen zweiter Ordnung berührt.

Durch die 16 Punkte zweier *H. H.*, welche demselben Tetraeder zugehören, geht ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung; durch diese Punkte ist eine Raumcurve vierten Grades bestimmt, der Träger jenes Flächenbüschels.

Die 16 Ebenen zweier *H. O.* werden von einer Schaar von Flächen zweiter Ordnung berührt; durch diese Ebenen ist eine developpable Fläche vierter Classe bestimmt, der Träger jener Flächenschaar.

Durch die 24 Eckpunkte dreier *H.H.*, welche demselben Tetraeder zugehören, ist eine Fläche zweiter Ordnung eindeutig bestimmt.

Durch die 24 Ebenen dreier *H.O.*, welche demselben Tetraeder zugehören, ist eine Fläche zweiter Ordnung eindeutig bestimmt.

Wenn drei Flächen zweiter Ordnung ein gemeinsames Polartetraeder haben, so schneiden sie sich in den Ecken eines dem Polartetraeder zugehörigen *H.H.* und ihre gemeinsamen Tangentialebenen sind die Ebenen eines *H.O.*

Wenn eine Fläche zweiter Ordnung sieben Eckpunkte eines *H.H.* enthält, so enthält sie auch den achten; oder schneiden sich drei Flächen zweiter Ordnung in sieben Eckpunkten eines *H.H.*, so ist ihr achter Schnittpunkt die achte Ecke des *H.H.*

Wenn eine Fläche zweiter Ordnung sieben Ebenen eines *H.O.* berührt, so berührt sie auch die achte; oder: berühren drei Flächen zweiter Ordnung sieben Ebenen eines *H.O.*, so ist ihre achte gemeinsame Berührungsebene die achte Ebene des *H.O.*

Dresden. Dr. R. HEGER.

XI. Ueber einen Satz aus der Determinantentheorie.

In seinen ausgezeichneten und überaus reichhaltigen Bemerkungen zur Determinantentheorie (Borchardt's Journal Band 72) hat Kronecker eine Formel aufgestellt (*l. c.* S. 171 Gleich. 3), die zahlreiche Anwendungen auf die Geometrie gestattet. Diese Formel bildet nur den Theil eines allgemeineren, noch fruchtbareren Satzes, welcher den Gegenstand der vorliegenden Note bildet.

Man habe zwei Gruppen von Elementen:

$$\begin{matrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \dots l_1, \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \dots l_2, \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \dots l_3, \\ . & . & . & . \quad . \quad . \\ 1 & a_m & b_m & c_m \dots l_m, \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \dots \lambda_1, \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \dots \lambda_2, \\ 1 & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \dots \lambda_3, \\ . & . & . & . \quad . \quad . \\ 1 & \alpha_m & \beta_m & \gamma_m \dots \lambda_m, \end{matrix}$$

in deren jeder die Anzahl Horizontalreihen gleich m, die Anzahl der Verticalreihen dagegen gleich n sei; die $2(n-1)\,m$ Elemente $a_i, b_i \dots l_i$ und $\alpha_i, \beta_i \dots \lambda_i$ $(i=1, 2, 3 \dots m)$ können überdies völlig willkürlich sein.

Setzt man

$$d_{ik} = a_i \alpha_k + b_i \beta_k + c_i \gamma_k + \dots + l_i \lambda_k \ (i \text{ und } k = 1, 2, 3 \dots m),$$

so lässt sich bekanntlich* die Determinante m^{ten} Grades

* Vergl. Baltzer, Determinantentheorie (dritte Ausgabe), § 5, 1.

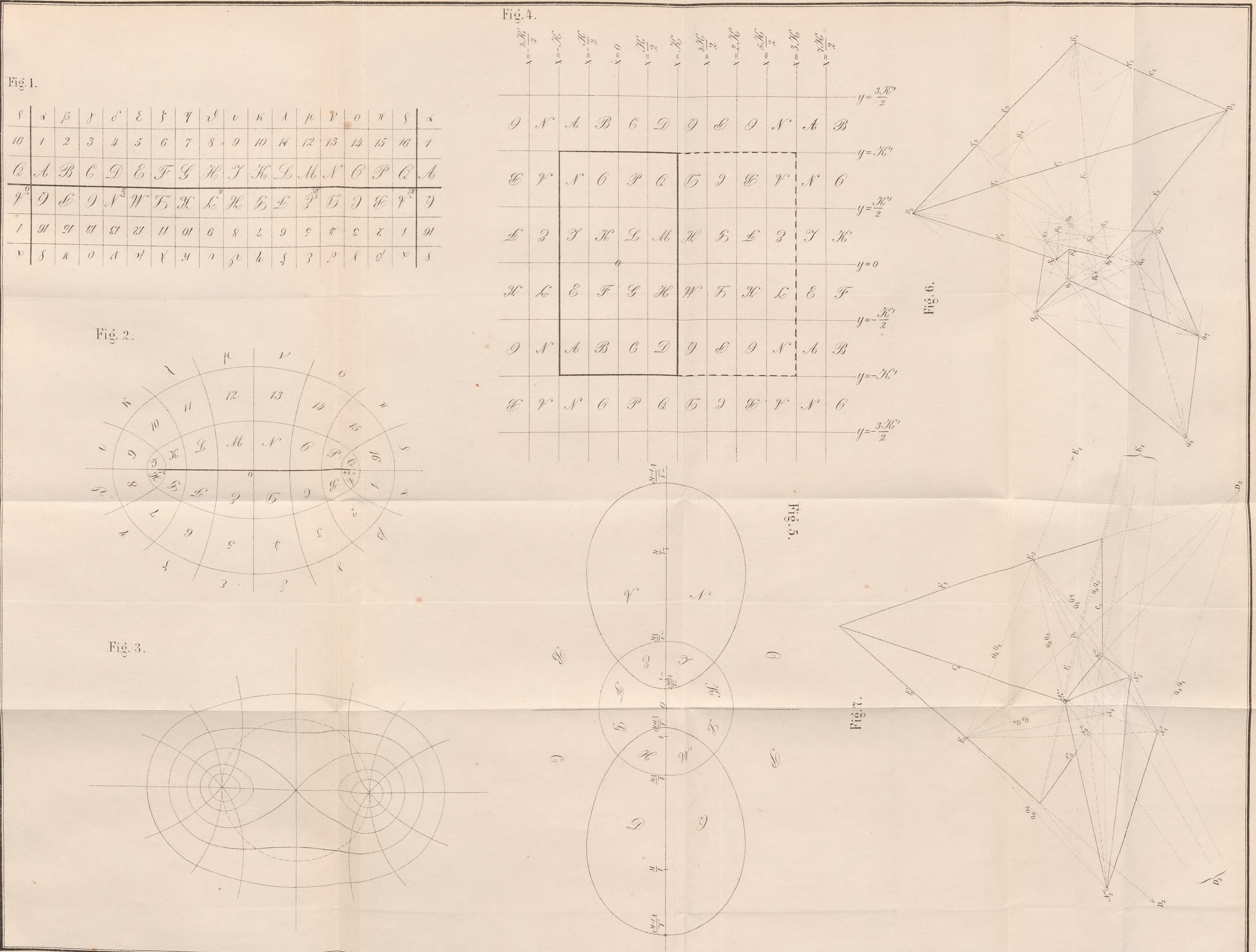
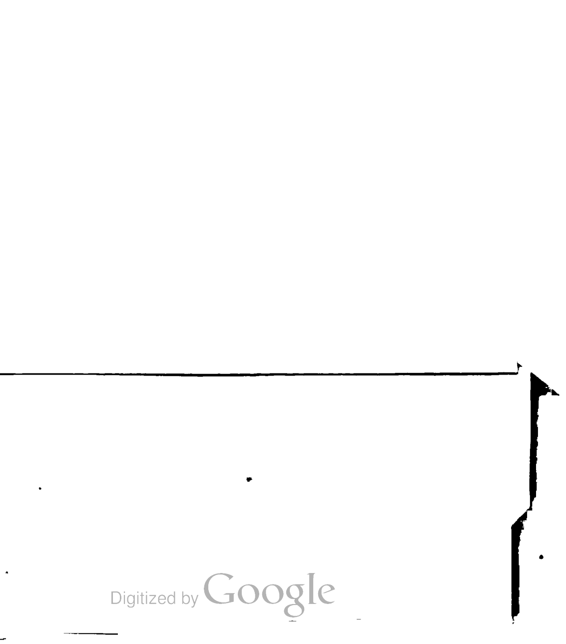


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
y = 0



$$P=\begin{vmatrix} 1+d_{11} & 1+d_{12} & \dots & 1+d_{1m} \\ 1+d_{21} & 1+d_{22} & \dots & 1+d_{2m} \\ 1+d_{31} & 1+d_{32} & \dots & 1+d_{3m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1+d_{m1} & 1+d_{m2} & \dots & 1+d_{mm} \end{vmatrix}$$

in die Summe von $\binom{n}{m}$ Producten aus je zwei Determinanten m^{ten} Grades zerlegen. In $\binom{n-1}{m-1}$ von diesen $\binom{n}{m}$ Producten kommen als Factoren nur solche Determinanten vor, in welchen die Elemente der ersten Verticalreihe Einheiten sind, während bei den $\binom{n-1}{m}$ übrigen solches nicht der Fall. Nennen wir Q die Summe der $\binom{n-1}{m-1}$ ersteren und R die Summe der $\binom{n-1}{m}$ letzteren Producte, so ist offenbar

$$R=\Sigma\pm d_{11}d_{22}d_{33}\dots d_{mm},$$

während der im Eingange erwähnte und hier zu beweisende Satz aussagt, dass

$$\text{I)}\qquad (-2)^{m-1}Q=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & s^2_{11} & s^2_{12} & \dots & s^2_{1m} \\ 1 & s^2_{21} & s^2_{22} & \dots & s^2_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & s^2_{m1} & s^2_{m2} & \dots & s^2_{mm} \end{vmatrix},$$

wenn

$$s^2_{ik}=(a_i-\alpha_k)^2+(b_i-\beta_k)^2+\dots+(l_i-l_k)^2.$$

Es ist nämlich

$$P=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1+d_{11} & 1+d_{12} & \dots & 1+d_{1m} \\ 1 & 1+d_{21} & 1+d_{22} & \dots & 1+d_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1+d_{m1} & 1+d_{m2} & \dots & 1+d_{mm} \end{vmatrix}$$

oder, wenn man die erste Verticalreihe von allen folgenden abzieht:

$$P=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ 1 & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mm} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ 1 & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mm} \end{vmatrix}+R,$$

also

$$Q = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ 1 & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mm} \end{vmatrix}.$$

In der letzten Determinante rechter Hand multiplicire man die erste Horizontalreihe der Reihe nach mit

$\frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + \dots + l_1^2)$, $\frac{1}{2}(a_2^2 + b_2^2 + \dots + l_2^2) \dots \frac{1}{2}(a^2_m + b^2_m + \dots l^2_m)$

und ziehe sie beziehungsweise von der zweiten, dritten ... letzten Horizontalreihe ab; ebenso subtrahire man die resp. mit

$\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \dots + \lambda_1^2)$, $\frac{1}{2}(\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \dots + \lambda_2^2) \dots \frac{1}{2}(\alpha^2_m + \beta^2_m + \dots + \lambda^2_m)$

multiplicirte erstè Verticalreihe von allen folgenden ab. Alsdann ergiebt sich

$$Q = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}s^2_{11} & -\frac{1}{2}s^2_{12} & \dots & -\frac{1}{2}s^2_{1m} \\ 1 & -\frac{1}{2}s^2_{21} & -\frac{1}{2}s^2_{22} & \dots & -\frac{1}{2}s^2_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -\frac{1}{2}s^2_{m1} & -\frac{1}{2}s^2_{m2} & \dots & -\frac{1}{2}s^2_{mm} \end{vmatrix} = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{m\,1} . -1 . \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & s^2_{11} & s^2_{12} & \dots & s^2_{1m} \\ 1 & s^2_{21} & s^2_{22} & \dots & s^2_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & s^2_{m1} & s^2_{m2} & \dots & s^2_{mm} \end{vmatrix},$$

wie zu beweisen war.

Im Falle $m = n$ hat man den Kronecker'schen Satz:

$$\text{II)}\quad (-2)^{m-1} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_m & b_m & \dots & l_m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \beta_1 & \dots & \lambda_1 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \dots & \lambda_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_m & \beta_m & \dots & \lambda_m \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & s^2_{11} & s^2_{12} & \dots & s^2_{1m} \\ 1 & s^2_{21} & s^2_{22} & \dots & s^2_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & s^2_{m1} & s^2_{m2} & \dots & s^2_{mm} \end{vmatrix}.$$

Lässt man in dieser letzten Gleichung alle $f_i, g_i \dots l_i$ und die entsprechenden $\varphi_i \dots \lambda_i$ $(i = 1, 2 \dots m)$ verschwinden, so folgt

$$\text{III)}\quad 0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & s^2_{11} & s^2_{12} & \dots & s^2_{1m} \\ 1 & s^2_{21} & s^2_{22} & \dots & s^2_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & s^2_{m1} & s^2_{m2} & \dots & s^2_{mm} \end{vmatrix}, \quad s^2_{ik} = (a_i - \alpha_k)^2 + (b_i - \beta_k)^2 + \dots + (e_i - \varepsilon_k)^2,$$

wobei die Anzahl der Buchstaben $a, b \dots e$ (resp. $\alpha, \beta \dots \varepsilon$) kleiner als $m - 1$.

Vermittelst der Formeln I) bis III) lassen sich die meisten der in Baltzer's Determinantentheorie, § 16 und § 17, 1 — 7, enthaltenen Theoreme mit Leichtigkeit ableiten, zum Theil auch verallgemeinern.

Bedeuten z. B. a, b, c und α, β, γ irgend zwei Systeme von je drei Richtungen in zwei verschiedenen Ebenen, so hat man für drei rechtwinklige Axen x, y, z nach I)



$$\begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos ya \\ 1 & \cos xb & \cos yb \\ 1 & \cos xc & \cos yc \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos x\alpha & \cos y\alpha \\ 1 & \cos x\beta & \cos y\beta \\ 1 & \cos x\gamma & \cos y\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \cos xa & \cos za \\ 1 & \cos xb & \cos zb \\ 1 & \cos xc & \cos zc \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos x\alpha & \cos z\alpha \\ 1 & \cos x\beta & \cos z\beta \\ 1 & \cos x\gamma & \cos z\gamma \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & \cos ya & \cos za \\ 1 & \cos yb & \cos zb \\ 1 & \cos yc & \cos zc \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \cos y\alpha & \cos z\alpha \\ 1 & \cos y\beta & \cos z\beta \\ 1 & \cos y\gamma & \cos z\gamma \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & s^2_{11} & s^2_{12} & s^2_{12} \\ 1 & s^2_{21} & s^2_{22} & s^2_{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & s^2_{31} & s^2_{32} & s^2_{33} \end{vmatrix},$$

worin

$$s^2_{11} = (\cos xa - \cos x\alpha)^2 + (\cos ya - \cos y\alpha)^2 + (\cos za - \cos z\alpha)^2$$
$$= 2 - 2\cos a\alpha = 4\sin^2 \tfrac{1}{2} a\alpha \text{ etc.}$$

Nennt man φ den Winkel, welchen die beiden Ebenen abc und $\alpha\beta\gamma$ gegen einander bilden, so ergiebt sich also

$$(\sin ab + \sin bc + \sin ca)\,(\sin\alpha\beta + \sin\beta\gamma + \sin\gamma\alpha)\cos\varphi$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sin^2\frac{1}{2}a\alpha & \sin^2\frac{1}{2}a\beta & \sin^2\frac{1}{2}a\gamma \\ 1 & \sin^2\frac{1}{2}b\alpha & \sin^2\frac{1}{2}b\beta & \sin^2\frac{1}{2}b\gamma \\ 1 & \sin^2\frac{1}{2}c\alpha & \sin^2\frac{1}{2}c\beta & \sin^2\frac{1}{2}c\gamma \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos a\alpha & \cos a\beta & \cos a\gamma \\ 1 & \cos b\alpha & \cos b\beta & \cos b\gamma \\ 1 & \cos c\alpha & \cos c\beta & \cos c\gamma \end{vmatrix}.$$

In ähnlicher Weise findet man für irgend zwei Systeme von je vier Richtungen

$$(\sin bcd + \sin dca + \sin dab + \sin cba)(\sin\beta\gamma\delta + \sin\delta\gamma\alpha + \sin\delta\alpha\beta + \sin\gamma\beta\alpha)$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sin^2\frac{1}{2}a\alpha & . & . & \sin^2\frac{1}{2}a\delta \\ 1 & \sin^2\frac{1}{2}b\alpha & . & . & \sin^2\frac{1}{2}b\delta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \sin^2\frac{1}{2}d\alpha & . & . & \sin^2\frac{1}{2}d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cos a\alpha & \cos a\beta & \cos a\gamma & \cos a\delta \\ 1 & \cos b\alpha & \cos b\beta & \cos b\gamma & \cos b\delta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cos d\alpha & \cos d\beta & \cos d\gamma & \cos d\delta \end{vmatrix}$$

$$= -16 \begin{vmatrix} \sin^2\frac{1}{2}a\alpha & \sin^2\frac{1}{2}a\beta & \sin^2\frac{1}{2}a\gamma & \sin^2\frac{1}{2}a\delta \\ \sin^2\frac{1}{2}b\alpha & \sin^2\frac{1}{2}b\beta & \sin^2\frac{1}{2}b\gamma & \sin^2\frac{1}{2}b\delta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin^2\frac{1}{2}d\alpha & \sin^2\frac{1}{2}d\beta & \sin^2\frac{1}{2}d\gamma & \sin^2\frac{1}{2}d\delta \end{vmatrix}.$$

Tübingen, im Januar 1873. Dr. S. GUNDELFINGER.

XII. Ueber einige Integrale von allgemeiner Form.

Im X. Jahrgange dieser Zeitschrift, S. 152, habe ich für die beiden, der Hauptsache nach von Cauchy herrührenden Formeln

$$1) \qquad \int_0^\infty \frac{f(iu) + f(-iu)}{2} \cdot \frac{h\,du}{h^2 + u^2} = \frac{\pi}{2} f(h),$$

$$2)\qquad \int_0^\infty \frac{f(iu)-f(-iu)}{2i}\cdot\frac{u\,du}{h^2+u^2}=-\frac{\pi}{2}f(h)$$

einen neuen Beweis gegeben und zugleich die analogen Formeln abgeleitet

$$3)\qquad \int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\cdot\frac{u\,du}{h^2+u^2}=-\tfrac{1}{2}\left[\int_0^\infty\frac{f(x)}{h-x}\,dx-\int_0^\infty\frac{f(x)}{h+x}\,dx\right],$$

$$4)\qquad \int_0^\infty \frac{f(iu)-f(-iu)}{2}\cdot\frac{h\,du}{h^2+u^2}=-\tfrac{1}{2}\left[\int_0^\infty\frac{f(x)}{h-x}\,dx+\int_0^\infty\frac{f(x)}{h+x}\,dx\right],$$

wobei von dem ersten Integrale rechter Hand der Hauptwerth zu nehmen ist. Ich will nun zuerst die rechten Seiten der Gleichungen 3) und 4) transformiren und dann ein paar neue Formeln ähnlicher Art entwickeln.

Betrachtet man, dem Gesagten zufolge, das Integral

$$\int_0^\infty\frac{f(x)}{h-x}\,dx$$

als den Grenzwerth, gegen welchen die Summe

$$\int_0^{h-\varrho}\frac{f(x)}{h-x}\,dx+\int_{h+\varrho}^\infty\frac{f(x)}{h-x}\,dx$$

bei unendlich abnehmenden ϱ convergirt, setzt man ferner im ersten Summanden $x=hz$, im zweiten $x=\frac{h}{z}$ und zur Abkürzung

$$\frac{\varrho}{h}=\delta,\qquad \frac{\varrho}{h+\varrho}=\varepsilon,$$

so erhält man

$$\int_0^\infty\frac{f(x)}{h-x}\,dx=Lim\left\{\int_0^{1-\delta}\frac{1}{1-z}f(hz)\,dz-\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{z(1-z)}f\left(\frac{h}{z}\right)dz\right\}.$$

Auf gleiche Weise kann man schreiben

$$\int_0^\infty\frac{f(x)}{h+x}\,dx=Lim\left\{\int_0^{1-\delta}\frac{1}{1+z}f(hz)\,dz+\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{z(1+z)}f\left(\frac{h}{z}\right)dz\right\}.$$

Bildet man die halbe Differenz, sowie die halbe Summe dieser Gleichungen und lässt nachher ϱ, mithin auch δ und ε in Null übergehen, so gelangt man zu folgenden zwei Transformationen:

$$5)\qquad \tfrac{1}{2}\left[\int_0^\infty\frac{f(x)}{h-x}\,dx-\int_0^\infty\frac{f(x)}{h+x}\,dx\right]=\int_0^1\left\{z\,f(hz)-\frac{1}{z}f\left(\frac{h}{z}\right)\right\}\frac{dz}{1-z^2},$$

$$6)\qquad \tfrac{1}{2}\left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{h-x}dx + \int_0^\infty \frac{f(x)}{h+x}dx\right] = \int_0^1 \left\{f(hz) - f\left(\frac{h}{z}\right)\right\}\frac{dz}{1-z^2}.$$

Nach dieser Vorbemerkung erinnern wir an die Gleichung

$$7)\qquad \frac{1}{h^2+k^2}\,l\left(\frac{h}{k}\right) = \int_0^1 \frac{(h^2-k^2)\,z\,dz}{(k^2+h^2z^2)\,(h^2+k^2z^2)},$$

deren Richtigkeit durch gewöhnliche Integration leicht zu prüfen ist; wir nehmen darin $k=u$, multipliciren beiderseits mit

$$h\,\frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\,du$$

und integriren von $u=0$ bis $u=\infty$. Dies giebt

$$\int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\,l\left(\frac{h}{u}\right)\cdot\frac{h\,du}{h^2+u^2}$$

$$= h\int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\,du\int_0^1 \frac{(h^2-u^2)\,z\,dz}{(u^2+h^2z^2)\,(h^2+u^2z^2)}.$$

Durch Umkehrung der Integrationenfolge geht das Doppelintegral rechter Hand über in

$$h\int_0^1 z\,dz\int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\cdot\frac{(h^2-u^2)\,du}{(h^2z^2+u^2)\,(h^2+z^2u^2)}$$

$$= \int_0^1 \frac{dz}{1-z^2}\int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\left\{\frac{hz}{(hz)^2+u^2} - \frac{\frac{h}{z}}{\left(\frac{h}{z}\right)^2+u^2}\right\}du.$$

Hier lässt sich die Formel 1) zweimal anwenden, indem man für das dortige h erst hz, dann $\frac{h}{z}$ setzt. Das vorige Doppelintegral wird hierdurch zu dem einfachen Integral

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{dz}{1-z^2}\left\{f(hz) - f\left(\frac{h}{z}\right)\right\},$$

d. i. nach Formel 6)

$$= \frac{\pi}{4}\left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{h-x}dx + \int_0^\infty \frac{f(x)}{h+x}dx\right].$$

Damit gelangt man zu dem Resultate

$$\int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\, l\left(\frac{h}{u}\right) \frac{h\,du}{h^2+u^2} = \frac{\pi}{4}\left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{h-x}\,dx + \int_0^\infty \frac{f(x)}{h+x}\,dx\right]$$

oder, wenn man den Logarithmus auflöst und wieder die Formel 1) benützt:

$$8)\quad \int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2} \cdot \frac{h\,lu}{h^2+u^2}\,du = \frac{\pi}{2} f(h)\, lh - \frac{\pi}{4}\left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{h-x}\,dx + \int_0^\infty \frac{f(x)}{h+x}\,dx\right].$$

Zu einer analogen Formel gelangt man dadurch, dass man in Nr. 7 wieder $k=u$ nimmt, beiderseits mit

$$u\frac{f(iu)-f(-iu)}{2i}\,du$$

multiplicirt und von $u=0$ bis $u=\infty$ integrirt; das Ergebniss ist

$$9)\quad \int_0^\infty \frac{f(iu)-f(-iu)}{2i} \cdot \frac{u\,lu}{h^2+u^2}\,du = -\frac{\pi}{2} f(h)\, lh + \frac{\pi}{4}\left[\int_0^\infty \frac{f(x)}{h-x}\,dx - \int_0^\infty \frac{f(x)}{k+x}\,dx\right].$$

Beispielsweise genügt die Function $f(z)=e^{-az}$ bei reellen $a>0$ den Bedingungen, welche a. a. O. für $f(z)$ entwickelt worden sind; mittels der Substitution

$$h-x=\frac{ly}{a}$$

ergiebt sich dann

$$val.\ princ. \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{h-x}\,dx = val.\ pr.\ e^{-ah}\int_0^{e^{ah}} \frac{dy}{ly} = e^{-ah}\, li(e^{ah})$$

und mittels einer analogen Substitution

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{h+x}\,dx = -e^{ah}\int_0^{e^{-ah}} \frac{dy}{ly} = -e^{ah}\, li\,(e^{-ah});$$

daher ist nach Nr. 8) und 9)

$$\int_0^\infty \frac{h\,lu}{h^2+u^2}\cos au\,du = \frac{\pi}{2} e^{-ah}\, lh - \frac{\pi}{4}\left\{e^{-ah}\, li\,(e^{+ah}) - e^{+ah}\, li\,(e^{-ah})\right\},$$

$$\int_0^\infty \frac{u\, lu}{h^2+u^2} \sin au\, du = \frac{\pi}{2} e^{-ah}\, lh - \frac{\pi}{4}\{e^{-ah}\, li(e^{+ah}) + e^{+ah}\, li(e^{-ah})\}.$$

Es sind dies die nämlichen Formeln, welche ich in Grunert's Archiv, Thl. IV S. 104, mittels des Fourier'schen Satzes und einiger Eigenschaften des Integrallogarithmus abgeleitet habe.

SCHLÖMILCH.

XIII. Ueber die Epicycloide und Hypocycloide.

1. In einer im XV. Bande dieser Zeitschrift (S. 129 flgg.) veröffentlichten Abhandlung habe ich bewiesen, dass, wenn sich zwei Punkte auf einem und demselben Kreise gleichförmig, aber mit verschiedener Geschwindigkeit fortbewegen und wenn die gleichzeitigen Lagen beider Punkte durch gerade Linien verbunden werden, diese Linien eine gemeine Epicycloide oder Hypocycloide umhüllen, je nachdem die Bewegungsrichtung beider Punkte eine gleiche oder entgegengesetzte ist.

Es liegt nun nahe, den allgemeinen Fall zu untersuchen, in welchem sich die beiden Punkte auf zwei concentrischen Kreisen, und zwar mit verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten bewegen. Die Gleichung der durch die betreffenden Verbindungslinien umhüllten Curve gestaltet sich hier zwar oft schon in den einfachsten Fällen sehr complicirt; dennoch besitzt die fragliche Curve eine sehr einfache Beziehung zu der verlängerten oder verkürzten Epicycloide oder Hypocycloide, von welcher später die Rede sein wird.

Vorausgesetzt soll in den nachstehenden Untersuchungen werden, dass die beiden Punkte ihre Bewegung gleichzeitig von einem und demselben zur Abscissenaxe zu wählenden Durchmesser beider Kreise aus beginnen. Durch diese Annahme werden die anzustellenden Betrachtungen bedeutend vereinfacht, ohne dass die Allgemeinheit beschränkt wird.

Zunächst sind einige bemerkenswerthe specielle Fälle der Umhüllungscurve zu erwähnen.

Ist die Winkelgeschwindigkeit des einen Punktes doppelt so gross, als die des andern, und bewegen sich beide Punkte in gleicher Richtung, so geht, wie eine einfache Betrachtung zeigt, die allgemeine Brennlinie des Kreises hervor; der Leuchtpunkt liegt dabei auf der Axe und auf dem Kreise, auf welchem sich der schneller gehende Punkt bewegt. Der andere Kreis dagegen ist der reflectirende.

Bewegen sich ferner beide Punkte mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung, so umhüllt die Verbindungslinie die Evolute einer Ellipse, deren Halbaxen gleich der halben Summe und der halben Differenz der Radien beider Kreise sind.

Ist endlich der eine Kreis unendlich gross, so ist die umhüllte Curve stets eine gemeine Epicycloide oder Hypocycloide. In diesem Falle wird nämlich eine Tangente der Curve erhalten, indem man durch einen beliebigen Punkt A des endlich gebliebenen Kreises, dessen Radius mit der Axe einen Winkel α bilden mag, eine gerade Linie zieht, welche gegen die Axe um den Winkel $n\alpha$ geneigt ist, wo n jede beliebige positive oder negative Zahl bedeuten kann. Schneidet nun diese gerade Linie den Kreis nochmals in B, so ergiebt sich leicht, dass sich bei Veränderung der Lage von A auch B fortbewegt und dass sich die Geschwindigkeit von A zu der von B wie

$$1:(2n-1)$$

verhält. Man gelangt somit auf den bereits in meiner früheren Abhandlung betrachteten Fall zurück. Die Curve ist eine Epicycloide oder eine Hypocycloide, je nachdem n grösser oder kleiner als $\frac{1}{2}$ ist. Da sich durch Vertauschung der Geschwindigkeiten von A und B die Curve nicht ändert, so geht die zu einem bestimmten Verhältniss n gehörige Curve auch hervor, wenn man das durch die Gleichung

$$(2n-1)(2n'-1)=1$$

bestimmte Verhältniss

$$n'=\frac{n}{2n-1}$$

zu Grunde legt. Bedeutet $1:k$ das Verhältniss zwischen dem Radius des Wälzungskreises und dem des Grundkreises, wobei für Hypocycloiden k negativ gesetzt werden muss, so berechnen sich aus ihm die Grössen n und n' nach den Formeln

$$n=\frac{k+2}{2}, \quad n'=\frac{k+2}{2(k+1)}.$$

Legt man daher von einem beliebigen Punkte des einer Epicycloide umschriebenen oder einer Hypocycloide eingeschriebenen Kreises an die Curve alle möglichen Tangenten und bildet der Radius jenes Punktes mit der Axe (d. i. dem nach einer Spitze gehenden Durchmesser) einen Winkel α, so schliessen jene Tangenten mit der Axe theils den Winkel

$$\frac{k+2}{2}\alpha,$$

theils

$$\frac{k+2}{2(k+1)}\alpha$$

ein. Für die bekannte Hypocycloide mit dem Radiusverhältniss $1:4$ werden z. B. die Neigungswinkel der vier möglichen Tangenten:

$$-\alpha, \quad \tfrac{1}{3}\alpha, \quad 120^0+\tfrac{1}{3}\alpha, \quad 240^0+\tfrac{1}{3}\alpha.$$

2. Sind im allgemeinen Falle a und b die Radien beider Kreise und ist $1:n$ das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten, so sind die Coordinaten der zu verbindenden Punkte:

$$x_1 = a \cos\varphi, \quad y_1 = a \sin\varphi,$$
$$x_2 = b \cos n\varphi, \quad y_2 = b \sin n\varphi.$$

Theilt man die Verbindungslinie derselben im Verhältniss $1:m$, so erhält man den Punkt

$$1) \qquad x = \frac{am \cos\varphi + b \cos n\varphi}{m+1}, \quad y = \frac{am \sin\varphi + b \sin n\varphi}{m+1}.$$

Durch stetige Verbindung der so erhaltenen Theilpunkte ergiebt sich eine verlängerte oder verkürzte Epicycloide, welche für

$$m = \pm \frac{b}{a}$$

in eine gemeine Epicycloide übergeht.

Der Radius des Grundkreises ist bei der allgemeinen Curve

$$R = \frac{am(n-1)}{n(m+1)},$$

der des Wälzungskreises

$$r = \frac{am}{n(m+1)},$$

während der beschreibende Punkt vom Centrum des Wälzungskreises um

$$d = \frac{b}{m+1}$$

absteht.

Legt man im Punkte 1) an die betreffende Epicycloide eine Tangente und bezeichnet den Winkel, welchen diese mit der Verbindungslinie der Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ einschliesst, mit ω, so erhält man durch eine leicht auszuführende Rechnung

$$2) \qquad tg\,\omega = \frac{a^2 m - b^2 n + ab(n-m)\cos(n-1)\varphi}{ab(m+n)\sin(n-1)\varphi}.$$

An dem speciellen Falle

$$m = -n$$

wird $tg\,\omega = \infty$, also $\omega = 90^0$. Es ist daher die von der mehrfach erwähnten Verbindungslinie umhüllte Curve die Evolute der durch die Gleichungen

$$3) \qquad x = \frac{an \cos\varphi - b \cos n\varphi}{n-1}, \quad y = \frac{an \sin\varphi - b \sin n\varphi}{n-1}$$

dargestellten Epicycloide und diese ist eine Evolvente der Umhüllungslinie. Für diese specielle Curve 3) ist

$$R = a, \quad r = \frac{a}{n-1}, \quad d = \frac{b}{n-1}.$$

Dieselbe ist eine verlängerte, eine gemeine oder eine verkürzte Epicycloide, je nachdem

$$b \lesseqgtr a$$

ist.

Für $n=2$ erhält man in

$$x=2\,a\cos\varphi-b\cos2\varphi,\quad y=2\,a\sin\varphi-b\sin2\varphi$$

die Evolvente der Brennlinie eines Kreises, welche bekanntlich eine verlängerte oder verkürzte Cardioide ist; für $n=-1$ geht, wie es sein muss, eine Ellipse hervor. Ist endlich

$$n=\pm\frac{b}{a},$$

so ergiebt sich die bekannte Epicycloide, welche im Centrum des Grundkreises einen vielfachen Punkt besitzt und deren Gleichung in Polarcoordinaten auf die Form

$$r=A\cos k\varphi$$

gebracht werden kann.

3. Wenn

$$n=\pm\frac{a}{b}$$

ist, d. h. wenn sich auf beiden Kreisen die Punkte mit gleicher linearer Geschwindigkeit bewegen, so gestalten sich die beiden, zum Systeme der durch die Gleichung 1) dargestellten Curven gehörigen gemeinen Epicycloiden sehr einfach, indem die eine derselben in das Unendliche rückt, während die andere vom Mittelpunkte der Verbindungslinie beschrieben wird; es wird nämlich unter der gemachten Voraussetzung für diese beiden Curven

$$m=\pm1.$$

Bewegen sich also auf zwei concentrischen Kreisen zwei Punkte mit gleicher linearer Geschwindigkeit und werden die gleichzeitigen Lagen beider Punkte durch gerade Linien verbunden, so beschreibt der Mittelpunkt dieser Linien eine gemeine Epicycloide oder Hypocycloide, je nachdem die Bewegungsrichtung der beiden Punkte eine gleiche oder entgegengesetzte ist.

4. Die beiden im allgemeinen Falle hervorgehenden gemeinen Epicycloiden werden durch die Gleichungen bestimmt:

$$4)\quad\left\{\begin{array}{ll} x=\dfrac{ab}{a+bn}(n\cos\varphi+\cos n\varphi), & y=\dfrac{ab}{a+bn}(n\sin\varphi+\sin n\varphi);\\[2ex] x=\dfrac{ab}{a-bn}(\cos n\varphi-n\cos\varphi), & y=\dfrac{ab}{a-bn}(\sin n\varphi-n\sin\varphi).\end{array}\right.$$

Zieht man in zwei entsprechenden Punkten dieser Epicycloiden die Tangenten, so bilden diese mit der Verbindungslinie beider Punkte Winkel ω_1 und ω_2, deren Tangenten nach 3) durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$5)\quad\left\{\begin{array}{l} tg\,\omega_1=\dfrac{a-b}{a+b}\cot g\dfrac{n-1}{2}\varphi,\\[2ex] tg\,\omega_2=\dfrac{a+b}{b-a}\,tg\dfrac{n-1}{2}\varphi.\end{array}\right.$$

Da somit

$$tg\,\omega_1 \,.\, tg\,\omega_2 = -1$$

ist, so schneiden sich die Tangenten zweier entsprechender Punkte der zwei Curven stets unter rechtem Winkel.

Die Coordinaten des Schnittpunktes der beiden Tangenten liegen in der Curve

$$6)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{ab\,(n+1)}{a^2 - b^2 n^2}\,(a\cos n\varphi - bn\cos\varphi), \\ y &= \frac{ab\,(n+1)}{a^2 - b^2 n^2}\,(a\sin n\varphi - bn\sin\varphi), \end{aligned} \right.$$

also in einer Epicycloide, welche, je nachdem

$$a \gtrless b,$$

verlängert oder verkürzt ist. Die Tangente dieser Curve berührt, wie eine leichte Rechnung ergiebt, zugleich den Kreis, welcher dem durch die beiden ersten Tangenten und die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte gebildeten Dreiecke umschrieben ist, oder die Normale der Curve geht durch den Mittelpunkt der durch diese Berührungspunkte begrenzten Strecke.

Chemnitz. Dr. EMIL ECKARDT.

XIV. Ueber die von Regnault aufgestellte Formel für die mittleren Ausdehnungscoefficienten der atmosphärischen Luft und des Quecksilbers.

In dem 2. Bande seines Lehrbuches der Experimentalphysik, S. 52, giebt Prof. Wüllner eine Tabelle für die Volumenveränderung, den mittleren und den wahren Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers zwischen 0° und 300° C. Die Berechnung der angegebenen Werthe des mittleren Ausdehnungscoefficienten gründet sich auf ein ziemlich willkürliches Princip, worin alle Physiker der Ansicht Gay-Lussac's und Regnault's zu folgen scheinen.* Da nun überdies Prof. Wüllner zur Berechnung des wahren Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers bei irgend einer Temperatur t sich der Formel $\beta = a + 2bt$ bedient, welche er mit Begehung eines analytischen Fehlers von der Function $V_t = V_0\,(1 + at + bt^2)$ ableitet, so nehme ich Veranlassung, über das Princip Regnault's einige Bemerkungen zu machen und die Tabelle von Wüllner zu rectificiren.

Regnault nimmt einen sogenannten mittleren Ausdehnungscoefficienten für je 1 Grad Celsius an, indem er von der Annahme ausgeht, dass die Ausdehnung des Quecksilbers von 0° bis t^0 der Temperaturzunahme proportional sei. Unter dieser Voraussetzung findet derselbe durch Vergleichung der Volumina des Quecksilbers mit den Angaben des Luftthermometers den mittleren Ausdehnungscoefficienten α

von 0^0 bis 100^0 C. gleich 0,00018153,
„ 0^0 „ 200^0 „ „ 0,00018405,
„ 0^0 „ 300^0 „ „ 0,00018658.

Diese Volumenveränderung stellt Regnault als Function von t dar, indem derselbe

$$V_t = V_0(1 + at + bt^2) = V_0(1 + \alpha t)$$

setzt und die Constanten berechnet, nämlich

$$a = 0{,}00017905 \text{ und } b = 0{,}0000000252.$$

Er zog diese Werthe aus einer Reihe von Beobachtungen, wobei er die Volumenveränderungen des Quecksilbers mit den Angaben des Luftthermometers verglich. Demzufolge sah Regnault und mit ihm die Physiker Rudberg und Magnus das Luftthermometer als das eigentliche Normalthermometer an und suchte die Abweichungen anderer Thermometer von demselben durch eine Function des Temperaturgrades t auszudrücken. Da die permanenten Gase bei mittlerem Drucke und gewöhnlicher Temperatur sehr weit von dem flüssigen Aggregatzustande entfernt sind, so macht man die wohlbegründete Annahme, dass die Ausdehnung dieser Gase dem wahren Gange der Wärme proportional erfolge. Nach den Versuchen der genannten Physiker nimmt eine Luftmenge von dem Volumen 1 bei der Temperatur 0^0 C. das Volumen 1,36651 bei der Temperatur 100^0 C. ein. Wenn man indess eine der Wärmezunahme proportionale Ausdehnung der Luft annimmt, so kann hierbei doch einzig und allein von dem wahren Ausdehnungscoefficienten bei jeder beliebigen Temperatur die Rede sein. Bezeichnet man das Volumen einer Luftmenge bei 0^0 C. mit V_0, bei 1^0 C. mit V_1, allgemein bei t^0 C. mit V_t, so ist bei constantem Ausdehnungscoefficienten α

$$V_1 = V_0(1+\alpha),\ V_2 = V_1(1+\alpha) \ldots V_t = V_{t-1}(1+\alpha),$$

also

$$V_t = V_0(1+\alpha)^t.$$

Die Volumenveränderung ist demnach eine Exponentialfunction von t, nicht aber eine arithmetische Function, indem man zu setzen pflegt $V_t = V_0(1+\alpha t)$. Diese Function ändert sich nämlich sehr beträchtlich, wenn man t von einem andern Temperaturgrade, als von 0^0 C., z. B. von 20^0 C. ab zählt. Denn wenn alsdann die obige Function noch Giltigkeit besässe, so müsste wegen $V_{20} = V_0(1 + 20\alpha)$ und $V_t = V_0(1 + \alpha t)$ die Gleichung

$$V_t = V_{20}[1 + (t - 20)\alpha] = V_{20}\frac{1 + \alpha t}{1 + 20\alpha}$$

bestehen. Für $t = 100^0$ ist aber

$$1 + 80\alpha = 1{,}29320 \text{ und } (1 + 100\alpha) : (1 + 20\alpha) = 1{,}27317,$$

eine Abweichung, welche zu wesentlich ist, um auf die Annahme jener Function die genaue Bestimmung der viel kleineren Ausdehnungscoefficienten des Quecksilbers zu gründen. Wollte man also die Temperaturen z. B.

von dem verhältnissmässig wenig höheren Temperaturgrade 20° C. abzählen, so müsste man für V_t eine ganz andere und sehr verwickelte Function aufstellen, damit die Gleichung

$$f(t-20) = \frac{1+\alpha t}{1+20\alpha}$$

noch bestände. Mir ist es wenigstens unmöglich gewesen, eine solche zu erfinden, und es wäre gewiss sehr auffallend, wenn die Function $1+\alpha t$ nur für den sehr willkürlichen Anfangspunkt Null, den Gefrierpunkt des Wassers, Giltigkeit besässe. Auch wird Jedermann einräumen, dass z. B. die aus derselben folgenden Gleichungen

$$(1+0{,}003665)^{100} = 1{,}4417 \text{ und } 1+0{,}003665 \,.\, 100 = 1{,}3665$$

nicht mit einander bestehen können, was doch der Fall sein müsste, wenn

$$V_1 = V_0(1+\alpha),\ V_2 = V_1(1+\alpha) \ldots V_{100} = V_{99}(1+\alpha)$$

sein soll.

Bezeichnet man nun mit α den constanten und wahren Ausdehnungscoefficienten der Luft und geht zu unendlich kleinen Intervallen ∂t über, so ist offenbar

$$V_t = (1+\alpha\,\partial t)^{t:\partial t} = e^{\alpha t} = f(t)$$

und demzufolge der wahre Ausdehnungscoefficient bei der Temperatur t^0 über Null

$$\alpha = \frac{\partial V_t}{V_t\,\partial t} = \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Setzt man $e^{100\alpha} = 1{,}3665$, so ergiebt sich hieraus $\alpha = 0{,}003122$ und es entspricht also der Ausdehnung des jedesmaligen Volumens um 0,003122 dasselbe einem wirklichen Centesimalgrade. Der Werth $\alpha_1 = 0{,}0031275$, welcher aus $(1+\alpha)^{100} = 1{,}3665$ folgt, weicht wenig von dem vorigen ab. Aus dem oben entwickelten Grunde ist es offenbar auch nichts mit dem sogenannten absoluten Nullpunkte -273^0 C., denn aus $e^{\alpha t}=0$ folgt $t = -\infty$ und es ist $e^{-0{,}003122\,.\,273} = 0{,}4264$.

Die von **Regnault** als Norm betrachteten Temperaturangaben des Luftthermometers dürften dadurch wesentlich geändert werden.

Aus den Gleichungen

$$1+50\,.\,0{,}003665 = e^{0{,}003122\,t_1},\ 1+200\,.\,0{,}003665 = e^{0{,}003122\,t_2},$$
$$1+300\,.\,0{,}003665 = e^{0{,}003122\,t_3}$$

folgen die Werthe

$$t_1 = 53{,}9^0\,\text{C.},\ t_2 = 176{,}12\,\text{C.},\ t_3 = 237{,}57,$$

welche beziehendlich den Temperaturangaben des Luftthermometers 50°, 200° und 300° entsprechen würden. Demzufolge muss denn auch die Ausdehnung des Quecksilbers viel unregelmässiger sein und rascher wachsen, wie es der Annäherung des Quecksilbers an den dampfförmigen Aggregatzustand bei 300° auch entsprechend ist.

Wir gehen zur Prüfung der Tabelle von Professor **Wüllner** über. **Regnault** giebt, wie vorhin bemerkt, für das Volumen des Quecksilbers bei der Temperatur t des Luftthermometers die Formel

$$V_t = V_0(1 + at + bt^2),$$

wo

$$a = 0{,}00017905 \text{ und } b = 0{,}0000000252$$

ist. Demnach muss also der wahre Ausdehnungscoefficient bei der Temperatur t betragen

$$\beta = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\partial V_t}{V_t \partial t} = \frac{a + 2bt}{1 + at + bt^2}.$$

Wüllner leitet nun auf elementarem Wege die unrichtige Gleichung $\beta = a + 2bt$ ab, indem er Glieder vernachlässigt, welche mit berücksichtigt werden müssen. Die gegebene Entwickelung ist folgende: Sei

$$\alpha = a + bt$$

der mittlere Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers von 0^0 bis t^0,

$$\alpha' = a + bt'$$

derselbe von 0^0 bis t'^0, so lässt sich aus den mittleren Coefficienten der wahre berechnen. Die Volumina der Quecksilbermenge bei den Temperaturen t und t' seien V_t und $V_{t'}$, so ist

$$V_t = V_0(1 + \alpha t), \quad V_{t'} = V_0(1 + \alpha' t'),$$

folglich

$$V_{t'} = V_t \frac{1 + \alpha' t'}{1 + \alpha t} = V_t(1 + \alpha' t' - \alpha t + \ldots).$$

Nun werden die folgenden Glieder dieser Reihe vernachlässigt, was jedoch nicht gestattet ist; denn berücksichtigt man noch die Glieder von der Kleinheit zweiter Ordnung, so erhält man

$$\beta = Lim \frac{V_{t'} - V_t}{(t' - t) V_t} = a + (2b - a^2)t + (a^3 - 3ab)t^2,$$

wofür man setzen kann

$$\beta = \frac{a + 2bt}{1 + at + bt^2}.$$

Demgemäss sind die von Wüllner nach der Formel $\beta = a + 2bt$ berechneten wahren Ausdehnungscoefficienten zu gross und müssen noch durch das jedesmalige Volumen V_t dividirt werden. Dadurch wird beispielsweise

$$\beta_{300} = 0{,}00018318 \text{ statt } 0{,}00019413$$

und auf diese Art also der wahre Ausdehnungscoefficient β kleiner als der mittlere $\alpha = a + bt = 0{,}00018658$. Hierin liegt nun ein neuer Widerspruch, denn man sollte doch offenbar erwarten, dass bei stets wachsendem Differentialquotienten $\beta = f'(t) : f(t)$ der mittlere Differentialquotient kleiner als der wahre bleibe. Dies rührt nun offenbar her von dem Princip Regnault's, für das Volumen V_t die algebraische Function

$$V_0(1 + at + bt^2)$$

zu setzen. Setzt man dagegen, der Natur der Sache entsprechend, an die Stelle der algebraischen Function von t die Exponentialfunction

$$V_t = e^{a_1 t + b_1 t^2} = e^{\alpha_1 t},$$

so wird der Widerspruch gehoben. Man erhält nämlich

$$\beta_1 = \frac{\partial V_t}{V_t \partial t} = a_1 + 2 b_1 t$$

und nach einer von Regnault etwas abweichenden Bestimmung die Constanten

$$a_1 = 0{,}00017900, \quad b_1 = 0{,}00000000868,$$

wogegen nach Regnault

$$a_1 = 0{,}00017905 \text{ und } b_1 = \tfrac{1}{2}(a^2 - 2b) = 0{,}0000000092$$

sein würde.

Demzufolge erhält man nun für $t^0 = 300^0$ den Werth

$$\alpha_1 = 0{,}00018160,$$

also kleiner als

$$\beta_1 = 0{,}00018421 \text{ (beobachtet } 0{,}00018389).$$

Zur Vergleichung stellen wir hier die nach Regnault's Princip berechneten Ausdehnungscoefficienten α und β mit den neuen α_1 und β_1 zusammen, indem wir, um Verwirrung zu vermeiden, die Angaben des Luftthermometers einstweilen noch als richtig betrachten.

Tabelle der Ausdehnung des Quecksilbers nach Wüllner.

Angaben des Luftthermometers.	Angaben des Quecksilberthermometers.	Volumen des Quecksilbers.	Mittlerer Ausdehnungscoefficient α.	Wahrer Ausdehnungscoefficient β.
0°	0,000°	1,000000	0,00017905	0,00017905
10	9,872	1,001792	0,00017925	0,00017918
20	19,776	1,003590	0,00017951	0,00017936
30	29,709	1,005393	0,00017976	0,00017954
40	39,668	1,007201	0,00018002	0,00017973
50	49,650	1,009013	0,00018027	0,00017990
60	59,665	1,010831	0,00018052	0,00018008
70	69,713	1,012655	0,00018078	0,00018025
80	79,777	1,014482	0,00018102	0,00018042
90	89,875	1,016315	0,00018128	0,00018060
100	100,000	1,018153	0,00018153	0,00018078
140	140,776	1,025555	0,00018254	0,00018143
180	182,003	1,033039	0,00018355	0 00018207
200	202,782	1,036811	0,00018405	0,00018239
240	244,670	1,044415	0,00018506	0,00018299
280	287,005	1,052100	0,00018607	0,00018357
300	308,340	1,055973	0,00018658	0,00018388

Zur Berechnung der folgenden Tabelle wurden die Constanten a_1 und b_1 aus den beobachteten Werthen von V_t mittels der Function $e^{a_1 t + b_1 t^2}$ auf's Neue berechnet. Es ergab sich

$$a_1 = 0{,}00017900\,,\quad b_1 = 0{,}00000000868\,,$$

also beide etwas kleiner, als die aus den Constanten a und b sich ergebenden Werthe

$$a_1 = 0{,}00017905\,,\quad b_1 = 0{,}0000000092.$$

Angaben des Luftthermometers.	Mittlerer Ausdehnungscoefficient α_1.		Wahrer Ausdehnungscoefficient β_1.	
	Berechnet:	Beobachtet:	Berechnet:	Beobachtet:
0°	0,00017900	—	0,00017900	—
10	0,00017909	0,00017904	0,00017917	0,00017913
20	0,00017917	0,00017918	0,00017934	0,00017940
30	0,00017926	0,00017928	0,00017952	0,00017958
40	0,00017935	0.00017938	0,00017969	0,00017976
50	0,00017943	0,00017941	0,00017987	0,00017984
60	0,00017952	0,00017955	0,00018004	0,00018011
70	0,00017961	0,00017965	0,00018021	0,00018038
80	0,00017969	0,00017973	0,00018039	0,00018036
90	0,00017978	0,00017981	0,00018056	0,00018062
100	0,00017987	0,00017990	0,00018074	0,00018078
140	0,00018022	0,00018024	0,00018143	0,00018144
180	0,00018056	0,00018058	0,00018212	0,00018213
200	0,00018074	0,00018075	0,00018247	0,00018249
240	0,00018108	0,00018107	0,00018316	0,00018303
280	0,00018143	0,00018139	0,00018386	0,00018365
300	0,00018160	0,00018154	0,00018421	0,00018389

Husum. Dr. LUDWIG MATTHIESSEN.

XV. Zur Lehre von den Polyedern.

Noch ein Nachtrag zu früheren Aufsätzen in dieser Zeitschrift* über denselben Gegenstand.

Man betrachtet den Euler'schen Lehrsatz über Polyeder in seiner ursprünglichen oder in seiner erweiterten Form gewöhnlich als den schärfsten Ausdruck für die Abhängigkeit zwischen Ecken-, Flächen- und Kantenzahl der Polyeder. Mir scheint dies jedoch nicht richtig, da die Anzahl der Ecken durch die Anzahl und Beschaffenheit der Flächen schon allein bestimmt ist und neben der Flächenzahl z. B. die Zahl der Kanten nicht willkürlich bestimmt werden darf. Genauer scheint mir diese Abhängigkeit durch den von mir bewiesenen Satz ausgedrückt zu werden,

* Bd. XIV S. 337.

dass die Oberfläche eines e-eckigen Polyeders, wenn dieselbe $2n+1$-fach zusammenhängend ist, d. h. wenn sich n geschlossene Linien, die einander nicht schneiden, auf ihr ziehen lassen, ohne dass sie zerstückt wird, entweder aus $2e+4(n-1)$ Dreiecken zusammengesetzt ist oder durch Diagonalen in so viele Dreiecke zerlegt werden kann.

Ist f die Anzahl der Flächen, und zwar $f_3, f_4 \dots f_i$ beziehungsweise die der Dreiecke, Vierecke, i-Ecke; bezeichnen ebenso $e_3, e_4 \dots e_i$ die Anzahl der Dreikante, Vierkante, i-Kante; ist endlich k die Zahl der Kanten und sind Polyeder mit mehrfach begrenzten Flächen ausgeschlossen, so lässt sich der obige Satz in folgender Gleichung ausdrücken:

I) $$f_3 + 2f_4 + 3f_5 + 4f_6 + \dots = 2(e + 2n - 2).$$

Diese Gleichung und die folgenden drücken die ganze Abhängigkeit aus, soweit sie sich überhaupt arithmetisch ausdrücken lässt:

II) $$f_3 + f_4 + f_5 + \dots = f,$$

III) $$e_3 + e_4 + e_5 + \dots = e,$$

IV) $$2k = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \dots = 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \dots.$$

Aus IV) und I) folgt mit Rücksicht auf II) ohne Weiteres

$$2k = 2f + 2(e + 2n - 2)$$

oder

V) $$e + f = k + 2(1 - n).$$

Aus II) und IV) ergiebt sich ferner, dass die linke Seite der Gleichung I) ersetzt werden kann durch $2k - 2f$, und wenn man dann noch für $2k$ den Werth $3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \dots$, endlich für e auf der rechten Seite den Werth aus III) substituirt und reducirt, so erhält man

VI) $$e_3 + 2e_4 + 3e_5 + 4e_6 + \dots = 2(f + 2n - 2),$$

d. h.: Werden alle mehr- als dreiseitigen Ecken eines Polyeders von $(2n+1)$-fach zusammenhängender Oberfläche durch Dreikante zerlegt, so ist die Anzahl aller Dreikante an den sämmtlichen Eckpunkten desselben um $4(n-1)$ grösser, als die doppelte Anzahl seiner Flächen.

Diese Relation scheint bisher noch nicht bemerkt worden zu sein. In Verbindung mit I) zeigt sie, dass die Anzahl der Flächen eines Polyeders ebenso durch die Zahl und Beschaffenheit seiner Ecken bestimmt ist, wie die Anzahl der Ecken durch die Zahl und Beschaffenheit seiner Flächen.

Die beiden Gleichungen I) und VI) scheinen mir der beste Ausgangspunkt für Untersuchungen über die Anzahl und Beschaffenheit der Polyeder, welche gewissen Bedingungen über die Zusammensetzung ihrer Oberfläche entsprechen sollen. Handelt es sich z. B. um die Auffindung der verschiedenen Arten von Polyedern von gleicher Ecken- oder Flächenzahl, so zeigen dieselben sofort die Grenzen, innerhalb deren dann die Anzahl der Flächen oder Ecken variiren kann.

Statt der Gleichungen I) und VI) kann man nämlich zunächst die Ungleichungen schreiben:

$$f \leqq 2e + 4n - 4,$$
$$e \leqq 2f + 4n - 4,$$

und statt dieser:

$$\text{VII)} \quad \begin{cases} 2e + 4n - 4 \geqq f \geqq \dfrac{e}{2} - 2n + 2, \\ 2f + 4n - 4 \geqq e \geqq \dfrac{f}{2} - 2n + 2. \end{cases}$$

Schaffhausen. J. C. Becker.

XII.

Thabit („Thebit") ben Korra

Bibliographische Notiz

von

Dr. M. Steinschneider
in Berlin.

In meiner Abhandlung „Zum *Speculum astron.* des Albertus Magnus" (Zeitschr. Bd. XVI S. 357 flgg.) habe ich unter einzelnen Artikeln mich auf das Nöthigste beschränkt und die weitere Ausführung einigen kleineren Specialartikeln vorbehalten. Es scheint mir, schon wegen der Zwischenräume, in welchen sie Aufnahme finden dürften, angemessen, dieselben in möglichster Unabhängigkeit von einander zu halten, so dass jeder einzelne ein abgeschlossenes Ganzes bilde und es daher auch auf die Reihenfolge nicht ankomme.

Die gegenwärtige Notiz diene zugleich als Ergänzug zu dem Artikel „Thebit" (Zeitschr. Bd. XVI S. 387 Nr. 43).

Bei Fabricius (*Bibl. lat. med. et inf. VI*, 222, *ed.* 1754, vergl. Bandini im Index V, 672) liest man: *Thebites, Astrologus et Mathematicus, ben Chorath, Ex-Judaeus, quem alii Hispanum, alii Anglum credunt. Vixit a.* 1190. *et scripsisse dicitur* [ich füge hier der Bequemlichkeit halber eine fortlaufende Ziffer hinzu]: 1. *De significationibus Planetarum*, 2. *de capite et cauda Draconis*, [3. *Mathematum rudimenta quaedam*, auch bei Tanner S. 707, fehlt bei Fabric.,] 4. *de motu octavae Sphaerae*, 5. *Demonstrationes in Almagestum*, 6. *Additiones in Sphaerica Menelai*, 7. *de diffinitionibus*, 8. *de imaginationibus* [lies *imaginibus*], 9. *de Magia naturali.*

Als Jude des XIII. Jahrhunderts von ungewissem Vaterlande erscheint Thebit noch im Jahre 1857, im Catalog der Universitätsbibliothek in Cambridge unter Nr. 1767. Die Bezeichnung als spanischer Ex-Jude beruht wahrscheinlich auf Confusion mit dem Uebersetzer Johannes Hispalensis (auch *Hispanensis*), wie ich in der Zeitschrift der Deutschen

morgenländ. Gesellschaft XVIII, 135 bemerkte. Die Angabe *Anglus* 1190 scheint auf Robert Castrensis (s. Zeitschrift für Mathem. XVI, 392) zu führen; doch habe ich die erste Quelle, welche Thabit zum Engländer macht, noch nicht aufgefunden. Fabricius citirt *Balaeus*, Centuria XII, 2; Letzterer (S. 77) lässt Thabit unter Heinrich VI. und zugleich als Zeitgenossen des *Alfraganus* (!) um 1190, „also beinahe bis zur Zeit Friedrich's II." leben. An der Spitze seines Artikels steht: *ex Lelando et aliis* (was auch Tanner wiederholt). Ich kann aber bei *Jo. Lelande* (*Commentarii de scriptoribus Brittan.*, ed. Ant. Hall, 2 Theile 8., Oxonii 1709) einen Artikel Thebit oder Thabit weder im Index, noch an der entsprechenden Stelle, Ende XII. Jahrh., finden. Doch ist es nicht meine Absicht, alle alten Irrthümer, die sich in nichtorientalistischen Kreisen wiederholen, zu beleuchten.

Thabit ben Korra, der Harranier, mit dem Beinamen Abu-'l-Hasan[1] (833—901), der berühmteste, vielseitige Gelehrte unter den Sabiern, verbesserte Uebersetzungen aus dem Griechischen ins Arabische, commentirte solche und verfasste allerlei Monographien. Eine vollständige Aufzählung seiner zahlreichen Schriften ist noch nirgends zu finden; eine Uebersicht der vorzüglichsten gab Chwolsohn in seinem bekannten Werke „die Ssabier" (Petersburg 1856, I, S 561 flgg.); vergl. auch Einzelnes in meinen Abhandlungen in der Zeitschr. der D. Morg. Gesellsch. VIII, 383, XVIII, 135, XXIV, 348, 374, XXV, 426; in der Hebr. Bibliogr. I, 105; Zeitschr. f. Math. X, 457—458, 469, 470, 479—485, 488, 491, XII, 34; Virchow's Archiv Bd. 40 S. 106 Anm., Bd. 52 S. 491. (S. Nachtrag.)

Von seinen Arbeiten haben sich vorzugsweise mathematische in lateinischen Uebersetzungen erhalten, wo er gewöhnlich „Thebit filius Corat" heisst, wenn der Name nicht sehr verstümmelt ist. Seine Bedeutung in der Astronomie beleuchtet schon Riccioli (*Almag. nov. p. XLV s. v.*) durch einzelne Daten.

Seine auf Uebersetzungen und Bearbeitungen älterer Werke bezügliche Thätigkeit bleibt an dieser Stelle aus verschiedenen Gründen unberücksichtigt. Die nachfolgende Zusammenstellung umfasst zwar möglicherweise auch Schriften, deren eigentlicher Verfasser nicht Thabit selbst war. Da ich aber fast alle nicht aus Autopsie kenne, so genügt für mich der Umstand, dass sie in den anzuführenden Quellen ihm als Autor beigelegt werden. Was die Reihenfolge betrifft, so lasse ich die gedruckten vorangehen und verzeichne unter diesen auch Handschriften, da die Drucke so selten sind, dass ich auf der hiesigen k. Bibliothek nur zufällig vor Kurzem einen einzigen auffinden konnte, der anderweitig unbekannt scheint, andererseits aus der Menge der Handschriften die grosse Verbreitung der Werke, also ihr Einfluss auf die wissenschaftlichen Kreise des Mittelalters

[1] Daher *Patris Asen* in Cod. Paris lat. 9335 (bei Delisle, *Inventaire* etc.); *Patris Asseti* in Cambr. Univ 1935,[14]; s. unten Anm. 10.



hervorgeht. Von den nur handschriftlich erhaltenen zähle ich zuerst diejenigen auf, welche sicherer und theilweise bekannt sind.[2]

1. *De tribus figuris magicis*, 4., *Francof.* 1559 (fehlt bei Lalande, Bibliogr. S. 83). Ich habe anderswo (D. M. Ztschr. XVIII, 135) die Vermuthung ausgesprochen, dass diese Schrift von den sogenannten Decanen handle, d. h. von den drei Figuren, welche in jedem der 12 Sternbilder des Zodiak, also in je 10 Grad der Himmelsperipherie, aufsteigen sollen und ein bekanntes Thema der Astrologen bilden (vgl. D. M. Ztschr. XXIV, 341, 383; XXV, 397). Ich habe bis jetzt das Buch nicht auftreiben können. — Identisch ist wohl:

Liber imaginum, oder *de imaginibus astronomicis.* Den Uebersetzer Johannes Hispalensis[3] nennen die Pariser HS. 7282, vgl. 7337; Cod. Medic. 29 (s. unten); siehe auch Catal. MSS. Angl. II, 127 Nr. 2456,[9], II, 246 Nr. 853.

Die HS. Ashmol. 346,[65] bei Black S. 255 beginnt, nach der bekannten Eulogie: *In nom. pii et misericordis Dei*, mit den Worten: *Dixit Thebit, qui geometrie aut philosophie expers fuerit.* Ein solcher Anfang wäre freilich nicht sehr instructiv, wenn wir nicht von anderswoher bessere Auskunft erhielten. Bandinus II, 81 Cod. 24,[2]: *de scientia omigarum* [falsch aufgelöste Abbreviatur], *i. e. imaginum*, beginnt: *Dixit Aristoteles, qui Philosophiam et Geometriam omnemque aliam scientiam legerit.* S. 85 Cod. 29,[10] *de imaginibus lib.*, von *Jo. Hispalensis* übersetzt, beginnt: *Dixit Tesbith ben Corah. Dixit Aristoteles* etc. Ebenso liest man im *Speculum Astronomicum* Cap. X [§ 69 der von Jessen vorbereiteten Ausgabe]: *Super istis imaginibus invenitur unus liber Thebit eben Chorath qui sic incipit: Dixit Thebith ben chorath, dixit Aristoteles qui philosophiam* (in der Ed. *s. l. e. a.* falsch *philosophorum*), *in quo sunt imagines super fortuna et impedimento, super substantia et negotiatione, super principatu et praelatione, super coniunctione atque separatione.*

Das Ende lautet bei Black: *sine dubio. Deo sit laus Amen;* bei Bandini: *Intellige quod exposui tibi* (*si Deus voluerit* unter Cod. 29), ebenso in Cambr. Univ. III, 549 Nr. 1935; in Wien II, 65 Nr. 2378,[4]: *melius indicavi;* vgl. auch Arundel 268,[11] (I, 80), Harl. 13,[8], 3647,[13] (III, 48).

In Cod. Vatic. 495 bei Montfaucon (Bibl. Biblioth. S. 25, bei Heilbronner Histor. Mathes. S. 540, § 8,[11] und daher im Index getrennt) lautet

---

[2] Bei Angabe der Handschriften nenne ich die besondere Sammlung, z. B. Arundel, Harleian (im brit. Museum), Ashmolean, Canoniciani (in Oxford), wenn solche in besonderen Catalogsbänden verzeichnet sind. Weitläufigere Angaben würden Denjenigen Nichts nützen, welchen die Cataloge unzugänglich sind; für Andere sind sie überflüssig, ermüdend und oft störend.

[3] Unter demselben habe ich im *Catal. libr. h. bodl. p.* 1403 irrthümlich die Ausgaben Ven. 1491 und 1521 angegeben, die Veranlassung s. unten unter 2.

Thabit's Namen Jebioth Benchorezen, in Cod. Vat. Petav 350, 495, 492 (so bei Montf. S. 90, Heilbr. S. 545 § 20,[1]) Thebith Benchozath.

2. *De [recta] imaginatione*[4] *sphaerae* (*coelestis et circulorum eius diversorum* — so der längste Titel; der kürzeste: *de sphera et de circulis*). Der Catalogus libr. impress. in Bibl. Bodl. letzte Ausg. III, 609[b], verzeichnet einen Druck fol. Venet. per Oct. Scotum *s. a.* Hierzu habe ich vor langer Zeit notirt: „ed. 1491, 1521, Panzer“, ohne Zweifel in Bezug auf den Drucker[5]. In der That ist die Ausgabe der Sammlung (*Sphera cum commentis* etc.), zu welcher unser Schriftchen als Anhang mit besonderer Pagination gedruckt ist, im Jahre 1518 erschienen und sehr genau von Boncompagni (*Delle versioni fatte da Platone Tiburtino*, s. S. 15, 23) beschrieben. Derselbe war so freundlich, mir im Juli 1864 folgende Mittheilung über unser Schriftchen zu machen.

Der Anfang lautet: *Nos iuxta imaginationem rectam inchoantes astrologiam intelligamus mundum*[6] *esse sphericum corpus; et solidum: cuius centrum est punctus* [für *punctum* nicht ungewöhnlich], *qui est in medio terrae: et centrum terrae dicitur.* Ende (fol. 1 *verso col.* 1 *lin.* 13—16): *Habemus quoque eorum axes* (?) *circulos aequidistantes: et suorum polorum magnos circulos. habemus etiam çodiacum cum suis appenditiis non minus ceteras efficacissima.* (so) *Haec sunt que introducendis*[7] *et p̄.* [*primo*] *imaginanda occurunt.*

Der Druck vom Jahre 1518 gehört zu den seltenen Büchern; er fehlt z. B. auf der hiesigen k. Bibliothek. Hingegen sind viele Handschriften bekannt; z. B. in Paris Nr. 7195,[12] (erwähnt bei Delambre *l. c.* S. 75), 7272, 7298, 7333; Catal. MSS. Angliae I, 109 Nr. 2083,[9], S. 127 Nr. 2456,[8], Nr. 2458,[15], S. 317 Nr. 6750 (Ashmol. 1522,[14] bei Black S. 1428, bei Heilbronner, Hist. Math. S. 622 § 320,[9]); Cod. Aulae Mariae Magd. I, 1: *tractatus duo* ... (falsch *imagine* und *explicit ... de hiis que indigent* etc., also aus der unten, Nr. 4, zu nennenden Schrift, was Coxe[8] nicht anmerkt). Ferner bei Bandini II, 6 Plut. 29 Cod. 3,[5], S. 54 Cod. 38,[4], S. 83 Plut. 30, 28,[25]; Bd. IV S. 131 Cod. 3,[10]; S. 133 Cod. 6,[12]; Wien II, 66 Nr. 2386,[2], IV, 39 Nr. 5145,[7], S. 48 Nr. 5277,[30], S. 98 Nr. 5311,[2]. *Jebioth* bei Montfaucon S. 298; bei Heilbronner S. 553 § 43,[2].

3. *De motu octavae sphaerae*, auch *de motu septem errantium et octavae sphaerae* (Bibl. St. Marcus in Florenz, Armar. 4 Nr. 27, bei Montfau-

---

[4] Falsch *magnitudine* bei Delambre, *Hist. de l'astron. du moyên âge, p.* 75.

[5] Diese Notiz ist dann aus meinen Collectaneen irrthümlich zu Nr. 1 gezogen und daher die oben erwähnte irrthümliche Angabe.

[6] *Vel coelum esse spiritum* (!) *corpus* etc. bei Bandini II, 6.

[7] *in astrolabio primo consideranda et imaginanda occurunt*, bei Bandini *l. c.*, hingegen S. 84 Cod. 28,[45]: *et circulorum eius diversorum.*

[8] Im Index unter Thebit S. 106 ist unser Schriftchen übergangen, auch das Uebrige nicht richtig geordnet.

con S. 428, Heilbronner S. 558 Nr. 21), häufig *de (in) motu accessionis et recessionis;* ist zwar hinter Sacrobosco, Gerard's *Theorica planetarum* u. s. w., Bologna 1480 und Venedig 1518 (s. Boncompagni, *Della vita ... di Gherardo Cremon. p.* 85, *Delle versioni ... da Platone Tiburtino p.* 13) gedruckt; aber diese Ausgaben sind so selten, dass Delambre (*Hist. l. c. p.* 73 *sequ.*) bei seiner Analyse der schwer verständlichen Uebersetzung sich der HS. Par. 7195 bediente. Ueber die von mir kürzlich aufgefundene Ausg. Leipzig 1509 s. Zeitschr. f. Math. XVI, 387. Anfang: *Ymaginabor sphaeram aequatoris diei* (falsch *equacionis dici* bei Coxe III, 815); Ende: *super minorem numerum cum quo intrasti in linea numeri.*

In dem Verzeichniss der Uebersetzungen Gerard's von Cremona (bei Boncompagni S. 5) findet sich: *Thebit de motu accessionis et recessionis, tract. I.* Wahrscheinlich ist es die Uebersetzung Gerard's, die wir in den Ausgaben und vielen HSS. besitzen, insbesondere in dem berühmten Pariser Cod. lat. 9335 f. 141 (früher Suppl. 49, bei Libri, *Hist. des sciences math. I,* 299), welcher eine Anzahl Uebersetzungen Gerard's mit oder ohne Nennung seines Namens enthält[9]. Ich identificire diese Titel ohne Bedenken, da es sich in dem Schriftchen um die sogenannte „Trepidationstheorie" handelt (s. D. M. Ztschr. XXIV, 374). Ohne eigentlichen Titel citirt Albertus Magnus *l. c.* § 10: *Corrigitur autem apud Thebit motus sphaerae stellarum fixarum in libro qui sic incipit: Imaginabor sphaeram.*

Handschriften finden sich z. B. in Paris 7195, 7298, 7333, 7416 B., 11251, 14068; Catal. MSS. Angl. I, 109 Nr. 2083,[10], S. 300 Nr. 6567 (bei Heilbronner S. 618 § 317,[7]); *patris*[10] *Tebit* S. 317 Nr. 6570 (Ashmol. 1522,[12], bei Black *l. c.*, Heilbronner *l. c.* unter 2); Cod. canonic. misc. 499,[10] (bei Coxe III, 815); Coll. Corp. Chr. 254,[10] (Cat. MS. Angl. I, II, 55 Nr. 1721, bei Heilbr. S. 628 § 339,[6]), Aula Mar. Magd. I, 2; Basel f. II, 33 (bei Hähnel S. 522); Arundel 268,[9], Harl. 13,[6], 3647,[11] (III, 48); Cambr. 1767,[10] (Anf. *Ymaginibus*, wohl Fehler des Catalogs) und unvollst. 1935,[14] (III, 549); Wien II, 66 Nr. 2368,[4]; IV, 84 Nr. 5277,[28] (*de imaginatione motus*); mit Commentar (anf. *Via motus, et maxime corporum,* Ende *clarius apparebunt*) IV, 98 Nr. 5311,[2]; Bandini IV, 130 Plut. 17 Cod. 1,[3], S. 131 Cod. 3,[8], S. 133 Cod. 6,[10].

4. *De his* [*eis, hiis*] *quae indigent expositione antequam legatur Almagestum;* anf. *Aequator diei est circulus major, qui describitur super duos polos;* Ende: *aut propinqui oppositioni Solis erunt tunc retrogradi* (Bandini II, 131 Cod. 3,[9], S. 133 Cod. 6,[11]); wird schon mit obigem Titel von Roger Baco citirt (s. Ztschr. f. Math. X, 457); auch in Paris 7195, 7215, 7267, 7298, 7333, 9335 f. 24, 14068; Cat. MS. Angl. I, 109 Nr. 2083,[11], S. 127 Nr. 2458,[14]; II P. III S. 18 Nr. 186,[9] (Heilbr. S. 643 § 443,[14]); Arund. 268,[10]; Harl. 1,[18], 13,[7],

---

[9] Zeitschr. f. Mathem. X, 464, 474; Neue Mittheilungen bei V. Rose, *Anecdota graeca et graecolat. II,* 1870 S. 291—292, u. A. über *Tideus fil. Theodori.*

[10] Vielleicht fehlt: „Hasan"; Thabit hiess Abu-'l-Hasan, vgl. oben Anm. 1.

3 647,[12]; Wien IV, 39 Nr. 5145,[6] (anf. „*quatuor* [!] *dici est*"), S. 84 Nr. 5277,[29] und (*Libellus de his que exponuntur*...) S. 136 Nr. 5498,[3]; Cod. Coll. Univ. Oxon. 41,[7] (Coxe S. 12) und Coll. Aulae M. M. 1,[1] (zweite Abhandl.). — *De exp. eorum que requiruntur ante Almag.* Cambr. Univ. III, 405 Nr. 1767,[12].

Dasselbe Schriftchen hat noch verschiedene Titel erhalten. Im Verzeichniss der Uebersetzungen Gerard's von Cremona (s. Zeitschr. X, 457): *Lib. tembit De expositione nominum Almagesti*, wofür *De exp. vocabulorum Almag.* im Titelindex von Cod. Ashmol. 1522 (Ztschr. *l. c.*) und 1796,[25] (Black S. 1508, Heilbr. S. 622 § 320,[9]); *de expositione nominum astronomiae* Harl. 531,[10] (I S. 342). Daher bei Albert M. im *Specul. astr.* § 12 (Ztschr. XVI, 387): *de definitionibus.*

Endlich: *Opusculum pro declaratione Almag. Ptolomaei*, Wien IV, 59 Nr. 5209,[6]; — *Praecognitio Almag.* IV, 115 N. 5392,[3]; — *Introductorium in Almag.* IV, 98 Nr. 5311,[4].

5. *Liber Carastonis sive liber de statera*, ein Schriftchen über die Handwaage (s. die Anführungen in meinen *Lettere a Don B. Boncompagni, p.* 19, Zusatzblatt vom Januar 1867, und Ausführliches bei Curtze „Analyse der HS. R. 4,[2] in Thorn", im Supplementheft zum 13. Jahrg. der Zeitschr. f. Math. 1868, Sonderabdruck S. 13 flgg. und 56)[11]. Handschriften, zum Theil anonym, finden sich in ehemal. St. Marco Bibl. in Florenz 184; Paris 7377 B.[3], 7434,[6], 8680 A., 10260: anonym „*Lib. Karastoni de ponderibus*" — vielleicht schon missverständliche Auffassung des Titels als Autornamen (wie in Heilbronner's Index III *s. v. Carasto*, Curtze S. 13), ebenso *Lib. Carastonis de pond.* im Vatic., Reg. Suec. 1235 (bei Montfaucon S. 25, Heilbr. S. 540 § 8,[5]), infolge einer Randbemerkung —; *Incipit lib. Kar. de pond.* in Cod. Vat. 2975 f. 176—183 aus dem XVI. Jahrh. (Curtze *l. c.*) und blos *lib. de ponderibus* in Wien IV, 57 Nr. 5203,[24]. Ausserdem in Thorn und Basel f. II, 33 (Curtze S. 56).

Aus der HS. in Florenz ist Anfang der Einleitung (*Continuet Deus conservationem tuam* etc.) und Ende (*et faciet te cognoscere casum erroris et est finis*, eine Art Schlussbemerkung) mitgetheilt in meinen *Lettere p.* 8; Curtze (S. 14) giebt aus der Thorner HS. den (eigentlichen) Anfang *Omnium duorum spatiorum*; so beginnt auch die Wiener, deren Ende *proportio ponderis ge ad pondus cb* vielleicht unvollständig; aber auch sonst finden sich Ab-

---

[11] Der Unterschied zwischen *Caraston* und *Rummane* ergiebt sich aus folgender Stelle eines anonymen hebräischen Commentars über die Psalmen (Cod. Bodl. bei Uri Nr. 102, fl 37*b*, zu 58,[8]?): „Dieses Gewicht (פלס) ist nicht קרסטון, sondern ein Gewicht (משקל), welches arabisch רומאנה (رمّانة) heisst, das ist ein eiserner Stab, auf welchem Zeichen angebracht sind, um das verschiedene Gewicht (המשקלים) zu erkennen; man hängt den Gewichtsstein, welcher bis 6 *Litre* wiegt, auf die als Zeichen dienenden Punkte." (S. Nachtrag.)

weichungen, welche mir die Vermuthung aufdrängen, dass ausser Gerard's (von Cremona) Uebersetzung noch eine andere Bearbeitung anzunehmen sei?

6. *De figura quae nominatur sector*, oder *de figura alhata* (*Catha?*), übersetzt von Gerard von Cremona, nach dem Verzeichniss seiner Uebersetzungen. Nachdem ich wiederholt (zuletzt in der Zeitschr. XVI, 391) von diesem, bisher wenig bekannten Schriftchen gesprochen, worüber noch Näheres von Curtze zu erwarten ist, genüge hier eine kurze Angabe des bisher Ermittelten. Die hebräische Uebersetzung beginnt mit dem Worte: *Intellexi*, wie das anonyme Werk bei Albertus M., *Specul.* § 10, unmittelbar hinter *flores* des Johannes (wofür die Var. *iebitim = tebitem*? Zeitschr. XVI, 373 — S. 390 habe ich die Angabe der Stelle vernachlässigt —). Ueber die lateinischen HSS. in Paris 7377 B.[4], Oxford (Catal. MSS. Angl. I, 300 Nr. 6567, wo „Thebit *de proportionibus*" vorangeht, bei Heilbr. S. 618 § 317,[7]) und Basel f. II, 33 (bei Curtze *l. c.* S. 56) ist vorläufig noch nichts Näheres bekannt.

7. *De quantitatibus stellarum*, soweit übereinstimmend in allen HSS., mit Ausnahme einer Wiener (s. unten); einige fahren fort: *et planetarum*, oder noch: *et* (*primo*) *terrae*. Handschriften: Paris 7215,[6], 7298, 7329, 7333; Medicea bei Bandini IV, 132 Cod. 3,[11]; S. 133 Cod. 6,[12]; Catal. MSS. Angl. I, 109 Nr. 2083,[10]; S. 317 Nr. 6750 (Heilbr. 622 § 320,[9] ist Ashmol. 1522 bei Black S. 1428); Aula M. M. (Oxford) 1, 3; Arundel 268,[12]; Harl. 3647,[11]; Cambr. Univ. III, 405 N. 1767,[13]; Wien IV, 39 Nr. 5145,[8] (Tit. *De quant. corporum supercoelestium et orbium ipsorum et distanciis*) und IV, 98 Nr. 5311,[5]. — Das kleine Schriftchen beginnt (nach Black): *Ptolomeus et alii sapientes posuerunt corpus terre communem mensuram, qua metiebantur stellarum corpora*; als Ende wird meist angegeben: *sicut potest videri in sphera*; in Wien 5311: *sicut in barcham* (!) *mari*; bei Black: *quia quiddam modicum remansit.*

b) Sollte *De diametro terrae planetarumque* in Cod. Canonic. misc. 517,[2] (Coxe S. 829), nur 1 Blatt umfassend, ein Fragment daraus sein?

c) Longitudines stellarum a terra secundum Thebit in Paris 15122 (bei Delisle S. 74) ist vielleicht oben in dem Titel des Wiener Cod. durch „*et distanciis*" angedeutet?

Hängt diese Nummer 7 irgendwie mit Nr. 4 zusammen?

8. *De proportionibus*, Cat. MSS. Angl. I, 300 Nr. 6564 (Heilbr. 618 § 317,[7]), ist mir verdächtig; vgl. oben unter 6.

9. *De proprietatibus quarundam stellarum — et convenientia eorundem cum quibusdam lapidibus et herbis —*, Par. 7337; Bandini III, 305 Plut. 89 Cod. 38,[1] giebt Anfang: *Prima stella vocatur Algol et est in 23°*, Ende: *propter Corporis lapsum.*

10. *De alchymia*, Paris 6514.

11. *Epistola Thebit ben Mose* (!) *cum complecione motorum;* Harl. 1,[15]. In der Beschreibung desselben Cod. bei Rico y Sinobas, *Libros del Saber de Astronomia V*, 65, finde ich dieses Stück nicht (dafür *Flores Albumasar?*).

12. *De interrogationibus*, Cat. MSS. Angl. II, 192 Nr. 6154, ist mir sehr verdächtig.

[13. *Liber de significatione omnium planetar.* etc. in Cod. Canonic. misc. 569,[3] ist Gergis, s. Zeitschr. XVI, 370 Anm. *.]

14. „*Liber Thebit*“ ohne nähere Bezeichnung, in Catal. MSS. Angl. I, 85 Nr. 1769, S. 173 Nr. 3623,[12] („*etc.*“), II, 197 Nr. 6355,[5] (wahrsch. astrologisch) bedarf der Autopsie. Auch Cod. Paris 10268 enthält Schriften Thabit's, welche Delisle nicht näher bezeichnet.

Nachtrag (vom August 1873). Während die vorliegende Notiz längere Zeit in Händen der löbl. Redaction war, hatte ich Gelegenheit, Quellen und Bemerkungen über Thabit anzugeben in meinen Noten zu B. Baldi's Artikel, welche der eifrige Herausgeber des *Bulletino etc.* (November 1872, ausgegeben im Juli 1873) in der von ihm beliebten — nach meiner Ansicht viel zu weitschweifigen — Form veröffentlicht hat; ein Sonderabdruck meines Originals erfolgt demnächst.

Von den oben verzeichneten Schriften finden sich mehrere in Catalogen, die inzwischen erschienen oder mir zugänglich geworden; z. B. in Paris 16204 Nr. 2, in 16211 Nr. 3, 4, 2, 7; — bei Valentinelli Tomo IV, S. 262 (Codd. S. Marco in Venedig) Cod. 82 Nr. 2, 4, 3; daselbst S. 277 XI *de Astrologia* in drei Theilen (?), Anfang: *Dixit Aristoteles,* also Nr. 4; Ende: *erit occupatus et vacuus*, und Uebersetzer Johann Hispalensis; scheint etwas Anderes.

S. 336 Anm. 11. *Karaston.* Die Behauptung Flügel's (zu Fihrist, Bd. II, Leipzig 1872 S. 271), dass *Faraston* die „vorzugsweise gebrauchte Form“ sei, ist eine *petitio principii*, und die Berufung auf Dorn grenzt an Fälschung, wie sich Jeder überzeugen kann; wie wäre auch χειρ zu *Far* geworden?! Meine Abhandlung über den *liber Carastonis* ist auch keine philologische, wie Flügel andeutet.

XIII.

Ueber die Reflexion des Lichtes von Winkelspiegeln.

Von

Ernst Ritsert,
Reallehrer in Mainz.

(Hierzu Taf. IV, Fig. 1 – 5.)

In Fig. 1, Taf. IV, bedeute ROS den Durchschnitt eines Winkelspiegels, senkrecht gelegt gegen die Kante (Axe) des Spiegels. Die beiden Tracen OR und OS bilden den Winkel 2α. Auf der Halbirungslinie dieses Winkels in der Ebene ROS befindet sich der leuchtende Punkt M in einer Entfernung von $O = r$, die beliebig als Einheit gesetzt werden kann. Von ihm fällt auf die Spiegelfläche OS ein Strahl, der in einer Entfernung von $O = x_1$ auftrifft und mit dem Lothe im Punkte x_1 den Winkel μ_1 bildet. Unter demselben Winkel wird der Strahl auf die Fläche OR geworfen und trifft dieselbe in einer Entfernung von $O = x_2$; der Strahl macht mit dem Lothe den Winkel μ_2. Von der Fläche OR gelangt der Strahl zurück auf die Fläche OS; der Winkel mit dem Lothe ist μ_3, die Entfernung von $O = x_3$ u. s. w.

Es sollen nun zunächst die Beziehungen zwischen x_2, x_1, α, r dargelegt werden, und zwar ist

$$x_2 = f(x_1, \alpha, r),$$

worin $r = 1$ gesetzt werden kann, und allgemein

$$x_n = f(x_1, \alpha),$$

wo x_n die Entfernung des Punktes, in welchem der $n$mal reflectirte Strahl auftrifft, von dem Punkte O darstellt.

Es finden folgende Relationen statt:

In dem $\triangle OMM_1$ ist

1) $$MM_1 = r \sin\alpha = z \cos\mu_1, \quad \text{wenn } Mx_1 = z,$$

2) $$OM_1 = r \cos\alpha = x_1 + z \sin\mu_1.$$

Ferner in $\triangle O x_1 x_2$

$$3)\quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{\cos\mu_1}{\cos(\mu_1 - 2\alpha)} = \frac{\cos\mu_1}{\cos\mu_1\cos 2\alpha + \sin\mu_1 \sin 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha + tg\,\mu_1 \sin 2\alpha}.$$

Aus 1) und 2) ergiebt sich

$$4)\qquad tg\,\mu_1 = \frac{r\cos\alpha - x_1}{r\sin\alpha},$$

und wenn man diesen Werth von $tg\,\mu_1$ in 3) einsetzt:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \dfrac{r\cos\alpha - x_1}{r\sin\alpha}} = \frac{r\sin\alpha}{r\sin 3\alpha - x_1 \sin 2\alpha}.$$

Für $r = 1$ ist

$$x_2 = \frac{x_1 \sin\alpha}{\sin 3\alpha - x_1 \sin 2\alpha}.$$

Je nach den Werthen von x_1 und α wird x_2 positiv oder negativ sein. Negativ ist es, wenn es in der Verlängerung der Spiegelfläche OR liegt. Der Natur der Sache nach kann eine zweimalige Reflexion nur erfolgen, wenn $2\alpha < \pi$. Für die Werthe von 2α zwischen $\frac{2\pi}{3}$ und π ist $\sin 3\alpha < 0$, $\sin 2\alpha > 0$, der Nenner $\sin 3\alpha - x_1 \sin 2\alpha < 0$, eine zweimalige Reflexion also unmöglich. Eine einmalige Reflexion findet demnach statt, wenn die Grösse der Spiegelöffnung zwischen 120^0 und 180^0. Ist $\alpha < \frac{\pi}{3}$, so ist $\sin 3\alpha > 0$, $\sin 2\alpha > 0$; es kann also x_1 hinreichend klein genommen werden, um eine zweimalige Reflexion zu ermöglichen.

Scheinbar erfolgt noch eine mehrmalige Reflexion, wenn $2\alpha > 180^0$. Der ausfallende Strahl trifft dann rückwärts verlängert die zweite Spiegelfläche.

Um eine Beziehung zwischen x_3 und x_2 herzustellen, betrachten wir zuerst im Allgemeinen, in welchen Verhältnissen die Winkel

$$\mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4,\ \mu_{n-1},\ \mu_n \text{ und } 2\alpha$$

stehen.

Verlängert man die Lothe x_2 und x_3 in Fig. 1, bis sie sich treffen, so entsteht ein Dreieck, dessen Aussenwinkel μ_3 und dessen nicht anliegende Innenwinkel 2α und μ_2 sind, also ist

$$\mu_3 - \mu_2 = 2\alpha$$

und im Allgemeinen, da die Beziehung ganz dieselbe ist:

$$\mu_n - \mu_{n-1} = 2\alpha.$$

Da nun

$$\mu_1 + \mu_2 = 2\alpha,$$

so folgt

$$\mu_3 + \mu_1 = 4\alpha,\quad \mu_4 + \mu_1 = 6\alpha,$$
$$\mu_5 + \mu_1 = 8\alpha,\quad \mu_n + \mu_1 = (2n-1)\alpha.$$

Im $\triangle O x_2 x_3$ ist

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \mu_2\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mu_3\right)} = \frac{\cos\mu_2}{\cos\mu_3} = \frac{\cos(2\alpha - \mu_1)}{\cos(4\alpha - \mu_1)}.$$

Entwickelt man die Cosinus und dividirt durch $\cos\mu_1$, so entsteht

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \, tg\,\mu_1}{\cos 4\alpha + \sin 4\alpha \, tg\,\mu_1}.$$

Setzt man für $tg\,\mu_1$ den Werth 4), so ist

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{\sin 3\alpha - x_1 \sin 2\alpha}{\sin 5\alpha - x_1 \sin 4\alpha}.$$

Stellt man dagegen die Gleichung $\frac{x_2}{x_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha - x_1 \sin 2\alpha}$ und multiplicirt, so entsteht die einfache Beziehung

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin 5\alpha - x_1 \sin 4\alpha}.$$

In ganz analoger Weise hat man im $\triangle O x_{n-1} x_n$

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\cos[(2n-3)\alpha - \mu_1]}{\cos[(2n-1)\alpha - \mu_1]} = \frac{\sin[(2n-3)\alpha] - x_1 \sin[(2n-4)\alpha]}{\sin[(2n-1)\alpha] - x_1 \sin[(2n-2)\alpha]}$$

und

$$\frac{x_n}{x_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin[(2n-1)\alpha] - x_1 \sin[(2n-2)\alpha]}.$$

Betrachtet man die Gleichung

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin 5\alpha - x_1 \sin 4\alpha},$$

so ergiebt sich, dass eine wirkliche Reflexion nur stattfinden kann, wenn $\alpha < 36^0$, $2\alpha < 72^0$ ist. Denn ist $\alpha > 36^0$, so ist

$$5\alpha > \pi, \quad 4\alpha < \pi,$$

demnach

$$\sin 5\alpha - x_1 \sin 4\alpha < 0, \quad x_3 < 0,$$

eine dreimalige Reflexion also nicht möglich.

Aus der Gleichung

$$\frac{x_4}{x_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin 7\alpha - x_1 \sin 6\alpha}$$

ergiebt sich analog, dass die Oeffnung des Winkelspiegels $\frac{2\pi}{7}$ nicht überschreiten darf, wenn eine viermalige Reflexion stattfinden soll. Allgemein:

Eine $n$malige Reflexion ist möglich, wenn die Oeffnung des Spiegels $\frac{360}{2n-1}$ Grade nicht überschreitet. Oeffnet man den Winkelspiegel von 180^0 bis 120^0, so zeigt sich für den Beschauer einer Spiegelfläche ein Bild. Zwei Bilder entstehen bei einer Oeffnung des Spiegels von 120 bis 72 Graden, drei Bilder von 72^0 bis $51\frac{3}{7}{}^0$, n Bilder bei einer Oeffnung des Spiegels von $\frac{360}{2n-1}$ bis $\frac{360}{2n+1}$ Graden.

Was nun die Sichtbarkeit der Bilder beider Spiegelflächen anlangt, so hängt dieselbe von der Stellung des Beobachters innerhalb der Spiegelöffnung ab. Die häufigst reflectirten Strahlen sind nicht immer wahrzunehmen, weil sie längs der Spiegelfläche hinlaufen und keinen bedeutenden Theil der Spiegelfläche bedecken.

In Fig. 2 ist die Spiegelöffnung 100^0. M liegt auf der Halbirungslinie des Winkels. Da die Spiegelöffnung zwischen $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{2\pi}{5}$ sich befindet, so müsste man von jeder Spiegelfläche zwei Bilder, also von beiden vier Bilder haben, während man nur drei, resp. zwei wahrnimmt.

Ein Beobachter nehme die Stellung A. Er sieht den Punkt M dreimal und zwar durch die einfach reflectirten Strahlen My_1, Mx_1 und durch den doppelt reflectirten Strahl Mx'_1. Die von der Fläche OR in der Nähe von O auf OS, also doppelt reflectirten Strahlen wird er nicht wahrnehmen; denn der Strahl, der den grössten Winkel mit OS macht, sich also am meisten dem Beobachter nähert, ist der Strahl OP. Er wird erzeugt durch den Strahl OM, wird von O auf OS reflectirt, als käme er von M'_1, wenn $MN = M'_1N$, bleibt also in O und fällt von da, als von M''_1 kommend, wenn $M'_1Q = M''_1Q$, in der Richtung OP. Alle auf OR auffallenden und von OS zum zweiten Male reflectirten Strahlen fallen demnach in den Raum SOP und A hat daher drei Bilder. Im Raume TOP wird kein doppelt reflectirter Strahl erscheinen; in ihm hat also der Beobachter nur zwei Bilder von M, im Raume POS dagegen wieder drei Bilder. Je kleiner die Oeffnung des Spiegels, desto mehr schwindet der Raum POT; denn es ist

$$\angle MOR = \alpha, \ \angle MOM'_1 = 2\alpha,$$

also

$$\angle M'_1OQ = \angle M''_1OQ = \angle POS = \pi - 3\alpha,$$
$$\angle TOP = 2\alpha - 2(\pi - 3\alpha) = 2(4\alpha - \pi).$$

Je kleiner α, desto kleiner $\angle TOP$. Ist

$$4\alpha - \pi = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^0,$$

die Oeffnung des Spiegels $\frac{\pi}{2} = 90^0$, so verschwindet der Raum TOP, d. h.: man nimmt in dem Winkelraum 2α überall drei Bilder wahr. Ueberschieben sich die beiden Strahlen OT, OP, d. h. wird $4\alpha - \pi < 0$, also $\alpha < 45^0$ und $2\alpha < 90^0$, so wird man vier Bilder wahrnehmen können. In ähnlicher Weise wird die Discussion für kleinere Winkel weiter gehen.

Denkt man sich den Winkelspiegel von der Lage OM (Fig. 1), wo $\alpha = 0$, gleichmässig nach beiden Seiten sich öffnend, und stellt die Bedingung, dass der auf OS (OR) auffallende Strahl parallel OR (OS) ausfalle, so wird dem genügt, wenn in der Gleichung

$$x_2 = \frac{x_1 \sin\alpha}{\sin 3\alpha - \left(\frac{x_1}{r}\right)\sin 2\alpha}$$

$x_2 = \infty$ gesetzt wird. Da der Zähler $x_1 \sin\alpha$ nicht unendlich wird, ausgenommen einen Fall, der zuletzt zu betrachten ist, so wird die Bedingung, dass alle einmal reflectirten Strahlen parallel sind, in der Gleichung ausgedrückt:

$$\sin 3\alpha - \left(\frac{x_1}{r}\right) \sin 2\alpha = 0$$

oder

$$x_1 = r \cdot \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Beginnt die Bewegung von der Mittellage OM, so wächst α von O aus. Für $\alpha = 0$ ist

$$x_1 = r \lim \left(\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}\right)_{\alpha=0},$$
$$= r \cdot \tfrac{3}{2}.$$

Für wachsende α nimmt x_1 ab, weil $\sin 2\alpha$ rascher wächst als $\sin 3\alpha$.

Ist $x_1 = r$, so hat man

$$\sin 2\alpha = \sin 3\alpha,$$
$$2\alpha = 180^0 - 3\alpha, \quad \alpha = 36^0.$$

Die Winkelöffnung 2α ist dann 72^0. Von da an ist $x_1 < r$ und für

$$x_1 = 0, \quad \sin(3\alpha) = 0$$
$$3\alpha = 180^0, \quad \alpha = 60^0$$

die Winkelöffnung $= 120^0$.

Ist die Neigung der Spiegelflächen zu einander grösser als 120^0, so giebt es in Wirklichkeit keinen parallel ausfallenden Strahl mehr, wie früher gezeigt wurde. Denkt man sich aber die Spiegelflächen OR und OS rückwärts verlängert, so wird, wenn die positiven Strecken OR und OS wegfallen, eine derartige Reflexion doch stattfinden können. x_1 hat dann einen negativen Werth und wächst im Negativen bis ins Unendliche. Verbindet man alle Punkte, deren Entfernungen von O durch x_1 dargestellt sind, so erhält man eine Curve, die sich zu beiden Seiten von OM symmetrisch erhebt, die sich im Punkte O durchschneidet und dann nach beiden Seiten hin ins Unendliche erstreckt.

Die Construction der Curve ist einfach. Ist OM (Fig. 3) die Mittellage, M der leuchtende Punkt, sind $1O1'$, $2O2'$, $3O3'$ verschiedene Spiegellagen, so dass

$$\angle 1OM = \angle 2O1 = \angle 3O2 \text{ etc.},$$

so hat der Punkt M für den Spiegel $O1$ sein Bild in 2, für den Spiegel $O2$ in 4 etc. Ein Bild von M, das von dem Spiegel $O2$ ausgeht, soll parallel $O2'$ sein; es kommt von dem Punkte 4. Zieht man also durch 4 parallel $O2'$ eine Gerade, so hat man im Schnittpunkte derselben mit O_2 den verlangten Punkt a. So erhält man den Punkt b als Schnittpunkt der Parallelen zu $O1'$ mit 1 durch den Punkt 2 u. s. w.

Um die Gleichung der Linie

$$x_1 = r \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$$

in Parallelcoordinaten auszudrücken, setzt man, wenn OM Y-Axe ist und die in O darauf Senkrechte X-Axe:

$$x_1 \sin\alpha = y,\quad x_1 \cos\alpha = x.$$

Man erhält dann

$$y^2(2x + r) = x^2(3r - 2x)$$

oder

$$5)\qquad y = \pm x\sqrt{\frac{\frac{3}{2}r - x}{\frac{r}{2} + x}}.$$

Die Curve — Spiegellinie — hat Aehnlichkeit mit dem Descartes'schen Blatt

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

und mit der Cylinderfocale

$$r = a\frac{\cos 2A}{\sin A}.$$

Transformirt man das erstere, indem man die Axen um $\frac{1}{2}R$ dreht, so dass

$$x = (x' - y')\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y = (x' + y')\frac{1}{\sqrt{2}},$$

so erhält man als neue Gleichung des Descartes'schen Blattes

$$6)\qquad y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\frac{3a}{2}\sqrt{2} - x}{\frac{a\sqrt{2}}{2} + x}}.$$

Vergleicht man 5) und 6) und setzt in 5) $a = \frac{r}{\sqrt{2}}$, so verhält sich bei gleichem x

$$\frac{y(5)}{y(6)} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Die eine Curvengleichung ist also von der andern nur durch einen constanten Factor verschieden.

Der Analogie wegen ist rückwärts zu greifen und die Curve zu betrachten, deren Gleichung ist

$$\frac{x_1}{r} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ist AB (Fig. 4) der Spiegel, B der leuchtende Punkt, sind AC, AC' verschiedene Lagen des Spiegels, so werden die Bilder des leuchtenden Punktes wahrzunehmen sein in B', B'', und die Punkte B, B', B'' werden auf der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Mittelpunkt ist A und dessen Radius $AB = r$. Ein Strahl, der parallel AB ausfallen soll, muss auffallen resp. in C und C' und es ist

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin BCA}{\sin ABC},\quad \frac{AB}{AC'} = \frac{\sin AC'B}{\sin ABC'}$$

oder allgemein, wenn $AC = x_1$:

$$\frac{x_1}{r} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}, \quad x_1 = r\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha},$$

weil Winkel ABC gleichschenklig,

$$\angle ABC = 180 - 2\angle BAC = 180 - 2\angle \alpha,$$
$$\sin \angle ABC = \sin 2\alpha.$$

Da $AB = BC = BC'$ etc., so ist der geometrische Ort der Punkte C, C' etc. ein Kreis, dessen Mittelpunkt B und dessen Radius $= r$ ist.

Geometrisch aufgefasst, kann also gesagt werden:

Zieht man in einem Kreise sämmtliche Radien und trägt von den Endpunkten derselben in einer beliebigen, aber für alle in derselben Richtung den Radius an, so ist der geometrische Ort der Endpunkte der angetragenen Radien ein Kreis mit dem Radius des ursprünglichen Kreises.

Daraus geht also hervor, dass in Fig. 5 die Strecken AB, $A'B'$, $A''B''$ etc. sämmtlich gleich sind, vorausgesetzt, dass die Radien der beiden Kreise gleich sind, dass der Mittelpunkt des einen auf der Peripherie des andern liege und dass die Strecken AB, $A'B'$, $A''B''$ parallel der Centrallinie beider Kreise gezogen sind.

Bei dreimaliger Reflexion gilt nach Früherem

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin 5\alpha - x_1 \sin 4\alpha}.$$

Soll nun x_3 unendlich werden, d. h. soll der zum zweiten Male ausfallende Strahl der Spiegelfläche, auf der x_1 liegt, parallel sein, so ist

$$x_1 = \frac{\sin 5\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\cos \alpha}{4} \cdot \left(\frac{5 - 10\, tg^2\alpha + tg^4\alpha}{1 - tg^2\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \left\{\frac{5 - 10\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4}}{1 - \frac{y^2}{x^2}}\right\} = \sqrt{x^2+y^2},$$

wenn beim Uebergang zum Parallelcoordinatensystem gesetzt wird

$$x_1 = \sqrt{x^2+y^2}, \quad tg\,\alpha = \frac{y}{x}.$$

Verbindet man alle x_1 mit einander, so ist also die Gleichung der Curve

$$y^4(1+4x) - 10\,y^2x^2 - x^4(4x-5) = 0,$$

deren Construction, analog dem früher Gesagten, als einfach erscheint.



XIV.

Die Singularitäten der Liniencomplexe.

(Fortsetzung der in XVIII, 1 erschienenen Arbeit)

Von

Dr. Geisenheimer,

Lehrer an der Provinzial-Gewerbeschule zu Schweidnitz.

Legen wir durch jeden Punkt des Raumes eine Gerade, deren Richtung sich durch Functionen der Coordinaten dieses Punktes bestimmt, so erhalten wir im Allgemeinen ein den ganzen Raum erfüllendes Liniengebilde. Nach den Untersuchungen „Ueber Strahlensysteme, welche die Tangentenschaar einer Fläche bilden", unterschieden wir diese Liniengebilde in endlich bestimmte Systeme, bei welchen durch jeden Punkt des Raumes nur eine bestimmte Zahl von Geraden des Systems geht, und in nicht endlich bestimmte Systeme, bei welchen die durch einen Punkt laufenden Geraden die Strahlen eines Kegelmantels bilden.

Die Gleichungen einer beliebigen Geraden des Systems seien:

$$\frac{x-u}{\varphi(x,y,z)}=\frac{y-v}{\psi(x,y,z)}=z-w,$$

wo x, y, z die Coordinaten des die Linie bestimmenden Punktes, u, v, w die eines beliebigen Punktes derselben und φ, ψ zwei stetige Functionen bedeuten. In der oben angegebenen Arbeit fanden wir, dass die Bestimmung des von den Geraden gebildeten Liniensystems abhängt von der Untersuchung der quadratischen Gleichungen (XVIII, 1, S. 39):

$$\frac{d\varphi}{dy}\,q^2+\left(\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\psi}{dy}\right)q-\frac{d\psi}{dx}=0,$$

$$\varphi\frac{d\varphi}{dy}\,q^2-\left(\varphi\frac{d\psi}{dy}+\psi\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\right)q+\left(\frac{d\psi}{dz}+\psi\frac{d\psi}{dy}\right)=0.$$

Damit das System ein endlich bestimmtes sei, müssen diese beiden Gleichungen in beiden Wurzeln für q übereinstimmen, daher die Gleichungen stattfinden:

$$\varphi \frac{d\varphi}{dx} + \psi \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

$$\varphi \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz} = 0.$$

Genügen die Functionen φ und ψ diesen Bedingungen nicht, so gehen durch jeden Punkt unendlich viele Strahlen des Liniensystems. Haben die beiden quadratischen Gleichungen für q nur eine Wurzel gemein, so berühren sämmtliche Geraden eine Fläche, das System wird zu einer Tangentenschaar. Die gemeinsame Wurzel ist in diesem Falle

$$q = \frac{\varphi \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}}{\varphi \frac{d\varphi}{dx} + \psi \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}}.$$

Findet sich keine gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen, so bilden die durch Gleichung 1) bestimmten Geraden einen Liniencomplex. Umgekehrt lassen sich die Strahlen eines beliebigen Complexes stets in der durch Gleichung 1) bestimmten Form darstellen.

Plücker hat in seinem berühmten Werke „Neue Geometrie des Raumes" die Singularitäten der Liniencomplexe definirt und dieselben für die Complexe des zweiten Grades untersucht. (Neue Geometrie des Raumes, II. Abtheil., §§ 4 und 5.) Die folgenden Entwickelungen werden zeigen, dass einige der für die Singularitäten der Complexe zweiten Grades von Plücker und Klein gegebenen Sätze für diese speciellen Complexe nicht charakteristisch sind, also für jedes Liniengebilde stattfinden. Zu dieser Untersuchung diene die durch Gleichung 1) gegebene Bestimmung der Complexe.

Es ist stets möglich, solche Geraden eines Complexes zu finden, welche sich mit einer unendlich nahen Linie des Systems schneiden. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten des Schnittpunktes, so erhalten wir zur Bestimmung desselben die Gleichungen

$$1) \qquad x - \xi = (z - \zeta)\,\varphi(x, y, z), \quad y - \eta = (z - \zeta)\,\psi(x, y, z);$$

$$2) \qquad \begin{aligned} dx &= \varphi\, dz + (z - \zeta)\left(\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz\right), \\ dy &= \psi\, dz + (z - \zeta)\left(\frac{d\psi}{dx} dx + \frac{d\psi}{dy} dy + \frac{d\psi}{dz} dz\right). \end{aligned}$$

Der die Linie bestimmende Punkt variire in einer Ebene

$$3) \qquad qx - y + p.z = k.$$



Damit sich die Gerade mit der folgenden schneide, muss sein

$$\frac{dx - \varphi\, dz}{p\, dx + (p - \psi)\, dz} = \frac{\left(\frac{d\varphi}{dx} + q\frac{d\varphi}{dy}\right) dx + \left(\frac{d\varphi}{dz} + p\frac{d\varphi}{dy}\right) dz}{\left(\frac{d\psi}{dx} + q\frac{d\psi}{dy}\right) dx + \left(\frac{d\psi}{dz} + p\frac{d\psi}{dy}\right) dz}.$$

Diese Gleichung liefert zwei Werthe für $\frac{dx}{dz}$; sollen sich die Strahlen bei allen Verschiebungen des bestimmenden Punktes in der Ebene 3) schneiden, muss die letzte Gleichung $\frac{dx}{dz}$ unbestimmt lassen. Hieraus ergiebt sich:

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\psi}{dx} + q\frac{d\psi}{dy}\right) - q\left(\frac{d\varphi}{dx} + q\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0,\\ &\varphi\left(\frac{d\psi}{dz} + p\frac{d\psi}{dy}\right) + (p - \psi)\left(\frac{d\varphi}{dz} + p\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0,\\ &\varphi\left(\frac{d\psi}{dx} + q\frac{d\psi}{dy}\right) - \left(\frac{d\psi}{dz} + p\frac{d\psi}{dy}\right)\\ &+ (p - \psi)\left(\frac{d\varphi}{dx} + q\frac{d\varphi}{dy}\right) + q\left(\frac{d\varphi}{dz} + p\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $-\varphi$, dividirt die zweite durch φ und addirt alle drei Gleichungen, so folgt

$$(p + q\varphi - \psi)\left(\varphi\frac{d\varphi}{dx} + (p + q\varphi)\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\right) = 0.$$

Diese Gleichung, welche an die Stelle der dritten tritt, zerfällt demnach in zwei, nämlich in

$$5)\quad \psi = p + q\varphi,$$

$$6)\quad \varphi\frac{d\varphi}{dx} + (p + q\varphi)\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Die Gleichung 5) liefert, in die zweite der Gleichungen 4) für p den Werth $\psi - q\varphi$ einführend:

$$\frac{d\varphi}{dy}q^2 + \left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right)q - \frac{d\psi}{dx} = 0,$$

$$\varphi\frac{d\varphi}{dy}q^2 - \left(\varphi\frac{d\psi}{dy} + \psi\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\right)q + \left(\frac{d\psi}{dz} + \psi\frac{d\psi}{dy}\right) = 0.$$

Damit diese Gleichungen gleichzeitig bestehen können, muss sein

$$7)\quad q = \frac{\varphi\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}}{\varphi\frac{d\varphi}{dx} + \psi\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}}.$$

Diesen speciellen Werth von q werden wir mit $\varkappa$ bezeichnen, den Ausdruck $\psi - \varkappa.\varphi$ mit π.

Aus den beiden ersten Gleichungen 4) findet sich bei Benutzung der andern Bedingungsgleichung 6)

$$\left(\frac{d\psi}{dx}+q\frac{d\psi}{dy}\right)(p-\psi)-q\left(\frac{d\psi}{dz}+p\frac{d\psi}{dy}\right)=0$$

oder

8) $$p\frac{d\psi}{dx}-\psi\frac{d\psi}{dx}-q.\psi\frac{d\psi}{dy}-q\frac{d\psi}{dz}=0.$$

Diese Gleichung lässt mit Hilfe von 6) q aus zwei linearen Gleichungen finden. Die beiden Gleichungen 5) und 6), in welche sich die letzte Gleichung 4) zerlegte, liefern also rationale Werthe für q.

Aus 6) und 8) folgt

$$q=-\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\varphi}{dy}}\cdot\frac{\varphi\frac{d\varphi}{dx}+\psi\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dz}}{\varphi\frac{d\psi}{dx}+\psi\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{dz}}.$$

Dieser Werth ist die zweite Wurzel der Gleichung

9) $$\frac{d\varphi}{dy}\varkappa^2+\left(\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\psi}{dy}\right)\varkappa-\frac{d\psi}{dx}=0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung werde fortan mit $\varDelta$ bezeichnet. Die beiden Gleichungen 5) und 6) führen demnach zu derselben Beziehung $\varDelta=0$. Diese Gleichung stellt eine Fläche dar, durch deren Punkte sich diejenigen Strahlen bestimmen, welche von den unendlich nahen geschnitten werden.

Die Gleichung 5), $\psi=p+q\varphi$, drückt die Bedingung aus, dass die Ebene, in welcher der bestimmende Punkt variire, den Strahl selbst enthalte, also eine Focalebene sei. Demnach wird ein Strahl des Complexes, dessen Bestimmungspunkt in der Fläche $\varDelta=0$ liegt, von allen unendlich nahen Strahlen der Ebene

10) $$\varkappa(x-u)-(y-v)+\pi(z-w)=0$$

geschnitten, wo u, v, w einen beliebigen Punkt dieses Strahles bedeutet.

Diejenigen Strahlen eines Liniencomplexes, welche mit unendlich vielen benachbarten in einer Ebene liegen, nennt Plücker die singulären Linien des Complexes, ihre Focalebene die singuläre Ebene. (Neue Geometrie des Raumes, Nr. 305.)

Die Fläche $\varDelta=0$ bestimmt die singulären Linien, die Gleichung 10) die zugeordneten singulären Ebenen des Complexes.

Für den Durchschnittspunkt eines singulären Strahles mit einem unendlich nahen der singulären Ebene ergiebt sich aus 2)

$$z-\zeta=\frac{dx-\varphi\,dz}{\left(\frac{d\varphi}{dx}+\varkappa\frac{d\varphi}{dy}\right)dx+\left(\frac{d\varphi}{dz}+\pi\frac{d\varphi}{dy}\right)dz}.$$

Derselbe ist also im Allgemeinen von dem beliebig zu wählenden Werthe von $\frac{dx}{dz}$ abhängig.

Jeder Punkt eines singulären Strahles darf demnach als Schnittpunkt desselben mit einem in der singulären Ebene ihm unendlich nahe liegenden Strahl des Complexes betrachtet werden.

Durch jeden Punkt der Fläche $\Delta = 0$ bestimmt sich eine singuläre Ebene. Sollen alle singulären Ebenen einer Fläche als Tangentialebenen angehören, so müssen sämmtliche, durch unendlich kleine Zunahmen von x, y, z erhaltenen singulären Ebenen einen Punkt ξ, η, ζ, den Berührungspunkt, als gemeinsamen Durchschnittspunkt besitzen. Die Gleichung der singulären Ebene war

$$10) \qquad y - \eta = \pi (z - \zeta) + \varkappa (x - \xi).$$

Die Differentiation nach x, y, z ergiebt

$$11) \qquad \begin{aligned} dy = \pi\, dz + \varkappa\, dx &+ (z - \zeta)\left(\frac{d\pi}{dx} dx + \frac{d\pi}{dy} dy + \frac{d\pi}{dz} dz\right) \\ &+ (x - \xi)\left(\frac{d\varkappa}{dx} dx + \frac{d\varkappa}{dy} dy + \frac{d\varkappa}{dz} dz\right), \end{aligned}$$

wo zwischen den Differentialen die Beziehung herrscht

$$\frac{d\Delta}{dx} dx + \frac{d\Delta}{dy} dy + \frac{d\Delta}{dz} dz = 0.$$

Wir finden aus diesen Gleichungen eine Tangirungsfläche, wenn wir die Coefficienten der Differentiale in 11) verschwinden lassen, also setzen

$$12) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\pi}{dx}(z - \zeta) + \frac{d\varkappa}{dx}(x - \xi) + \varkappa = 0, \\ &\frac{d\pi}{dy}(z - \zeta) + \frac{d\varkappa}{dy}(x - \xi) - 1 = 0, \\ &\frac{d\pi}{dz}(z - \zeta) + \frac{d\varkappa}{dz}(x - \xi) + \pi = 0. \end{aligned} \right.$$

Es lässt sich, genau wie bei der entsprechenden Betrachtung über die Tangentenschaar einer Fläche (XVIII, 1, S. 41) zeigen, dass die Determinante dieser drei Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \frac{d\pi}{dx}, & \frac{d\varkappa}{dx}, & \varkappa \\ \frac{d\pi}{dy}, & \frac{d\varkappa}{dy}, & -1 \\ \frac{d\pi}{dz}, & \frac{d\varkappa}{dz}, & \pi \end{vmatrix}$$

mit Δ verschwindet. Demnach reduciren sich die drei Gleichungen 12) auf zwei; die Tangirungsfläche der singulären Ebenen ergiebt sich durch die Elimination von x, y, z mittels der Gleichungen 12), 9) und 10). Der so ge-

fundene Berührungspunkt ξ, η, ζ liegt in der singulären Linie; denn setzen wir in 12) $x-\xi=\varphi(z-\zeta)$, so folgt, dass sein müsste

$$13)\qquad \frac{\frac{d\pi}{dx}+\varphi\frac{d\varkappa}{dx}}{\varkappa}=\frac{\frac{d\pi}{dz}+\varphi\frac{d\varkappa}{dz}}{\pi}=-\left(\frac{d\pi}{dy}+\varphi\frac{d\varkappa}{dy}\right)$$

oder, die Gleichung $\psi=\pi+\varkappa\varphi$ und ihre partiellen Ableitungen benutzend:

$$\frac{d\psi}{dx}-\varkappa\frac{d\varphi}{dx}=-\varkappa\left(\frac{d\psi}{dy}-\varkappa\frac{d\varphi}{dy}\right),\quad \frac{d\psi}{dz}-\varkappa\frac{d\varphi}{dz}=-\pi\left(\frac{d\psi}{dy}-\varkappa\frac{d\varphi}{dy}\right).$$

Beide Bedingungen reduciren sich auf $\Delta=0$.

Für den Berührungspunkt der singulären Ebene findet sich

$$14)\qquad z-\zeta=\frac{1}{\frac{d\pi}{dy}+\varphi\frac{d\varkappa}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\psi}{dy}-\varkappa\frac{d\varphi}{dy}}.$$

Eine anscheinend andere Berührungsfläche der singulären Ebenen wird gefunden, indem man dy aus der Gleichung

$$\frac{d\Delta}{dx}dx+\frac{d\Delta}{dy}dy+\frac{d\Delta}{dz}dz=0$$

bestimmt, diesen Werth in 11) einführt und die Coefficienten von dx und dz gleich Null setzt. Wir erhalten in dieser Weise

$$15)\qquad \begin{cases} \left(\frac{d\pi}{dx}\cdot\frac{d\Delta}{dy}-\frac{d\pi}{dy}\cdot\frac{d\Delta}{dx}\right)(z-\zeta) \\ \quad+\left(\frac{d\varkappa}{dx}\cdot\frac{d\Delta}{dy}-\frac{d\varkappa}{dy}\cdot\frac{d\Delta}{dx}\right)(x-\xi)+\left(\varkappa\frac{d\Delta}{dy}+\frac{d\Delta}{dx}\right)=0, \\ \left(\frac{d\pi}{dz}\cdot\frac{d\Delta}{dy}-\frac{d\pi}{dy}\cdot\frac{d\Delta}{dz}\right)(z-\zeta) \\ \quad+\left(\frac{d\varkappa}{dz}\cdot\frac{d\Delta}{dy}-\frac{d\varkappa}{dy}\cdot\frac{d\Delta}{dz}\right)(x-\xi)+\left(\pi\frac{d\Delta}{dy}+\frac{d\Delta}{dz}\right)=0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen stimmen jedoch mit den Gleichungen 12) überein; denn setzt man wieder $(x-\xi)=\varphi.(z-\zeta)$, so findet sich aus beiden Gleichungen mit Hilfe der in 13) aufgestellten Beziehungen der in 14) entwickelte Werth für $z-\zeta$.

Wir bezeichnen die mittels der Gleichungen 12) oder 15) hergeleitete Berührungsfläche als die Fläche der singulären Ebenen. (Plücker, Nr. 314 flg.)

Die Gleichung $\Delta=0$ besitzt ausser der Wurzel $\varkappa$ eine zweite $\varkappa_1$, welche, wie wir vorhin entwickelten, diejenige Ebene bestimmt, innerhalb deren sich der variirende Punkt bewegen muss, damit die durch ihn bestimmten Strahlen den singulären schneiden. Daraus, dass diese Ebene nicht durch den singulären Strahl geht, folgt, dass der letztere in allen durch ihn gelegten Ebenen von einer unendlich nahen Linie des Complexes geschnitten wird. Für den Schnittpunkt ergiebt sich

$$z-\zeta=\frac{dx-\varphi\,dz}{\left(\frac{d\varphi}{dx}+\varkappa_1\frac{d\varphi}{dy}\right)dx+\left(\frac{d\varphi}{dz}+\pi_1\frac{d\varphi}{dy}\right)dz}$$

und hieraus mit Hilfe von 6)

$$z-\zeta=\frac{1}{\frac{d\varphi}{dx}+\varkappa_1\frac{d\varphi}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\psi}{dy}-\varkappa\frac{d\varphi}{dy}}.$$

Dieser Werth ist unabhängig von $\frac{dx}{dz}$ und fällt mit dem des Berührungspunktes der singulären Ebene in 14) zusammen. In allen durch die singuläre Linie gelegten Ebenen wird also der singuläre Strahl von einer benachbarten Linie des Complexes in einem festen Punkte, nämlich dem Berührungspunkte der singulären Ebene, geschnitten. Diesen ausgezeichneten Punkt der singulären Linie nennt Plücker den zugeordneten singulären Punkt derselben.

Zusammenfassend ergiebt sich:

Jede Ebene durch einen singulären Strahl darf als Focalebene desselben mit einem durch den singulären Punkt laufenden und unendlich nahen Strahle des Complexes betrachtet werden.

Die Fläche der singulären Punkte fällt in jedem Complex zusammen mit der Fläche der singulären Ebenen.

Durch diejenigen Strahlen, welche sich durch die Punkte der Fläche $\Delta=0$ bestimmen, heben wir aus dem Complexe ein endlich bestimmtes System, das der singulären Strahlen, hervor. In allgemeinerer Weise bestimmen sich solche endlich bestimmte Systeme eines Complexes in folgender Weise.

Die Raumcurve, deren Differentialgleichungen lauten:

$$\frac{dx}{\varphi}=\frac{dy}{\psi}=dz,$$

wird von den durch ihre Punkte bestimmten Strahlen tangirt; diese Strahlen des Complexes bilden eine abwickelbare Fläche.

Uebrigens sind für einen bestimmten Complex $\varphi(x, y, z)$ und $\psi(x, y, z)$ nicht völlig bestimmte Functionen, da ihre Form von der Wahl des den Strahl bestimmenden Punktes x, y, z abhängt; nur die Beziehung zwischen φ, ψ, x, y, z ist eine feste. Daher erhalten wir unendlich viele Systeme solcher von ihren Strahlen berührten Curven. Die Schraubenlinien, durch welche Plücker die linearen Complexe veranschaulicht, die Raumcurven dritter Ordnung, durch welche sich die Strahlencomplexe zweiten Grades

bestimmen, welche von collinearen räumlichen Systemen erzeugt werden, sind specielle Fälle dieser Curven. (Plücker, Nr. 47; Die Geometrie der Lage, von Dr. Reye, 15. Vortrag.)

Die Integrale der obigen Differentialgleichungen seien in der Form gegeben:

$$M(x, y, z) = c_1, \quad N(x, y, z) = c_2,$$

M_1 und M_2 irgendwelche Functionen. Ein geometrischer Ort dieser Curven liefert Flächen, welche die durch ihre Punkte bestimmten Strahlen berühren. Einen solchen Ort finden wir, indem c_1 von c_2 abhängig gemacht wird, in der Gleichung

$$F(M, N) = 0.$$

Nach Sätzen über partielle Differentialgleichungen bestimmt diese letzte Gleichung eine Fläche $F=0$, für welche die Gleichung stattfindet

$$\varphi \frac{dF}{dx} + \psi \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} = 0.$$

Diese Gleichung sagt aus, dass sich durch den Berührungspunkt jeder Tangentialebene der Fläche $F=0$ ein Strahl des Complexes innerhalb dieser Ebene bestimmt; also wird die Fläche $F=0$ in der That von ihren Strahlen berührt.*

Während also die Strahlen eines endlich bestimmten Liniensystems sich in zwei Systeme abwickelbarer Flächen vereinigen lassen, sind solcher bei nicht endlich bestimmten Systemen beliebig viele vorhanden. Durch irgend eine Bedingung, welche man den Linien des Complexes auferlegt, hebt sich ein endlich bestimmtes System heraus. Daher erscheint ein endlich bestimmtes Liniensystem als eine Verallgemeinerung der von Plücker untersuchten linearen Congruenz; an Stelle der beiden Directricen (Plücker, Nr. 61), welche von allen Linien der Congruenz geschnitten werden, treten hier die beiden früher bestimmten Flächen (XVIII, 1, S. 49) auf, welche von allen Linien des endlich bestimmten Systems berührt werden.

Ist das nicht endlich bestimmte System eine Tangentenschaar, so haben alle diese ihm entnommenen endlich bestimmten Systeme eine der Berührungsflächen gemein.

Unter den Curven, welche die Geraden eines Complexes umhüllen, sind die ebenen Complexcurven und der Punkt besonders von Plücker untersucht worden. Die von den Strahlen der Complexcurve und des Complexkegels gebildeten Figuren sind die einfachsten abwickelbaren Figuren, welche sich aus den Complexlinien bilden lassen.

---

* Wir wollen nicht unerwähnt lassen, dass die obige Entwickelung eine geometrische Herleitung des Jacobi'schen Verfahrens einschliesst, lineare partielle Differentialgleichungen auf simultane zurückzuführen.



Um die Gleichung des Complexkegels zu erhalten, bestimmen wir diejenige Curve, deren Strahlen alle durch einen Punkt u, v, w gehen. Ihre Gleichungen sind:

$$x-u=\varphi(x, y, z).(z-w), \quad y-v=\psi(x, y, z).(z-w).$$

Heissen die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf dem Mantel des Complexkegels x_1, y_1, z_1, so ist

$$\frac{x-u}{x_1-u}=\frac{y-v}{y_1-v}=\frac{z-w}{z_1-w}=k,$$

daher

$$x=k(x_1-u)+u, \quad y=k(y_1-v)+v, \quad z=k(z_1-w)+w.$$

Die Gleichung des Complexkegels wird daher aus den beiden Gleichungen

$$16) \qquad \begin{cases} x_1-u=\varphi(x_1, y_1, z_1, k).(z_1-w), \\ y_1-v=\psi(x_1, y_1, z_1, k).(z_1-w) \end{cases}$$

durch die Elimination von k gewonnen.

Um die Complexcurve zu finden, deren Strahlen alle in einer Ebene

$$a(x-u)+b(y-v)+(z-w)=0$$

liegen, muss der Strahl des Complexes in dieser Ebene enthalten sein. Hieraus folgt für die Curve der bestimmenden Punkte

$$17) \qquad a.\varphi+b.\psi+1=0.$$

Die Durchschnittsfigur der durch diese Gleichung bestimmten Fläche mit der Ebene liefert diejenigen Punkte, deren Strahlen die Complexcurve umhüllen.

Soll die Ebene der Complexcurve stets eine feste Linie

$$\frac{x-u}{\alpha}=\frac{y-v}{\beta}=z-w$$

enthalten, muss sein

$$18) \qquad a\alpha+b\beta+1=0.$$

Die Gleichung der Punkte, deren Strahlen die Plücker'sche Meridianfläche tangiren, ergiebt sich durch die Elimination von a und b aus den drei Gleichungen

$$a\varphi+b\psi+1=0,$$
$$a(x-u)+b(y-v)+c(z-w)=0,$$
$$a\alpha+b\beta+1=0.$$

Wir finden also nie sofort die Plücker'schen Gebilde, sondern verwandte Gebilde, derart, dass die durch letztere bestimmten Strahlen die Plücker'schen Figuren umhüllen.

Die Meridianfläche werde für den Fall, dass die Axe derselben eine Linie des Complexes sei, näher untersucht. Die Gleichung der Meridianebene sei

$$19) \qquad y-\eta=p(z-\zeta)+q(x-\xi), \quad p \text{ und } q \text{ Constanten.}$$

Sollen die Linien des Complexes dieser Ebene angehören, muss sein

$$20) \qquad \psi=p+q\varphi.$$

Für den Durchschnittspunkt unendlich naher Strahlen ergiebt sich

$$z-\zeta=\frac{dx-\varphi\, dz}{\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz}.$$

$dx:dy:dz$ ist aus den Gleichungen 19) und 20) zu suchen. Es findet sich

$$dy=p\,dz+q\,dx,$$

$$\left[\frac{d\psi}{dx}-q\frac{d\varphi}{dx}+q\left(\frac{d\psi}{dy}-q\frac{d\varphi}{dy}\right)\right]dx+\left[\frac{d\psi}{dz}-q\frac{d\varphi}{dz}+p\left(\frac{d\psi}{dy}-q\frac{d\varphi}{dy}\right)\right]dz=0.$$

Dies einsetzend, ergiebt sich

$$\frac{dx-\varphi\, dz}{\frac{d\varphi}{dx}dx+\frac{d\varphi}{dy}dy+\frac{d\varphi}{dz}dz}$$

$$=\frac{\varphi\frac{d\psi}{dx}+\psi\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\psi}{dz}-q\left(\varphi\frac{d\varphi}{dx}+\psi\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\right)}{\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dz}-\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}\right)+\psi\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\right)+q\left[\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}\right)-\varphi\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx}\right)\right]}.$$

Die quadratischen Glieder von q heben sich weg. Da die Functionen φ und ψ wie ihre Ableitung unabhängig von q, also für alle Ebenen durch eine Linie des Complexes constant sind, folgt

$$z-\zeta=\frac{Jq+H}{Qq+P}, \tag{21}$$

wo J, H, Q, P längs eines Strahles constant bleiben. Diese einfache Beziehung zwischen der Drehung der Meridianebene und der Lage des Durchschnittspunktes der Complexlinie mit einer unendlich nahen Linie dieser Ebene findet also in jedem Liniencomplex, nicht nur in Complexen zweiten Grades statt. (Plücker, Nr. 193.) Da also jeder Ebene durch einen Strahl ein Punkt und umgekehrt jedem solchen Durchschnittspunkte unendlich naher Strahlen eine Focalebene entspricht, folgt der Satz:

> In jedem Strahlencomplex sind der Durchschnittspunkt und die Focalebene unendlich naher Linien des Complexes linear verwandte Elemente.

Da wir jede Linienfläche uns einem Complex entnommen vorstellen dürfen, muss der Satz auch für diese gelten.

Der Durchschnittspunkt unendlich naher Strahlen einer Ebene ist der Berührungspunkt der Complexcurve in dieser Ebene. Wählen wir diesen Punkt zum Mittelpunkte eines Complexkegels, so muss die entsprechende Focalebene, da sich in dieser zwei unendlich nahe Strahlen des Complexes im Mittelpunkte schneiden, den Complexkegel berühren.

Die Bedingung, dass in Gleichung 21) $z-\zeta$ unabhängig von q werde, lässt sich in die Form bringen:

$$\frac{\varphi\frac{d\psi}{dx}+\psi\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\psi}{dz}}{\varphi\frac{d\varphi}{dx}+\psi\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}}$$

$$+\frac{\frac{d\varphi}{dx}\left(\varphi\frac{d\psi}{dx}+\psi\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\psi}{dz}\right)-\frac{d\psi}{dx}\left(\varphi\frac{d\varphi}{dx}+\psi\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\right)}{\frac{d\varphi}{dy}\left(\varphi\frac{d\psi}{dx}+\psi\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\psi}{dz}\right)-\frac{d\psi}{dy}\left(\varphi\frac{d\varphi}{dx}+\psi\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\right)}=0.$$

Diese Gleichung ist jedoch identisch mit $\Delta=0$. Wir finden so, in Uebereinstimmung mit einem früher entwickelten Satze, dass längs der singulären Linien der Durchschnittspunkt $z-\zeta$ von der Lage der Meridianebene unabhängig ist. Mit Berücksichtigung des Vorhergehenden findet sich (Plücker, Nr. 305):

> Eine singuläre Linie des Complexes wird von allen Complexcurven, die in den durch sie hindurch gelegten Ebenen liegen, in einem festen Punkte berührt.

Da ferner jeder Punkt der singulären Linie als Durchschnittspunkt unendlich naher Strahlen in der singulären Ebene anzusehen ist, folgt:

> Alle Complexkegel, deren Mittelpunkte auf einer singulären Linie des Complexes angenommen werden, berühren eine durch dieselbe hindurchgehende feste (die singuläre) Ebene.

Da die singuläre Ebene eines singulären Strahles mit der Tangentialebene der Fläche singulärer Punkte und Ebenen zusammenfällt, lassen sich die beiden letzten Sätze in folgenden zusammenfassen:

> Jeder Strahlencomplex fällt längs der singulären Linien und der diesen unendlich nahen Punkte mit der Tangentenschaar der Fläche der singulären Punkte und Ebenen zusammen.

Der Strahlencomplex ist durch seine singulären Strahlen nicht vollständig bestimmt.

Die bestimmende Fläche der singulären Strahlen $\Delta=0$ ergab sich aus der Bedingung, dass die beiden Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{dy}q^2+\left(\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\psi}{dy}\right)q-\frac{d\psi}{dx}=0,$$

$$\varphi\frac{d\varphi}{dy}q^2-\left(\varphi\frac{d\psi}{dy}+\psi\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\right)q+\left(\frac{d\psi}{dz}+\psi\frac{d\psi}{dy}\right)=0$$

in einer Wurzel übereinstimmen. Damit diese Gleichungen beide Wurzeln für q gemeinschaftlich haben, muss sein

$$22)\quad \begin{cases} \varphi \frac{d\varphi}{dx} + \psi \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} = 0, \\ \varphi \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz} = 0. \end{cases}$$

Beide Gleichungen genügen der frühern $\Delta = 0$, **bestimmen also eine auf Δ liegende Curve.**

Die früher hergeleiteten Bestimmungsgleichungen 5) und 6):

$$\psi = p + q\varphi,$$

$$\varphi \frac{d\varphi}{dx} + (p + q\varphi) \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

werden jetzt identisch.

Die Focalebenen, innerhalb deren sich die Strahlen mit unendlich nahen Linien des Complexes schneiden, ergeben sich durch die beiden Wurzeln q_1 und q_2 der Gleichung $\Delta = 0$. Für den Durchschnittspunkt der unendlich nahen Strahlen findet sich

$$z - \zeta = \frac{dx - \varphi\, dz}{\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dz} dz} = \frac{dx - \varphi\, dz}{\frac{d\varphi}{dx}(dx - \varphi\, dz) + \frac{d\varphi}{dy}(dy - \psi\, dz)}.$$

Aus der Gleichung der Focalebene

$$y - u = p\,(z - w) + q\,(x - \xi)$$

und der Bedingung

$$\psi = p + q\varphi$$

ergiebt sich

$$\frac{dy - \psi\, dz}{dx - \varphi\, dz} = q$$

und

$$z - \zeta_1 = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dx} + q_1 \frac{d\varphi}{dy}}, \quad z - \zeta_2 = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dx} + q_2 \frac{d\varphi}{dy}}.$$

Für die Berührungspunkte u_1 und u_2 der beiden Focalebenen mit der Fläche der singulären Punkte und Ebenen ergiebt sich nach Gleichung 14)

$$z - u_1 = \frac{1}{\frac{d\psi}{dy} - q_1 \frac{d\varphi}{dy}}, \quad z - u_2 = \frac{1}{\frac{d\psi}{dy} - q_2 \frac{d\varphi}{dy}}.$$

Da

$$q_1 + q_2 = \frac{-\left(\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dy}\right)}{\frac{d\varphi}{dy}},$$

folgt

$$z - u_1 = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dx} + q_2 \frac{d\varphi}{dy}} = z - \zeta_2, \quad z - u_2 = \frac{1}{\frac{d\varphi}{dx} + q_1 \frac{d\varphi}{dy}} = z - \zeta_1.$$

Demnach gehören zu den durch Gleichung 22) bestimmten Strahlen zwei singuläre Ebenen, und für diese letzteren erhalten wir:

Gehören zu einer singulären Linie des Complexes zwei singuläre Ebenen, so ist diese eine Doppeltangente an die Fläche der singulären Punkte und Ebenen mit im Allgemeinen zwei verschiedenen Berührungspunkten und verschiedenen Berührungsebenen. Der Durchschnittspunkt in einer singulären Ebene fällt mit dem Berührungspunkte der andern singulären Ebene zusammen.

In besonderen Fällen können die beiden Berührungspunkte oder die beiden zugeordneten singulären Ebenen zusammenfallen; in einem Complex des zweiten Grades geschieht Ersteres für die Linien des Complexes, welche einen Doppelpunkt, Letzteres für diejenigen, welche eine Doppelebene in der Fläche der singulären Punkte umhüllen. (Plücker, Nr. 317.)

Aus den Gleichungen 22) ergiebt sich in ganz ähnlicher Weise, wie bei der Betrachtung, welche wir in der früheren Untersuchung über endlich bestimmte Systeme anstellten (XVIII, 1, S. 46—49), dass bei Fortschreiten in Richtung der aus 22) bestimmten Linie des Complexes sich φ und ψ bis auf Grössen von höherer als zweiter Ordnung nicht ändern. Der Complex fällt längs dieser Linien mit einem endlich bestimmten Liniensystem zusammen. Legen wir durch den Strahl eine beliebige Ebene und suchen in dieser die Complexcurve, so findet sich für den Berührungspunkt derselben nach Gleichung 14)

$$z-\zeta=\frac{1}{\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\,\frac{dy-\psi\,dz}{dx-\varphi\,dz}}$$

oder

$$z-\zeta=\frac{1}{\frac{d\varphi}{dx}+q\,\frac{d\varphi}{dy}}.$$

Da q zwei Werthe besitzt, folgt:

Die Complexcurven berühren den singulären Strahl, zu welchem zwei singuläre Punkte oder Ebenen gehören, im Allgemeinen nicht mehr in einem, sondern in zwei festen Punkten.

Sollen zu einem singulären Strahl mehr als zwei singuläre Ebenen gehören, so müsste gleichzeitig sein können für den bestimmenden Punkt:

$$\text{23)}\qquad \frac{d\varphi}{dy}=0,\quad \frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\psi}{dy}=0,\quad \frac{d\psi}{dx}=0.$$

Alsdann ist jede durch den Strahl gelegte Ebene eine singuläre, der Strahl also eine Doppellinie des Complexes. (Plücker, Nr. 307.) Da das gleich-



zeitige Bestehen dreier Gleichungen Bedingung für diesen Fall ist, setzt das Vorkommen einer solchen Linie eine Particularisation des Complexes voraus. Für den Berührungspunkt der Complexcurve mit der Doppellinie ergiebt sich

$$z-\zeta=\frac{1}{\frac{d\varphi}{dx}},$$

und für den Berührungspunkt einer durch die Doppellinie gehenden zugeordneten singulären Ebene

$$z-u=\frac{1}{\frac{d\psi}{dy}}=\frac{1}{\frac{d\varphi}{dx}}.$$

Diese Punkte fallen also zusammen; alle durch die Doppellinie gelegten Ebenen berühren die Fläche der singulären Punkte und Ebenen in einem festen Punkte.

Nach den Plücker'schen Betrachtungen bestimmt sich ein Liniencomplex in folgender Weise. Sind die Gleichungen einer Geraden des Systems

$$x=rz+\varrho,\quad y=sz+\sigma,$$

so gehören alle diejenigen Geraden, welche einer gegebenen Gleichung zwischen den vier Linienconstanten r, s, ϱ, σ genügen, dem Complex an.

Wir bestimmten irgend eine Gerade des Complexes durch einen ihrer Punkte mittels der Doppelgleichung

$$\frac{x-u}{\varphi(x,y,z)}=\frac{y-v}{\psi(x,y,z)}=z-w.$$

Hieraus ergiebt sich

$$r=\varphi(x,y,z),\quad s=\psi(x,y,z),$$
$$\varrho=x-z\,.\,\varphi(x,y,z),\quad \sigma=y-z\,.\,\psi(x,y,z).$$

Aus diesen vier Gleichungen x, y, z eliminirend, ergiebt sich die Gleichung des Complexes in Plücker'schen Liniencoordinaten.

Wird ein anderer Punkt x_1, y_1, z_1 zur Bestimmung des Strahles gewählt, so treten an Stelle der Function $\varphi(x,y,z)$ und $\psi(x,y,z)$ die neuen $\varphi_1(x_1,y_1,z_1)$ und $\psi_1(x_1,y_1,z_1)$. Da der Punkt x_1, y_1, z_1 in der Linie selbst liegen soll, gelten für ihn die Gleichungen

$$x_1=x-(z-z_1)\,\varphi(x,y,z),\quad y_1=y-(z-z_1)\,\psi(x,y,z).$$

Ferner muss sein

$$\text{24)}\qquad \varphi(x,y,z)=\varphi_1(x_1,y_1,z_1),\quad \psi(x,y,z)=\psi_1(x_1,y_1,z_1).$$

Wird $z-z_1$ mit k bezeichnet, wo wir also k als irgend eine Function von x, y, z betrachten, ergiebt sich

$$\text{25)}\qquad x_1=x-k\,.\,\varphi(x,y,z),\quad y_1=y-k\,.\,\psi(x,y,z).$$

Wir werden nun in der folgenden Untersuchung zeigen, dass die bisher gefundenen Singularitäten des Liniencomplexes von der Wahl des bestimmenden Punktes unabhängig sind.

Aus der ersten Gleichung 24) ergiebt sich durch partielle Differentiation nach x

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi_1}{dx_1}\cdot\frac{dx_1}{dx}+\frac{d\varphi_1}{dy_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\frac{d\varphi_1}{dz_1}\cdot\frac{dz_1}{dx}.$$

Aus den Gleichungen 25) folgt

$$\left\{\begin{aligned}\frac{dx_1}{dx}&=1+k\frac{d\varphi}{dx}+\varphi\frac{dk}{dx},\\ \frac{dy_1}{dx}&=k\frac{d\psi}{dx}+\psi\frac{dk}{dx},\\ \frac{dz_1}{dx}&=\frac{dk}{dx}.\end{aligned}\right.$$

Diese Werthe in die vorhergehende Gleichung einführend, kommt

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{d\varphi_1}{dx_1}+k\left(\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\varphi_1}{dx_1}+\frac{d\psi}{dy}\cdot\frac{d\varphi_1}{dy_1}\right)+\frac{dk}{dx}\left(\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dx_1}+\psi_1\frac{d\varphi_1}{dy_1}+\frac{d\varphi_1}{dz_1}\right).$$

In genau gleicher Weise folgt

$$\frac{d\varphi}{dy}=\frac{d\varphi_1}{dy_1}+k\left(\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\varphi_1}{dx_1}+\frac{d\psi}{dy}\cdot\frac{d\varphi_1}{dy_1}\right)+\frac{dk}{dy}\left(\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dx_1}+\psi_1\frac{d\varphi_1}{dy_1}+\frac{d\varphi_1}{dz_1}\right),$$

$$\frac{d\varphi}{dz}=\frac{d\varphi_1}{dz_1}+k\left(\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d\varphi_1}{dx_1}+\frac{d\psi}{dz}\cdot\frac{d\varphi_1}{dy_1}\right)+\frac{dk}{dz}\left(\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dx_1}+\psi_1\frac{d\varphi_1}{dy_1}+\frac{d\varphi_1}{dz_1}\right).$$

Die erste dieser Gleichungen mit φ, die zweite mit ψ multiplicirend und dann alle drei addirend, folgt mit Berücksichtigung der Gleichungen 24)

$$\text{26)}\quad \begin{aligned}&\left(\varphi\frac{d\varphi}{dx}+\psi\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\right)\left(1-k\cdot\frac{d\varphi_1}{dx_1}\right)-k\frac{d\varphi_1}{dy_1}\left(\varphi\frac{d\psi}{dx}+\psi\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\psi}{dz}\right)\\ &=\left(\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dx_1}+\psi_1\frac{d\varphi_1}{dy_1}+\frac{d\varphi_1}{dz_1}\right)\left(1+\varphi\frac{dk}{dx}+\psi\frac{dk}{dy}+\frac{dk}{dz}\right).\end{aligned}$$

In entsprechender Weise ergeben sich aus der zweiten der Gleichungen 24) die Beziehungen

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{d\psi_1}{dx_1}+k\left(\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi_1}{dx_1}+\frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{d\psi_1}{dy_1}\right)+\frac{dk}{dx}\left(\varphi_1\frac{d\psi_1}{dx_1}+\psi_1\frac{d\psi_1}{dy_1}+\frac{d\psi_1}{dz_1}\right),$$

$$\frac{d\psi}{dy}=\frac{d\psi_1}{dy_1}+k\left(\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\psi_1}{dx_1}+\frac{d\psi}{dy}\cdot\frac{d\psi_1}{dy_1}\right)+\frac{dk}{dy}\left(\varphi_1\frac{d\psi_1}{dx_1}+\psi_1\frac{d\psi_1}{dy_1}+\frac{d\psi_1}{dz_1}\right),$$

$$\frac{d\psi}{dz}=\frac{d\psi_1}{dz_1}+k\left(\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d\psi_1}{dx_1}+\frac{d\psi}{dz}\cdot\frac{d\psi_1}{dy_1}\right)+\frac{dk}{dz}\left(\varphi_1\frac{d\psi_1}{dx_1}+\psi_1\frac{d\varphi_1}{dy_1}+\frac{d\psi_1}{dz_1}\right).$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, wieder die erste mit φ, die zweite mit ψ multiplicirend und hierauf addirend:

$$\text{27)}\quad \begin{aligned}&\left(\varphi\frac{d\psi}{dx}+\psi\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\psi}{dz}\right)\left(1-k\frac{d\psi_1}{dy_1}\right)-k\cdot\frac{d\psi_1}{dx_1}\left(\varphi\frac{d\varphi}{dx}+\psi\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\right)\\ &=\left(\varphi_1\frac{d\psi_1}{dx_1}+\psi_1\frac{d\psi_1}{dy_1}+\frac{d\psi_1}{dz_1}\right)\left(1+\varphi\frac{dk}{dx}+\psi\frac{dk}{dy}+\frac{dk}{dz}\right).\end{aligned}$$

Die Division der Gleichungen 26) und 27) liefert

$$\frac{\varphi_1 \frac{d\psi_1}{dx_1} + \psi_1 \frac{d\psi_1}{dy_1} + \frac{d\psi_1}{dz_1}}{\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1} + \psi_1 \frac{d\varphi_1}{dy_1} + \frac{d\varphi_1}{dz_1}} = \frac{\frac{\varphi \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}}{\varphi \frac{d\varphi}{dx} + \psi \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}} \cdot \left(1 - k \frac{d\psi_1}{dy_1}\right) - k \frac{d\psi_1}{dx_1}}{\left(1 - k \frac{d\varphi_1}{dx_1}\right) - k \frac{d\varphi_1}{dy_1} \cdot \frac{\varphi \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}}{\varphi \frac{d\varphi}{dx} + \psi \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}}}.$$

Setzen wir

$$\frac{\varphi \frac{d\psi}{dx} + \psi \frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}}{\varphi \frac{d\varphi}{dx} + \psi \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}} = \varkappa, \qquad \frac{\varphi_1 \frac{d\psi_1}{dx_1} + \psi_1 \frac{d\psi_1}{dy_1} + \frac{d\psi_1}{dz_1}}{\psi_1 \frac{d\varphi_1}{dx_1} + \psi_1 \frac{d\varphi_1}{dy_1} + \frac{d\varphi_1}{dz_1}} = \varkappa_1,$$

so ergiebt sich die allgemeine Beziehung

$$\text{28)} \qquad \varkappa_1 = \frac{\left(1 - k \frac{d\psi_1}{dy_1}\right) \varkappa - k \frac{d\psi_1}{dx_1}}{\left(1 - k \frac{d\psi_1}{dx_1}\right) - k \frac{d\psi_1}{dy_1} \cdot \varkappa}.$$

Soll $\varkappa_1 = \varkappa$ werden, so findet sich als Bedingung für die Punkte x_1, y_1, z_1

$$\text{29)} \qquad \frac{d\varphi_1}{dy_1} \varkappa_1^2 + \left(\frac{d\varphi_1}{dx_1} - \frac{d\psi_1}{dy_1}\right) \varkappa_1 - \frac{d\psi_1}{dx_1} = 0.$$

Diese Gleichung fällt jedoch mit jener, durch welche sich nach der Transformation des Complexes die singulären Strahlen bestimmen, zusammen; wir bezeichnen daher die linke Seite in 29) mit $\varDelta_1$. Hätten wir $\varphi_1(x_1, y_1, z_1)$ und $\psi_1(x_1, y_1, z_1)$ zunächst als gegeben und nun durch eine Transformation in $\varphi(x, y, z)$ und $\psi(x, y, z)$ übergeführt betrachtet, so hätte sich als Bedingung für diejenigen Punkte x, y, z, für welche $\varkappa_1 = \varkappa$ wird, ergeben $\varDelta = 0$. Hieraus folgt der Satz:

> Bei einer Transformation des Complexes entsprechen sich die Flächen $\varDelta = 0$ und $\varDelta_1 = 0$ derart, dass ein Strahl, bestimmt durch einen Punkt auf $\varDelta$, sich nach der Transformation durch den Schnittpunkt dieses Strahles mit $\varDelta_1$ bestimmt.

Mit Rücksicht auf die Bedeutung, welche $\varkappa$ für die singuläre Ebene besass, folgt weiter:

> Die singulären Strahlen und Ebenen sind unabhängig von einer Transformation des Complexes. Daher ist auch die Fläche der singulären Punkte und Ebenen unabhängig von der Transformation.

Aus den Gleichungen 26) und 27) folgt, dass diejenigen singulären Strahlen, welche Doppeltangenten an der Fläche der singulären Punkte bilden, für welche also

$$\varphi\frac{d\varphi}{dx}+\psi\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}=0,\quad \varphi\frac{d\psi}{dx}+\psi\frac{d\psi}{dy}+\frac{d\psi}{dz}=0,$$

nach der Transformation die entsprechenden Bedingungen für φ_1 und ψ_1 erfüllen.

Die Beziehung, welche Gleichung 28) zwischen $\varkappa$ und $\varkappa_1$ aufstellt, lässt sich in folgender Weise umwandeln. Aus 28) folgt

$$k\frac{d\varphi_1}{dx_1}\varkappa_1-k\frac{d\psi_1}{dx_1}=\varkappa_1-\varkappa+k\frac{d\psi_1}{dy_1}\varkappa-k\frac{d\varphi_1}{dy_1}\varkappa.\varkappa_1.$$

Es ist identisch

$$k\frac{d\varphi_1}{dy_1}\varkappa_1^2-k\frac{d\psi_1}{dy_1}\varkappa_1=k\frac{d\varphi_1}{dy_1}\varkappa_1^2-k\frac{d\psi_1}{dy_1}\varkappa_1.$$

Die Addition dieser Gleichungen ergiebt

$$k\left[\frac{d\varphi_1}{dy_1}\varkappa_1^2+\left(\frac{d\varphi_1}{dx_1}-\frac{d\psi_1}{dy_1}\right)\varkappa_1-\frac{d\psi_1}{dx_1}\right]=(\varkappa_1-\varkappa)\left(1+k\frac{d\varphi_1}{dy_1}\varkappa_1-k\frac{d\psi_1}{dy_1}\right)$$

oder

$$30)\qquad k\,.\,\varDelta_1=(\varkappa_1-\varkappa)\left(1+k\frac{d\varphi_1}{dy_1}\varkappa_1-k\frac{d\psi_1}{dy_1}\right).$$

Diese Gleichung ergiebt sich, wenn wir von x, y, z ausgehen. Nehmen wir $\varphi_1(x_1, y_1, z_1)$ und $\psi_1(x_1, y_1, z_1)$ als zuerst gegeben an und suchen die entsprechende Formel für die Punkte x, y, z, so tritt an Stelle von k $-k$ und wir erhalten

$$31)\qquad k\varDelta=(\varkappa_1-\varkappa)\left(1-k\frac{d\varphi}{dy}\varkappa+k\frac{d\psi}{dy}\right).$$

Die Division der Gleichungen 30) und 31) giebt für die Transformation von $\varDelta$ die Formel

$$32)\qquad \frac{\varDelta}{1-k\frac{d\varphi}{dy}\varkappa+k\frac{d\psi}{dy}}=\frac{\varDelta_1}{1+k\frac{d\varphi_1}{dy_1}\varkappa_1-k\frac{d\psi_1}{dy_1}}.$$

XV.

Ueber die Erzeugung der Curven dritter Classe und vierter Ordnung.

Von

WILHELM FRAHM
in Leipzig.

(Hierzu Taf. IV, Fig. 6—9.)

§ 1.

Die Theorie der Curven dritter Classe und vierter Ordnung hat zu verschiedenen Malen die Aufmerksamkeit hervorragender Mathematiker auf sich gezogen.

Nachdem der berühmte Steiner * (1856) in seiner kurzen Weise eine grosse Anzahl der merkwürdigsten Theoreme über eine specielle, hierher gehörende Curve mitgetheilt hatte, beschäftigte in dem folgenden Jahre Herr Schröter ** sich mit dem Gegenstande und lehrte die allgemeine Erzeugungsweise der Curven dritter Classe und vierter Ordnung als Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte projectivischer Punktreihen kennen, von denen die eine auf einer Geraden, die zweite auf einem Kegelschnitte liegt. Im Jahre 1865 leitete dann Herr Cremona ***, ebenfalls auf rein geometrischem Wege, alle von Steiner ohne Beweis angegebenen Eigenschaften aus der von Hesse, Cayley und ihm selbst † begründeten allgemeinen Theorie der Curven dritten Grades ab.

Jene inhaltsreiche Abhandlung ist mit einer Bemerkung des verewigten Clebsch versehen, worin Letzterer die Coordinaten der Tangenten

* Borchardt, Journ., Bd. 53 S. 233.

** Ebend., Bd. 54 S. 32.

*** Ebend., Bd. 64 S. 101. Cremona, *Sur l'hypocycloide à trois rebroussements.*

† Cremona, *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve plane;* deutsch von Kurtze.

und Punkte der Curve als Functionen eines Parameters darstellt und so nicht nur den Weg gezeigt hat, auf analytischem Wege die bis dahin bekannten Eigenschaften dieser Curven abzuleiten, sondern zugleich auch die Existenz einer von Steiner nicht bemerkten Classe von Tangentenpolygonen nachweist. Diese Bemerkung gab denn auch bald Herrn Guessfeldt* Gelegenheit zu einer analytischen Abhandlung über den Gegenstand, worin die Steiner'sche Art der Generation, jedoch in verallgemeinerter Form zu Grunde gelegt wird.

Herr Siebeck ** gab 1866 eine neue Methode, die in Frage stehenden Curven durch Punkte zu construiren, welche im Folgenden besteht: Man denke sich einem Dreiecke zwei Kegelschnitte umgeschrieben und ziehe durch deren vierten Schnittpunkt gerade Linien, welche jeden der beiden Kegelschnitte noch einmal schneiden werden. Zieht man jetzt in diesen Schnittpunkten die beiden Tangenten, so liegen deren Schnittpunkte alle auf einer Curve dritter Classe und vierter Ordnung, welche in den Ecken des Fundamentaldreiecks drei Rückkehrpunkte besitzt. Hierbei bemerkt Siebeck eine merkwürdige Reihe von Kegelschnitten und legt auf geometrischem Wege deren Eigenschaften dar. Es ist ein wesentlicher Zweck der vorliegenden Arbeit, Siebeck's Methode analytisch zu begründen, wobei gleichzeitig einige Eigenschaften jener Reihe von Kegelschnitten in Bezug auf die zugehörigen Systeme harmonischer Pole oder sich selbst conjugirter Dreiecke gefunden werden.

§ 2.

Die wesentlichsten und Grundeigenschaften der Curven dritter Classe und vierter Ordnung kann man wie folgt, zusammenfassen: Wenn ein Netz von Kegelschnitten gegeben ist, so ist die zugehörige Hesse'sche Curve (Ort der Doppelpunkte der Geradenpaare des Netzes, oder der Paare von Polen, welche in Bezug auf alle Kegelschnitte des Netzes conjugirt sind) von der dritten Ordnung und die zugehörige Cayley'sche Curve von der dritten Classe (Enveloppe der Verbindungslinien conjugirter Punkte der Curve von Hesse). Besteht aber das Netz im Besondern aus Kegelschnitten, welche auf einer festen Geraden (a) eine doppelte Berührung haben, so werden die Berührungspunkte auf jener Geraden eine Involution von Punktepaaren bilden, und die Hesse'sche Curve zerfällt in die Gerade a und einen Kegelschnitt, welcher durch die Doppelpunkte jener Involution hindurchgeht. Die Tangentenpaare der Kegelschnitte in den Berührungspunkten sind conjugirte Tangenten der Cayley'schen Curve, welche von der vierten Ordnung ist und die Gerade a zur Doppeltangente hat. Weiter zeigen also die Plücker'schen Formeln, dass letz-

* *P. Guessfeldt, De curva plana tertiae classis tangenti duplici praedita. Diss.*

** Borchardt, Journ., Bd. 66 S. 344.



tere Curve ausser drei Rückkehrtangenten weitere Singularitäten nicht aufweist. Jene drei Rückkehrtangenten aber schneiden sich in demselben Punkte, Pol der Doppeltangente a in Bezug auf den Hesse'schen Kegelschnitt.

§ 3.

Es mögen zunächst die wichtigsten Erzeugungsweisen der Curven dritter Classe und vierter Ordnung kurz zusammengestellt werden.

I. Constructionen mittels Tangenten.

1. Steiners, von Guessfeldt im Sinne der projectivischen Geometrie verallgemeinerte Methode.

2. Wenn eine Gerade und ein Kegelschnitt, sowie auf ersterer ein Punkt p, auf letzterem ein Punkt p' gegeben sind, so sind die Doppelpaare der durch die zwei Paare

$$\lambda p, \lambda p' \text{ und } \lambda \alpha, \lambda \alpha'$$

bestimmten Involution conjugirte Tangenten einer Curve dritter Classe und vierter Ordnung (Steiner). Hierbei ist λ ein beweglicher Punkt des Kegelschnittes und α, α' sind die Schnittpunkte der festen Geraden mit demselben.

3. Betrachtet man die Reihe von Kegelschnitten, welche einem Dreieck eingeschrieben sind und durch einen festen Punkt λ gehen, nimmt die Pole einer festen Geraden a in Bezug auf die Kegelschnitte der Reihe, verbindet sie durch gerade Linien mit dem Punkte α und zieht die Tangenten an die Kegelschnitte in den zweiten Schnittpunkten mit jenen Verbindungslinien, so umhüllen diese Tangenten eine Curve dritter Classe und vierter Ordnung, welche a zur Doppeltangente hat. (Von Schläfli an Steiner mitgetheilt.)

II. Constructionen durch Punkte.

4. Der Ort der Pole der Tangenten eines einem Dreieck umgeschriebenen Kegelschnittes in Bezug auf ersteres ist eine Curve dritter Classe und vierter Ordnung, welche in den Ecken des Dreiecks Rückkehrpunkte hat.

5. Siebeck's Erzeugungsweise.

6. Man kann noch folgende Methode hinzufügen, welche, wie es scheint, noch nicht beachtet worden ist. Gegeben ein Dreieck ABC und irgend ein demselben umgeschriebener Kegelschnitt, man ziehe beliebig viele Tangenten desselben, welche die Seite BC in q, q'... schneiden. Zieht man dann aus A einen Strahl A', welcher zu Aq harmonisch conjugirt ist in Bezug auf das Paar AB, AC und welcher die Tangente in r schneidet, so liegen alle Punkte r, r'... auf einer Curve dritter Classe und vierter Ordnung, welche in den Ecken des Dreiecks Rückkehrpunkte besitzt. Man erhält so, indem man A mit B und C vertauscht, mit Hilfe desselben Drei-

ecks und desselben Kegelschnittes drei verschiedene Curven und erkennt leicht hierin eine Verallgemeinerung der Construction von Fusspunktcurven, wie denn in der That die specielle Siebeck'sche Curve als Fusspunktcurve des Kreises für einen auf der Peripherie liegenden Pol erscheint.

Von allen diesen Constructionen kann nur die erste allein (wenn nämlich von den Hilfskegelschnitten nur einzelne Punkte gegeben sind) mit Hilfe der geraden Linie ausgeführt werden. Sind indess unter 4) und 6) einmal fünf Tangenten des Hilfskegelschnittes gefunden, so können alle übrigen und somit beliebig viele Punkte der in Frage stehenden Curve durch lineare Construction gefunden werden.

§ 4.

Es ist interessant, dass es genügt, die Eigenschaften einer speciellen Curve dritter Classe und vierter Ordnung (welche von jetzt an immer als eine C_3 kurz bezeichnet werden möge), z. B. der Steiner'schen, zu kennen, um daraus sofort die Eigenschaften einer allgemeinen C_3 abzuleiten. In der That, conjugirte Tangenten der Steiner'schen Curve schneiden sich unter rechtem Winkel und ihre Schnittpunkte liegen auf einem Kreise. Dies ist: Ihre conjugirten Tangenten bestimmen auf der unendlich fernen Geraden eine Involution, deren Doppelpunkte die imaginären Kreispunkte sind, und schneiden sich auf einem Kegelschnitte, welcher durch jene Punkte hindurchgeht. Hieraus fliessen alle anderen Eigenschaften der Steiner'schen Curve. In derselben Weise bestimmen conjugirte Tangenten einer allgemeinen C_3 auf der Dopeltangente eine Involution, deren Doppelpunkte die Berührungspunkte sind, und durchschneiden sich auf einem Kegelschnitte, welcher durch jene Punkte hindurchgeht, wodurch dann alle Eigenschaften einer C_3 bedingt sind. Man sieht, wenigstens jeder rein projectivischen Eigenschaft der Steiner'schen Curve muss eine andere einer allgemeinen C_3 entsprechen. Nun erlauben aber die von den Herren Cayley* und F. Klein** gegebenen Theorien, metrische Beziehungen auf projectivische zurückzuführen, wodurch die obige Behauptung gerechtfertigt ist. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass der von Cayley sogenannte „absolute Kegelschnitt" in unserem Falle in ein Punktepaar (nämlich das Paar der Berührungspunkte der Doppeltangente) ausgeartet ist, daher die „Entfernung" zweier Punkte nach jener Geometrie eine algebraische Function wird, wogegen der „Winkel" zweier Geraden nach Cayley durch einen *Arccos*, nach Klein durch einen Logarithmus ge-

---

* *Philosophical transactions, Vol.* 149 *p.* 61 — 96; *Mr. A. Cayley's sixth memoir upon quantics.*

** F. Klein, Ueber nichteuklidische Geometrie, Math. Annalen Bd. IV S. 573. Ein Beispiel für die Anwendung findet sich: A. Cayley, Math. Annal. Bd. V S. 630, *On the non Euclidian Geometry.*

messen wird. Der auf Strecken sich beziehenden Klein'schen Constanten ist demnach ein unendlich grosser Werth zu ertheilen und Strecken und Winkel sind nicht mehr vergleichbar.

§ 5.

Um ein gegebenes Dreieck ABC denken wir uns zwei Kegelschnitte beschrieben, welche wir mit (a) und (b) bezeichnen wollen (Taf. IV Fig. 6). Diese Kegelschnitte schneiden sich dann in einem vierten Punkte α, welcher stets reell ist, wenn ABC als reell vorausgesetzt wird. Zieht man dann durch α Sehnen, welche die Kegelschnitte (a) und (b) beziehungsweise in y und z zum zweiten Male schneiden, so wird verlangt, den Ort der Schnittpunkte der Tangenten an (a) und (b) in y und z anzugeben. Zu diesem Zwecke nehmen wir ABC als Coordinatendreieck für ein homogenes Coordinatensystem an, da, wie sich zeigen wird, durch diese specielle Annahme die Symmetrie der Gleichungen nicht gestört wird. Sind dann a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 constante Grössen, so kann man die Gleichungen der Kegelschnitte (a) und (b) so schreiben:

$$1)\qquad \frac{1}{a_1 x_1}+\frac{1}{a_2 x_2}+\frac{1}{a_3 x_3}=0,$$

$$2)\qquad \frac{1}{b_1 x_1}+\frac{1}{b_2 x_2}+\frac{1}{b_3 x_3}=0,$$

wo x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines Punktes x auf dem betreffenden Kegelschnitte sind. Für p, q als zwei Punkte des ersten Kegelschnittes ist die Gleichung der sie verbindenden Sehne

$$\frac{x_1}{a_1 p_1 q_1}+\frac{x_2}{a_2 p_2 q_2}+\frac{x_3}{a_3 p_3 q_3}=0,$$

da ihr Genüge geschieht, sowohl wenn man die x gleich den p, als auch gleich den q setzt. Hiernach sind die Gleichungen der Sehnen, welche α mit y und z verbinden:

$$3)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1 \alpha_1 y_1}+\dfrac{x_2}{a_2 \alpha_2 y_2}+\dfrac{x_3}{a_3 \alpha_3 y_3}=0, \\[2ex] \dfrac{x_1}{b_1 \alpha_1 z_1}+\dfrac{x_2}{b_2 \alpha_2 z_2}+\dfrac{x_3}{b_3 \alpha_3 z_3}=0. \end{cases}$$

Da aber y und z mit α auf derselben Geraden liegen sollen, so können diese beiden Gleichungen nur um einen Factor ϱ verschieden sein, also

$$4)\qquad \frac{\varrho}{a_1 y_1}=\frac{1}{b_1 z_1},\quad \frac{\varrho}{a_2 y_2}=\frac{1}{b_2 z_2},\quad \frac{\varrho}{a_3 y_3}=\frac{1}{b_3 z_3}.$$

Die Gleichungen der Tangenten an (a) und (b) in α sind

$$5)\qquad \begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1 \alpha_1^2}+\dfrac{x_2}{a_2 \alpha_2^2}+\dfrac{x_3}{a_3 \alpha_3^2}=0, \\[2ex] \dfrac{x_1}{b_1 \alpha_1^2}+\dfrac{x_2}{b_2 \alpha_2^2}+\dfrac{x_3}{b_3 \alpha_3^2}=0. \end{cases}$$

Nun muss, wenn man zu der zweiten der Gleichungen 5) die mit einem unbestimmten Factor λ multiplicirte erste hinzuaddirt, eine Gleichung erhalten werden, welche von der ersten der Gleichungen 3) nur um einen Factor Θ abweichen kann, indem die Gerade αy durch den Schnittpunkt α der beiden Tangenten in 5) gezogen ist. Die Coefficientenvergleichung ergiebt daher

$$5\text{a})\quad \frac{\Theta}{y_1}=\frac{1}{\alpha_1 b_1}(a_1+\lambda b_1),\quad \frac{\Theta}{y_2}=\frac{1}{\alpha_2 b_2}(a_2+\lambda b_2),\quad \frac{\Theta}{y_3}=\frac{1}{\alpha_3 b_3}(a_3+\lambda b_3);$$

weiter sind die Gleichungen der Tangenten an (a) und (b) in y und z

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1 y_1^2}+\dfrac{x_2}{a_2 y_2^2}+\dfrac{x_3}{a_3 y_3^2}=0,\\[2mm] \dfrac{x_1}{b_1 z_1^2}+\dfrac{x_2}{b_2 z_2^2}+\dfrac{x_3}{b_3 z_3^2}=0. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Gleichungen 4) und 5a) gehen diese Gleichungen über in

$$6\text{b})\quad \begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1\alpha_1^2 b_1^2}(a_1+\lambda b_1)^2+\dfrac{x_2}{a_2\alpha_2^2 b_2^2}(a_2+\lambda b_2)^2+\dfrac{x_3}{a_3\alpha_3^2 b_3^2}(a_3+\lambda b_3)^2=0,\\[2mm] \dfrac{x_1}{a_1^2\alpha_1^2 b_1}(a_1+\lambda b_1)^2+\dfrac{x_2}{a_2^2\alpha_2^2 b_2}(a^2+\lambda b_2)^2+\dfrac{x_3}{a_3^2\alpha_3^2 b_3}(a_3+\lambda b_3)^2=0, \end{cases}$$

und wenn man setzt

$$7)\quad \varDelta_1=a_2 b_3-a_3 b_2,\quad \varDelta_2=a_3 b_1-a_1 b_3,\quad \varDelta_3=a_1 b_2-a_2 b_1,$$

so ist

$$7\text{a})\quad \frac{1}{\alpha_1}:\frac{1}{\alpha_2}:\frac{1}{\alpha_3}=a_1 b_1 \varDelta_1 : a_2 b_2 \varDelta_2 : a_3 b_3 \varDelta_3.$$

Demnach findet man aus 6b)

$$8)\quad (a_1+\lambda b_1)^2:(a_2+\lambda b_2)^2:(a_3+\lambda b_3)^2=\frac{1}{x_1\varDelta_1}:\frac{1}{x_2\varDelta_2}:\frac{1}{x_3\varDelta_3},$$

oder mit Hilfe eines Factors μ

$$9)\quad \begin{cases} a_1+\lambda b_1+\dfrac{\mu}{\sqrt{x_1\varDelta_1}}=0,\\[2mm] a_2+\lambda b_2+\dfrac{\mu}{\sqrt{x_2\varDelta_2}}=0,\\[2mm] a_3+\lambda b_3+\dfrac{\mu}{\sqrt{x_3\varDelta_3}}=0, \end{cases}$$

und die Elimination von λ, μ ergiebt

$$10)\quad \sqrt{\frac{\varDelta_1}{x_1}}+\sqrt{\frac{\varDelta_2}{x_2}}+\sqrt{\frac{\varDelta_3}{x_3}}=0,$$

welches die Gleichung des gesuchten Ortes in Punktcoordinaten darstellt.

§ 6.

Denken wir uns durch irgend zwei der oben betrachteten Punkte y, z und durch die drei Ecken des Coordinatendreiecks einen Kegelschnitt

gelegt, und führen diese Operation für alle möglichen Punkte y, z aus, so findet sich die von Siebeck betrachtete Schaar von Kegelschnitten, welche wir immer als Schaar Σ bezeichnen werden.

Weiter unten werden wir die allgemeine Gleichung dieser Schaar geben und beweisen zunächst zwei Eigenschaften derselben. Offenbar ist die Gleichung irgend eines Kegelschnittes S, welcher in derselben enthalten ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} \\ \frac{1}{y_1} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{y_3} \\ \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_3} \end{vmatrix} = 0,$$

welche mit Hilfe der Gleichungen 4) übergeht in

$$11) \qquad \frac{a_1 \Delta_1 y_1}{x_1} + \frac{a_2 \Delta_2 y_2}{x_2} + \frac{a_3 \Delta_3 y_3}{x_3} = 0,$$

wo y_1, y_2, y_3 der Gleichung genügen

$$12) \qquad \frac{1}{a_1 y_1} + \frac{1}{a_2 y_2} + \frac{1}{a_3 y_3} = 0.$$

Für irgend einen andern Kegelschnitt S' der Schaar Σ ist ebenso

$$13) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{a_1 \Delta_1 y'_1}{x_1} + \frac{a_2 \Delta_2 y'_2}{x_2} + \frac{a_3 \Delta_3 y'_3}{x_3} = 0, \\ &\frac{1}{a_1 y'_1} + \frac{1}{a_2 y'_2} + \frac{1}{a_3 y'_3} = 0. \end{aligned} \right.$$

Führen wir jetzt mit den Kegelschnitten S und S' die im vorigen Paragraphen beschriebene Operation aus, so erhält man hier ebenso für den Ort der Schnittpunkte der erwähnten Tangenten

$$\sqrt{\frac{\Delta'_1}{x_1}} + \sqrt{\frac{\Delta'_2}{x_2}} + \sqrt{\frac{\Delta'_3}{x_3}} = 0,$$

wo

$$\begin{aligned} \Delta'_1 : \Delta'_2 : \Delta'_3 &= \frac{1}{a_2 a_3 \Delta_2 \Delta_3} \left(\frac{1}{y_2 y'_3} - \frac{1}{y_3 y'_2} \right) : \text{ etc.,} \\ &= a_1 \Delta_1 \left(\frac{1}{y_2 y'_3} - \frac{1}{y_3 y'_2} \right) : \text{ etc.;} \end{aligned}$$

aber aus 12) und der zweiten Gleichung 13) folgt

$$\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3} = \frac{1}{y_2 y'_3} - \frac{1}{y_3 y'_2} : \text{ etc.,}$$

demnach

$$\Delta'_1 : \Delta'_2 : \Delta'_3 = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3,$$

oder die so erhaltene Curve ist identisch mit der im vorigen Paragraphen gefundenen.

Die Gleichung der Enveloppe der Schaar Σ findet man, wenn man die Function

$$\frac{a_1 \Delta_1 y_1}{x_1} + \frac{a_2 \Delta_2 y_2}{x_2} + \frac{a_3 \Delta_3 y_3}{x_3} + \varrho \left(\frac{1}{a_1 y_1} + \frac{1}{a_2 y_2} + \frac{1}{a_3 y_3} \right) = F$$

nach y_1, y_2, y_3 differentiirt und dann

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 0 \ \ldots \ \frac{\partial F}{\partial y_3} = 0$$

setzt. Die hieraus bestimmten Werthe setzt man in 11) oder 12) ein und findet so

$$\sqrt{\frac{\Delta_1}{x_1}} + \sqrt{\frac{\Delta_2}{x_2}} + \sqrt{\frac{\Delta_3}{x_3}} = 0,$$

also wieder die Gleichung 10).

Das bis jetzt Gefundene kann man als Lehrsatz folgendermassen aussprechen:

Greift man aus der Schaar Σ zwei beliebige Kegelschnitte S und S' heraus, zieht durch ihren vierten Durchschnittspunkt eine Sehne und in den Schnittpunkten dieser Sehne mit den Kegelschnitten S, S' Tangenten an dieselben, so ist der Ort der Schnittpunkte dieser Tangenten immer eine und dieselbe Curve, welche auch zugleich die Enveloppe der Schaar Σ ist.

§ 7.

Jedem Punkte der Ebene entspricht eine Gerade, jeder Geraden ein Punkt (Pol und Polare) in Bezug auf ein Dreieck ABC. Berührt die Polare den Kegelschnitt

$$\frac{\Delta_1}{x_1} + \frac{\Delta_2}{x_2} + \frac{\Delta_3}{x_3} = 0,$$

welchen wir immer mit Siebeck als Kegelschnitt Θ kurz bezeichnen wollen, so liegt der Pol auf der durch Gleichung 10) definirten Curve, welche eine C_3 genannt werde. Wenn man jetzt die Werthe von $\frac{1}{y_1}$, $\frac{1}{y_2}$, $\frac{1}{y_3}$ aus 5a) in 11) einsetzt, so erhält man mit Hilfe von 7a) die Gleichung irgend eines Kegelschnittes der Schaar Σ in der Form

$$14) \qquad \frac{1}{x_1 (a_1 + \lambda b_1)} + \frac{1}{x_2 (a_2 + \lambda b_2)} + \frac{1}{x_3 (a_3 + \lambda b_3)} = 0.$$

Betrachtet man nun irgend einen dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kegelschnitt

$$\frac{1}{p_1 x_1} + \frac{1}{p_2 x_2} + \frac{1}{p_3 x_3} = 0,$$

und in den Ecken von ABC die Tangenten an demselben, so schneiden diese die Seiten, welche ihnen gegenüber liegen, in drei Punkten auf einer Geraden, deren Gleichung ist

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0.$$

Diese wird für den Kegelschnitt 14)

$$15) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \lambda (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) = 0.$$

Eine Gerade, welche für alle Werthe von λ durch einen Punkt P geht, dessen Coordinaten sind

$$x_1 : x_2 : x_3 = \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3.$$

Hierdurch erhalten, wie man leicht sieht, auch die Grössen a, b, λ, Δ ihre geometrische Deutung.

Jedem um ABC beschriebenen Kegelschnitte entspricht in Bezug auf dasselbe ein Pol, welcher der gemeinschaftliche Schnittpunkt aller Polaren ist, deren Pole sich auf dem Kegelschnitte bewegen. Der Ort jener erstgenannten Pole für die Kegelschnitte der Schaar Σ ist der Kegelschnitt Θ, denn die Coordinaten des Poles jenes Kegelschnittes in Bezug auf ABC sind

$$\frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3} = a_1 + \lambda b_1 : a_2 + \lambda b_2 : a_3 + \lambda b_3,$$

woraus

$$\frac{\Delta_1}{x_1} + \frac{\Delta_2}{x_2} + \frac{\Delta_3}{x_3} \equiv \Theta = 0.$$

Die vierten Schnittpunkte irgend dreier der Kegelschnitte der Schaar Σ, welchen die Werthe λ, λ', λ'' des Parameters entsprechen, liegen auf einer Geraden; denn die Bedingung hierfür ist nur um einen Factor von der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1, & a_2 + \lambda b_2, & a_3 + \lambda b_3 \\ a_1 + \lambda' b_1, & a_2 + \lambda' b_2, & a_3 + \lambda' b_3 \\ a_1 + \lambda'' b_1, & a_2 + \lambda'' b_2, & a_3 + \lambda'' b_3 \end{vmatrix}$$

verschieden, welche identisch verschwindet.

§ 8.

Die Schaar Σ zeichnet sich noch durch mehrere andere merkwürdige Eigenschaften aus. Sei z. B. α der vierte Schnittpunkt der beiden zuerst betrachteten Kegelschnitte (a) und (b). Verbindet man α mit A, B, C, verlängert αA, αB, αC genügend, bis sie die Seiten des Dreiecks in a, b, c treffen, so ist abc das in Bezug auf die Kegelschnitte (a) und (b) sich selbst conjugirte Dreieck, da, wie man leicht sieht, jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seite in Bezug auf beide Kegelschnitte ist. Die Gleichungen seiner Seiten findet man leicht:

$$16)\qquad \left\{\begin{aligned} y_1 &= -d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 = 0, \\ y_2 &= d_1 x_1 - d_2 x_2 + d_3 x_3 = 0, \\ y_3 &= d_1 x_1 + d_2 x_2 - d_3 x_3 = 0; \end{aligned}\right.$$

hieraus:

$$d_1 = \frac{1}{a_2 b_3} - \frac{1}{a_3 b_2} \text{ etc.},$$

$$16\text{a})\qquad 2x_1 = \frac{y_2 + y_3}{d_1}, \quad 2x_2 = \frac{y_3 + y_1}{d_2}, \quad 2x_3 = \frac{y_1 + y_2}{d_3}.$$

Setzt man diese Werthe in 1) und 2) ein, so gehen jene Gleichungen über in

$$17)\quad \begin{cases} b_1 \Delta_1 y_1^2 + b_2 \Delta_2 y_2^2 + b_3 \Delta_3 y_3^2 = 0, \\ a_1 \Delta_1 y_1^2 + a_2 \Delta_2 y_2^2 + a_3 \Delta_3 y_3^2 = 0. \end{cases}$$

Ganz in derselben Weise erhält man für die Seiten des Dreiecks, welches sich selbst conjugirt ist in Bezug auf die Kegelschnitte 1) und 14)

$$18)\quad \begin{cases} 0 = -a_1^2 \Delta_1 x_1 + a_2^2 \Delta_2 x_2 + a_3^2 \Delta_3 x_3 + \lambda(-a_1 b_1 \Delta_1 x_1 \\ \qquad\qquad + a_2 b_2 \Delta_2 x_2 + a_3 b_3 \Delta_3 x_3), \\ 0 = a_1^2 \Delta_1 x_1 + a_2^2 \Delta_2 x_2 + a_3^2 \Delta_3 x_3 + \lambda(a_1 b_1 \Delta_1 x_1 \\ \qquad\qquad - a_2 b_2 \Delta_2 x_2 + a_3 b_3 \Delta_3 x_3), \\ 0 = a_1^2 \Delta_1 x_1 + a_2^2 \Delta_2 x_2 - a_3^2 \Delta_3 x_3 + \lambda(a_1 b_1 \Delta_1 x_1 \\ \qquad\qquad + a_2 b_2 \Delta_2 x_2 - a_3 b_3 \Delta_3 x_3). \end{cases}$$

Die Seiten gehen demnach durch feste Punkte, und zwar:

bc geht durch den Punkt $x_1 : x_2 : x_3 = -\frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3}$,

ca ,, ,, ,, ,, $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{a_1} : -\frac{1}{a_2} : \frac{1}{a_3}$,

ab ,, ,, ,, ,, $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{a_1} : \frac{1}{a_2} : -\frac{1}{a_3}$.

Bestimmt man genau ebenso die Gleichungen der Seiten der sich selbst conjugirten Dreiecke in Bezug auf zwei Kegelschnitte der Schaar Σ, denen die Werthe λ, λ' des Parameters entsprechen, so findet man, dass diese alle von der Form sind

$$A + B(\lambda + \lambda') + C\lambda\lambda' = 0,$$

wo A, B, C lineare Functionen von x_1, x_2, x_3 sind.

Ist λ constant, so gehen eben, wie vorhin, die Seiten von abc durch feste Punkte:

bc geht durch den Punkt $x_1 : x_2 : x_3 = -\frac{1}{a_1 + \lambda' b_1} : \frac{1}{a_2 + \lambda' b_2} : \frac{1}{a_3 + \lambda' b_3}$,

ca ,, ,, ,, ,, $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{a_1 + \lambda' b_1} : -\frac{1}{a_2 + \lambda' b_2} : \frac{1}{a_3 + \lambda' b_3}$,

ab ,, ,, ,, ,, $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{a_1 + \lambda' b_1} : \frac{1}{a_2 + \lambda' b_2} : -\frac{1}{a_3 + \lambda' b_3}$.

Lässt man aber jetzt auch λ' sich ändern, so liegen diese Punkte immer auf den Kegelschnitten

$$19)\quad \begin{cases} -\frac{\Delta_1}{x_1} + \frac{\Delta_2}{x_2} + \frac{\Delta_3}{x_3} = 0, \\ \frac{\Delta_1}{x_1} - \frac{\Delta_2}{x_2} + \frac{\Delta_3}{x_3} = 0, \\ \frac{\Delta_1}{x_1} + \frac{\Delta_2}{x_2} - \frac{\Delta_3}{x_3} = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man die gerade Linie in 15) als L_λ, so werden wir das Folgende gefunden haben:

Betrachtet man aus der Schaar Σ zwei Kegelschnitte S_λ, $S_{\lambda'}$, so haben diese ein System harmonischer Pole gemeinsam, welches für jedes reelle Dreieck ABC reell ist; lässt man λ sich ändern, so gehen die Seiten desselben einzeln durch feste Punkte, welche, wenn man dann auch λ' sich ändern lässt, auf drei Kegelschnitten sich bewegen, die dem Dreieck ABC umgeschrieben sind. Durch jeden Punkt der Ebene gehen unendlich viele Seiten solcher selbst conjugirter Dreiecke, und die den zugehörigen Kegelschnitten S_λ, $S_{\lambda'}$ entsprechenden Geraden L_λ, $L_{\lambda'}$ bilden eine Involution von Strahlenpaaren.

§ 9.

Betrachtet man ferner einen beliebigen festen Punkt p und nimmt dessen Polaren in Bezug auf alle Kegelschnitte der Schaar Σ, so findet man als Gleichung der Enveloppe dieser Polaren

$$\sqrt{\frac{\Delta_1 x_1}{p_1}}+\sqrt{\frac{\Delta_2 x_2}{p_2}}+\sqrt{\frac{\Delta_3 x_3}{p_3}}=0$$

und als Gleichung des Ortes der Pole einer festen Geraden π

$$\frac{\Delta_1}{\pi_1 x_1^2}+\frac{\Delta_2}{\pi_2 x_2^2}+\frac{\Delta_3}{\pi_3 x_3^2}=0.$$

Die Tangentialgleichung der letzteren Curve ist

$$\sqrt[3]{\frac{u_1^2 \Delta_1}{\pi_1}}+\sqrt[3]{\frac{u_2^2 \Delta_2}{\pi_2}}+\sqrt[3]{\frac{u_3^2 \Delta_3}{\pi_3}}=0.$$

Demnach:

Die Polaren eines festen Punktes in Bezug auf die Schaar Σ umhüllen einen dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kegelschnitt. Die Pole einer festen Geraden liegen auf einer Curve vierter Ordnung und sechster Classe, welche in den Ecken des Dreiecks Doppelpunkte besitzt.

Die letztere Curve ist die Polarreciproke der Evolute eines Kegelschnittes.

§ 10.

Wir haben oben in 10) folgende Form für die Gleichung der Enveloppe der Schaar Σ gefunden:

19a) $$\sqrt{\frac{\Delta_1}{x_1}}+\sqrt{\frac{\Delta_2}{x_2}}+\sqrt{\frac{\Delta_3}{x_3}}=0.$$

Hieraus ergiebt sich sofort die Tangentialgleichung

20) $$\sqrt[3]{\Delta_1 u_1}+\sqrt[3]{\Delta_2 u_2}+\sqrt[3]{\Delta_3 u_3}=0,$$

also wenn man setzt

$$w_1=\Delta_1 u_1,\quad w_2=\Delta_2 u_2,\quad w_3=\Delta_3 u_3:$$

21) $$w=-(w_1+w_2+w_3)^3-27\,w_1 w_2 w_3=0.$$

Den drei Gleichungen

$$\frac{\partial w}{\partial w_1} = \frac{\partial w}{\partial w_2} = \frac{\partial w}{\partial w_3}$$

wird genügt durch

$$w_1 = w_2 = w_3;$$

also ist die Gerade, deren Coordinaten sind $\frac{1}{\varDelta_1}, \frac{1}{\varDelta_2}, \frac{1}{\varDelta_3}$, oder die Gerade

$$\frac{x_1}{\varDelta_1} + \frac{x_2}{\varDelta_2} + \frac{x_3}{\varDelta_3} = 0$$

Doppeltangente der Curve C_3. Die Gleichungen 8) ergeben die Coordinaten der Punkte der Curven folgendermassen, als Functionen eines Parameters λ ausgedrückt:

$$\text{21 a)} \quad \begin{cases} \frac{\varDelta_1 x_1}{\varrho'} = \frac{1}{(a_1 + \lambda b_1)^2}, \\ \frac{\varDelta_2 x_2}{\varrho'} = \frac{1}{(a_2 + \lambda b_2)^2}, \\ \frac{\varDelta_3 x_3}{\varrho'} = \frac{1}{(a_3 + \lambda b_3)^2}, \end{cases}$$

oder auch

$$\text{22)} \quad \begin{cases} \varrho x_1 = \frac{1}{\varDelta_1} (a_2 + \lambda b_2)^2 (a_3 + \lambda b_3)^2, \\ \varrho x_2 = \frac{1}{\varDelta_2} (a_3 + \lambda b_3)^2 (a_1 + \lambda b_1)^2, \\ \varrho x_3 = \frac{1}{\varDelta_3} (a_1 + \lambda b_1)^2 (a_2 + \lambda b_2)^2. \end{cases}$$

Die Coordinaten der im Punkte x berührenden Tangente aber drücken sich so aus:

$$\text{23)} \quad \varrho w_1 = \varDelta_1^3 (a_1 + \lambda b_1)^3, \quad \varrho w_2 = \varDelta_2^3 (a_2 + \lambda b_2^3), \quad \varrho w_3 = \varDelta_3^3 (a_3 + \lambda b_3)^3.$$

Und in der That befriedigen die Werthe 21 a) und 23) identisch die Gleichungen 19 a) und 20). Macht man die Gleichungen 23) dadurch homogen, dass man setzt

$$\varrho = \frac{1}{\varkappa^3}, \qquad \lambda = \frac{1}{\varkappa},$$

so muss in den Rückkehrpunkten die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \lambda^2}, & \frac{\partial^2 w_1}{\partial \lambda \, \partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 w_1}{\partial \varkappa^2} \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial \lambda^2}, & \frac{\partial^2 w_2}{\partial \lambda \, \partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 w_2}{\partial \varkappa^2} \\ \frac{\partial^2 w_3}{\partial \lambda^2}, & \frac{\partial^2 w_3}{\partial \lambda \, \partial \varkappa}, & \frac{\partial^2 w_3}{\partial \varkappa^2} \end{vmatrix}$$

verschwinden; wenn man daher immer voraussetzt, dass keine der Zahlen $\varDelta$ verschwindet:

$$\text{24)} \quad (a_1 + \lambda b_1)(a_2 + \lambda b_2)(a_3 + \lambda b_3) = 0.$$

Es ergeben sich daraus die Gleichungen der drei Rückkehrtangenten

$$25)\qquad \frac{x_2}{\Delta_2}-\frac{x_3}{\Delta_3}=0,\quad \frac{x_3}{\Delta_3}-\frac{x_1}{\Delta_1}=0,\quad \frac{x_1}{\Delta_1}-\frac{x_2}{\Delta_2}=0.$$

Dies heisst: Die drei Rückkehrpunkte der Curve C_3 liegen in den Ecken des Fundamentaldreiecks ABC, und die drei Rückkehrtangenten schneiden sich im Punkte P. Wir haben demnach alle Grundeigenschaften unserer Curve aus unseren Gleichungen abgeleitet.

§ 11.

Man kann sich die Aufgabe stellen, diejenige lineare Substitution zu bestimmen, durch welche die Gleichungen der Curve C_3 auf das von den Berührungspunkten der Doppeltangente und dem Schnittpunkte der Rückkehrtangenten gebildete Dreieck als Coordinatendreieck transformirt werden. Nun ergiebt sich, indem man die Gleichung 14a) rational macht, als Punktgleichung

$$26)\qquad \frac{4\Delta_1\Delta_2\Delta_3}{x_1x_2x_3}\left(\frac{x_1}{\Delta_1}+\frac{x_2}{\Delta_2}+\frac{x_3}{\Delta_3}\right)-\left(\frac{\Delta_1}{x_1}+\frac{\Delta_2}{x_2}+\frac{\Delta_3}{x_3}\right)^2=0,$$

oder: die Doppeltangente berührt die Curve in eben den beiden Punkten, wo letztere von dem Kegelschnitte Θ geschnitten wird. Zwei Ecken des gesuchten Coordinatendreiecks sind daher, weil P der Pol der Doppeltangente in Bezug auf Θ ist, die Berührungspunkte des von P an Θ gezogenen Tangentenpaares, und die Theorie der Kegelschnitte ergiebt leicht als Gleichung jenes Punktepaares:

$$v_1v_2=4\,(w_1^2+w_2^2+w_3^2-w_2w_3-w_3w_1-w_1w_2)=0$$

oder, indem man die rechte Seite dieser Gleichung wirklich in Factoren zerlegt:

$$27)\qquad \begin{cases} -\dfrac{v_1}{2}=w_1+\varepsilon w_2+\varepsilon' w_3,\\[2ex] -\dfrac{v_2}{2}=w_1+\varepsilon' w_2+\varepsilon w_3,\\[2ex] \quad v_3=w_1+\ \,w_2+\ \,w_3. \end{cases}$$

Denn $w_1+w_2+w_3=0$ ist nach dem Vorhergehenden die Gleichung des Punktes P, und zur Abkürzung ist gesetzt

$$\varepsilon=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\qquad \varepsilon'=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

oder ε, ε' sind die beiden imaginären Cubikwurzeln der Einheit. Aus den drei Gleichungen 27) erhält man

$$28)\qquad \begin{cases} -3w_1=\dfrac{v_1+v_2}{2}-v_3,\\[2ex] -3w_2=\dfrac{v_1\varepsilon'+v_2\varepsilon}{2}-v_3,\\[2ex] -3w_3=\dfrac{v_1\varepsilon+v_2\varepsilon'}{2}-v_3, \end{cases}$$

wodurch die geforderte Transformation geleistet ist; denn setzt man diese Werthe in 21) ein, so geht letztere Gleichung über in

29) $$v_1^3 + v_2^3 + 6\, v_1 v_2 v_3 = 0.$$

§ 12.

Die zweite der oben angeführten Erzeugungsarten ergiebt bei analytischer Behandlung sofort die Tangentialgleichung einer C_3 in der Form 29); man genügt derselben, indem man setzt

$$v_1 = \mu\lambda^2,$$
$$v_2 = \mu^2\lambda,$$
$$-6v_3 = \lambda^3 + \mu^3,$$

wenn $\frac{\lambda}{\mu}$ ein Parameter ist. Es sind dies die von Clebsch gegebenen Formeln. Man sieht auch leicht, dass Schröter's Methode in jener enthalten ist; denn denkt man sich die zweiten Durchschnitte $y, y'\ldots$ einer der Geraden des Doppelpaares mit irgend einem Punkte X des Kegelschnittes verbunden, so hat man ein Strahlenbüschel, welches offenbar projectivisch ist mit der Punktreihe $z, z'\ldots$, welche jene Gerade bei ihrer Bewegung auf der festen Geraden bestimmt. Eine Curve C_3 wird also umhüllt durch die Verbindungslinien projectivischer Punktreihen auf einer Geraden und auf einem Kegelschnitte; erstere aber ist eine Doppeltangente der Enveloppe.

§ 13.

Es sei eine Reihe von Kegelschnitten gegeben, welche einem Dreieck eingeschrieben sind und ausserdem einen festen Punkt enthalten. Die Gleichung dieser Kegelschnitte in Tangentialcoordinaten ist von der Form

1) $$\frac{\varkappa_1}{u_1} + \frac{\varkappa_2}{u_2} + \frac{\varkappa_3}{u_3} = 0.$$

Soll dieser Kegelschnitt durch den festen Punkt α $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ hindurch gehen, so muss man zwischen den Constanten $\varkappa$, α folgende Gleichung haben:

2) $$\sqrt{\varkappa_1 \alpha_1} + \sqrt{\varkappa_2 \alpha_2} + \sqrt{\varkappa_3 \alpha_3} = 0.$$

Letzterer genügt man, bei richtiger Bestimmung der Vorzeichen der Quadratwurzeln, indem man setzt

$$\varkappa_1 \alpha_1 = p_1^2, \quad \varkappa_2 \alpha_2 = p_2^2, \quad \varkappa_3 \alpha_3 = p_3^2,$$

wenn man die sonst willkürlichen Grössen p so bestimmt, dass

3) $$p_1 + p_2 + p_3 = 0$$

wird. Hierdurch geht die Gleichung 1) über in

4) $$\frac{p_1^2}{\alpha_1 u_1} + \frac{p_2^2}{\alpha_2 u_2} + \frac{p_3^2}{\alpha_3 u_3} = 0.$$

Wir stellen die Frage: Wenn man in Bezug auf die so eben beschriebenen Kegelschnitte den Pol einer festen Geraden (a) nimmt, denselben durch eine Gerade mit α verbindet und an den zweiten Schnittpunkten dieser Verbindungslinien mit den Kegelschnitten Tangenten zieht, welche Curve wird von diesen Tangenten umhüllt werden?

Offenbar muss jede dieser Tangenten nach den Sätzen über Pol und Polare durch den Schnittpunkt der entsprechenden Tangente in α mit der festen Geraden a (a_1, a_2, a_3) gehen; daher sind ihre Coordinaten von der Form

$$6)\qquad u_1 = \frac{p_1}{\alpha_1} + \Theta a_1, \quad u_2 = \frac{p_2}{\alpha_2} + \Theta a_2, \quad u_3 = \frac{p_3}{\alpha_3} + \Theta a_3,$$

wo Θ ein näher zu bestimmender Factor ist. Indem man diese Werthe in 4) einsetzt, wird eine Wurzel $\Theta = 0$ und für die andere findet man

$$\Theta = \frac{p_1 p_2 p_3 \left(\frac{1}{b_2 b_3} + \frac{1}{b_3 b_1} + \frac{1}{b_1 b_2} \right)}{\frac{p_1^2}{b_1} + \frac{p_2^2}{b_2} + \frac{p_3^2}{b_3}}, \text{ wo } b_i = a_i \alpha_i.$$

Setzt man jetzt $\frac{p_i}{b_i} = q_i$, $\frac{\alpha_i u_i}{b_i} = v_i$, so findet sich:

$$6)\qquad \left\{ \begin{aligned} v_1 &= q_1 (q_1 - q_2)(q_1 - q_3), \\ v_2 &= q_2 (q_2 - q_1)(q_2 - q_3), \\ v_3 &= q_3 (q_3 - q_1)(q_3 - q_2), \end{aligned} \right.$$

wo also zwischen den q die Gleichung besteht

$$7)\qquad q_1 b_1 + q_2 b_2 + q_3 b_3 = 0.$$

Durch die Gleichungen 6) sind daher die Tangentialcoordinaten der Curve als Functionen eines Parameters $\frac{q_1}{q_2}$ vom dritten Grade gegeben. Da aber zwei Kegelschnitte der Reihe die Gerade a berühren, so ist jene Gerade Doppeltangente der Enveloppe. Setzt man aber die Werthe 6) in

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$

ein und bildet mit Hilfe von 7) nach dem Verhältniss $\frac{q_1}{q_2}$ die Discriminante, so ist diese oder die Punktgleichung der Enveloppe vom vierten Grade in den x, wodurch dieselbe als eine C_3 erkannt ist.

§ 14.

Die algebraische Untersuchung der unter Nr. 6 der Constructionen angeführten Methode gestaltet sich so einfach, dass es genügt, hier das Resultat derselben anzuführen, dass man nämlich folgende Gleichungen der Curven findet:

$$\sqrt{\frac{-2c_1}{x_1}}+\sqrt{\frac{c_2}{x_2}}+\sqrt{\frac{c_3}{x_3}}=0,$$
$$\sqrt{\frac{c_1}{x_1}}+\sqrt{\frac{-2c_2}{x_2}}+\sqrt{\frac{c_3}{x_3}}=0,$$
$$\sqrt{\frac{c_1}{x_1}}+\sqrt{\frac{c_2}{x_2}}+\sqrt{\frac{-2c_3}{x_3}}=0$$

für $\frac{c_1}{x_1}+\frac{c_2}{x_2}+\frac{c_3}{x_3}=0$ als Gleichung des umgeschriebenen Kegelschnittes, und erkennt man leicht, dass die drei Schnittpunkte der Rückkehrtangenten in einer Geraden liegen.

§ 15.

Die Eigenschaften der speciellen, von Steiner behandelten Curve lassen sich mit Leichtigkeit in der im Folgenden dargelegten Weise entwickeln. Legen wir den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems in das Centrum δ eines dem Dreieck ABC umgeschriebenen Kreises (Fig. 7). Ist dann $2r$ der Radius dieses Kreises, so stellen sich die Coordinaten seiner Punkte so dar:

$$x=2r\cos\varphi,\quad y=2r\sin\varphi,$$

und sind α_1, α_2, α_3 die Werthe von φ, welche den Ecken von ABC entsprechen, so werden die Gleichungen seiner Seiten BC, CA, AB:

$$1)\quad \begin{cases} x\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+y\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-2r\cos\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}=0,\\ x\cos\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}+y\sin\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}-2r\cos\frac{\alpha_3-\alpha_1}{2}=0,\\ x\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+y\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-2r\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}=0.\end{cases}$$

Ebenso werden die Gleichungen der Höhen

$$2)\quad \begin{cases} x\sin\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}+y\cos\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-2r\sin\left(\frac{\alpha_2+\alpha_3}{2}-\alpha_1\right)=0,\\ x\sin\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}+y\cos\frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}-2r\sin\left(\frac{\alpha_3+\alpha_1}{2}-\alpha_2\right)=0,\\ x\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+y\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}-2r\sin\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\alpha_3\right)=0.\end{cases}$$

Die Gleichung der Verbindungslinie der Fusspunkte der vom veränderlichen Punkte φ auf die Seiten BC und CA gefällten Lothe wird, indem in allen Gliedern sich der Factor $\sin\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_3-\varphi}{2}$ weghebt:

$$3)\quad (x-\Gamma)\sin\frac{\Theta-\varphi}{2}-(y-\Sigma)\cos\frac{\Theta-\varphi}{2}-r\sin\frac{\Theta-3\varphi}{2}=0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$4)\quad \begin{cases} \Theta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ \frac{\Gamma}{r} = \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3, \\ \frac{\Sigma}{r} = \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3. \end{cases}$$

Diese Gleichung zeigt zunächst durch ihre Symmetrie, dass die durch sie dargestellte Gerade auch den Fusspunkt des vom Punkte φ auf die dritte Seite gefällten Lothes enthält. Lässt man φ auf dem Kreise herumrücken, so wird demnach diese Gerade (die Fusspunktlinie) eine Curve C_3 umhüllen, von der zunächst sechs Tangenten leicht zu finden sind. Denn setzt man

$$\varphi = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$$

so erhält man aus 3) die Gleichungen 2); setzt man

$$\varphi = 180^0 - \alpha_1, \quad 180^0 - \alpha_2, \quad 180^0 - \alpha_3,$$

so hat man die Gleichungen 1). Es sind demnach sowohl die Höhen, als die Seiten Tangenten der Enveloppe.

Aber die Coordinaten des Höhenschnittpunktes D sind

$$x = 2\Gamma, \quad y = 2\Sigma,$$

daher die Coordinaten vom Centrum m des Feuerbach'schen oder Neunpunktkreises:

$$x = \Gamma, \quad y = \Sigma.$$

Legt man daher jetzt den Ursprung in m hinein und dreht die Axen um einen Winkel $\frac{\Theta}{3}$, so geht 4) über in

$$5)\quad x \sin\frac{\varphi}{2} - y\cos\frac{\varphi}{2} - r\sin\frac{3\varphi}{2} = 0,$$

wo φ für $\frac{\Theta}{3} - \varphi$ gesetzt, was geschehen kann, weil φ willkürlich ist. Indem man letztere Gleichung nach φ differentiirt und mit der ursprünglichen combinirt, erhält man die Coordinaten des Berührungspunktes:

$$6)\quad x = r(\cos 2\varphi + 2\cos\varphi), \quad y = r(\sin 2\varphi - 2\sin\varphi).$$

Die Gleichung 5) giebt $y = 0$ für $\varphi = 0$. Demnach ist die x-Axe Tangente der Curve, und für $\frac{\varphi}{2} = 60^0$ und 120^0 hat man zwei andere Tangenten. Demnach gehen vom Centrum des Kreises m drei Tangenten an die Curve, welche Winkel von 120^0 mit einander bilden.

Für $\frac{\varphi}{2} = 30^0, 90^0, -30^0$ hat man drei andere Tangenten, welche auch Tangenten des Kreises sind und deren Berührungspunkte auf dem Kreise m liegen. Die Curve C_3 berührt demnach den Kreis in drei um 120^0 von einander entfernten Punkten. Die Gleichungen 6) lassen auch sofort die Curve als eine Hypocykloide erkennen, für welche der Radius des rollenden Kreises $= r$ ist. Die Theorie der Cykloiden lehrt dann, dass C_3 in den

um 120° von einander entfernten Punkten A', B', C' Rückkehrpunkte erster Art besitzt. Weiter findet man leicht als Tangentialgleichung in rechtwinkligen Liniencoordinaten u, v

$$7) \qquad 3uv^2 - u^3 - \frac{u^2+v^2}{r} = 0,$$

oder die Curve ist von der dritten Classe und hat die Gerade $u=v=0$ oder die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente, ist daher von der vierten Ordnung. Setzt man in 5) $90^0 + \frac{\varphi}{2}$ für $\frac{\varphi}{2}$ ein, so hat man die beiden Gleichungen

$$8) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x \sin\frac{\varphi}{2} - y\cos\frac{\varphi}{2} - r\sin\frac{3\varphi}{2} = 0, \\ & x\cos\frac{\varphi}{2} + y\sin\frac{\varphi}{2} + r\cos\frac{3\varphi}{2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Die Tangenten der Curve sind daher in der Art conjugirt, dass sie zu zweien auf einander senkrecht stehen, und der Ort der Schnittpunkte solcher Tangenten ist der Kreis m:

$$9) \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Die Coordinaten der Schnittpunkte einer Tangente mit dem Kreise m sind

$$10) \qquad \left. \begin{aligned} x' &= -r\cos 2\varphi \\ y' &= -r\sin 2\varphi \end{aligned} \right\} s \quad \text{und} \quad \left. \begin{aligned} x'' &= r\cos\varphi \\ y'' &= -r\sin\varphi \end{aligned} \right\} \mu.$$

Den ersten Punkt s nennt Steiner den Scheitel, den zweiten μ den Mittelpunkt einer Tangente. Hieraus folgt, dass die nach den Punkten μ und s gezogenen Radien mit der x-Axe, das heisst mit einer der Rückkehrtangenten Winkel machen, von denen der erstere das Doppelte des zweiten ist. Denkt man demnach zwei bewegliche Radien des Kreises m sich nach entgegengesetzten Richtungen drehend, der erste mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit des zweiten, so umhüllt die Verbindungslinie ihrer Endpunkte eine Curve, welche gleich C_3 ist. Nun sind Seiten und Höhen des Dreiecks ABC Tangenten der Curve, und man hat demnach folgende Construction der Rückkehrtangenten: Von den Mitten α, β, γ der Seiten aus nimmt man $\alpha u = \frac{1}{3}\alpha a'$, $\beta v = \frac{1}{3}\beta b'$, $\gamma w = \frac{1}{3}\gamma c'$, so sind die Radien mu, mv, mw die Rückkehrtangenten. Die Gleichungen 10) geben mit 6)

$$11) \qquad x'' = \frac{x+x'}{2}, \quad y'' = \frac{y+y'}{2}.$$

Also liegt μ in der Mitte zwischen s und dem Berührungspunkte t, wornach also zu jeder Tangente der Berührungspunkt construirt werden kann.

Die Verbindungslinie der Berührungspunkte conjugirter Tangenten 8) ist ebenfalls Tangente an C_3, denn ihre Gleichung ist

$$12) \qquad x\sin\varphi + y\cos\varphi - r\sin 3\varphi = 0.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen 8) mit $\sin\frac{3\varphi}{2}$, die zweite mit $\cos\frac{3\varphi}{2}$, und addirt, so erhält man

13) $$x\cos\varphi - y\sin\varphi + r\cos 3\varphi = 0,$$

welches die zu 12) conjugirte Tangente darstellt, oder in Worten: Die Verbindungslinie t'' der Berührungspunkte conjugirter Tangenten t, t' ist ebenfalls Tangente an C_3, und die t'' conjugirte t''' geht durch den Schnittpunkt von t und t'.

Die Coordinaten der Berührungspunkte der zweiten der Geraden 8) sind:

$$x_1 = r(\cos 2\varphi - 2\sin\varphi), \quad y_1 = r(\sin 2\varphi - 2\cos\varphi),$$

also mit Hilfe von 6)

14) $$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = 16r^2,$$

das heisst: Die Entfernung der Berührungspunkte conjugirter Tangenten ist constant und gleich dem vierfachen Radius des Kreises m. Die Gleichungen der Normalen zu t, t', t'' in ihren Berührungspunkten sind:

15) $$\left\{\begin{aligned} & x\cos\frac{\varphi}{2} + y\sin\frac{\varphi}{2} - 3r\cos\frac{3\varphi}{2} = 0,\\ & x\sin\frac{\varphi}{2} - y\cos\frac{\varphi}{2} + 3r\sin\frac{3\varphi}{2} = 0,\\ & x\cos\varphi - y\sin\varphi - 3r\cos 3\varphi = 0.\end{aligned}\right.$$

Da die Determinante dieser Gleichungen verschwindet, so gehen jene drei Normalen durch denselben Punkt, welcher auf dem Kreise durch die Rückkehrpunkte liegt; denn aus 15) folgt

$$x^2 + y^2 = (3r)^2.$$

Es seien zwei Paare conjugirter Tangenten gegeben durch die Gleichungen

16) $$\left\{\begin{aligned} G) &\equiv x\sin\psi - y\cos\psi - r\sin 3\psi = 0,\\ G_1) &\equiv x\cos\psi + y\sin\psi + r\cos 3\psi = 0,\\ H) &\equiv x\sin\psi' - y\cos\psi' - r\sin 3\psi' = 0,\\ H_1) &\equiv x\cos\psi' + y\sin\psi' + r\cos 3\psi' = 0.\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichungen bildet man die Combinationen

$$-[G]\frac{\sin(\psi+2\psi')}{\sin(\psi+\psi')} + [H]\frac{\sin(2\psi+\psi')}{\sin(\psi-\psi')}$$
$$= -[G_1]\frac{\cos(\psi+2\psi')}{\sin(\psi-\psi')} + [H_1]\frac{\cos(2\psi+\psi')}{\sin(\psi-\psi')}$$

17) $$= x\sin(\psi+\psi') + y\cos(\psi+\psi') - r\sin 3(\psi+\psi') = 0.$$

Hieraus folgt, dass 17) die Verbindungslinie des Schnittpunkts von G und H mit dem Schnittpunkte von G_1 und H_1 darstellt, und die Form der Gleichung zeigt, dass diese Verbindungslinie eine Tangente an C_3 ist. Durch

einen analogen Process erhält man für die Gleichung der Verbindungslinie der Schnittpunkte GH_1 mit G_1H

18) $$x\cos(\psi+\psi')-y\sin(\psi+\psi')+r\cos 3(\psi+\psi')=0.$$

Daher: Die Verbindungslinien der Schnittpunkte zweier Paare conjugirter Tangenten sind selbst conjugirte Tangenten von C_3. Oder auch: Zieht man aus einem willkürlichen Punkte p drei Tangenten an die Curve C_3, so bilden sie mit den ihnen conjugirten ein vollständiges Viereck. Der Punkt p ist demnach der Höhenschnittpunkt des von den drei nicht durch ihn gehenden Tangenten gebildeten Dreiecks, und da allen diesen Dreiecken der Kreis m gemeinsam ist, so sind die Radien der ihnen umgeschriebenen Kreise von gleicher Grösse $=2r$ und durch die Fusspunktlinien aller dieser Kreise wird dieselbe Curve C_3 umhüllt.

§ 16.

(Fig. 8.) Wenn drei Kreise durch denselben Punkt a gehen und ihre Centra auf einem durch a gehenden Kreise K liegen, so sind nach einem bekannten Satze ihre dritten Schnittpunkte in gerader Linie. Umgekehrt sage ich, dass, wenn man durch den Schnittpunkt α zweier Kreise A', A'' eine Sehne $\alpha\alpha'\alpha''$ zieht und durch $\alpha'\alpha''$ und den andern Schnittpunkt a der beiden Kreise einen Kreis legt, dieser sein Centrum auf dem durch a, a', a'' gehenden Kreise K haben wird. Denn legt man durch α' und a einen Kreis, welcher sein Centrum auf K hat, so geht derselbe nach dem angezogenen Satze durch α''.

Man erkennt hieraus, dass, wenn man eine Reihe von Kreisen construirt, welche ihre Centra auf K haben und durch den festen Punkt a auf K gehen, diese Reihe ein specieller Fall der oben betrachteten Schaar Σ sein wird, daher eine Curve C_3 dritter Classe und vierter Ordnung umhüllt. Denn alle Kreise durch einen festen Punkt sind als Kegelschnitte anzusehen, welche einem Dreieck umgeschrieben sind. (Fig. 9.) Betrachten wir also einen beweglichen Kreis vom Radius AA', welcher sein Centrum auf einem Kreise hat, der aus P mit dem Radius PA beschrieben ist. Der Schnittpunkt mit dem nächstfolgenden Kreise wird symmetrisch liegen zu A gegen die Tangente $A'T$ am Kreise P. Zieht man daher Aa parallel mit $P'A$, so ist a, der Schnittpunkt von aA mit dem Kreise aus A', der gesuchte Schnittpunkt. Nun ist, wenn man $A'P$ um sich selbst verlängert bis M und aus M einen Kreis mit dem Radius $MA'=A'P$ beschreibt, welcher wegen der Symmetrie natürlich durch a geht:

$$\text{Bog. } aA'=\text{Bog. } AA'$$

und man sieht, dass die Enveloppe der Reihe dadurch hervorgebracht werden kann, dass man auf der Aussenseite des Kreises P einen andern von gleichem Radius rollen lässt. Ein Punkt a auf demselben, welcher bei Beginn des Rollens mit A zusammenfiel, beschreibt dann die Enveloppe.



Zieht man aus C, dem A gegenüberliegenden Punkte im Kreise P, einen Kreis mit dem Radius $CA = 2AP$, so geht dieser, weil $A'B = AA'$, durch denselben Punkt B, in welchem sich die Kreise A' und M schneiden. Verlängert man aA bis D auf dem Kreise P, so wird die Figur $ABCD$ ein Rechteck, wie man leicht sieht, oder aB ist Tangente in B am Kreise C. Oder: Fällt man aus A auf alle Tangenten des Kreises C Lothe, so bilden deren Fusspunkte die Enveloppe der Kreisreihe. Ferner ist $AD = CB = AC$, oder die Entfernung aD ist constant und gleich dem doppelten Radius des Kreises P. Man sieht aus dem Vorhergehenden: Die Enveloppe ist die als Cardioide bezeichnete Curve, welche auch einen Theil der Brennlinie des Kreises für einen auf der Peripherie liegenden leuchtenden Punkt bildet.

Bezeichnet man mit φ den Winkel APA', mit r den Radius des Kreises P, so drücken sich die Coordinaten des entsprechenden Punktes der Curve so aus:

$$1)\qquad x = r\,(2\cos\varphi - \cos 2\varphi),\quad y = r\,(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)$$

und die Gleichung einer Tangente wird

$$2)\qquad x\sin\frac{3\varphi}{2} - y\cos\frac{3\varphi}{2} - 3r\sin\frac{\varphi}{2} = 0.$$

Hieraus leitet sich leicht folgende Gleichung der Curve in rechtwinkligen Tangentialcoordinaten ab:

$$3)\qquad 0 = \frac{1}{r^3} + \tfrac{27}{4}\,(u^2 + v^2)\left(v - \frac{1}{r}\right).$$

Wenn man dies so schreibt:

$$0 = \left(\frac{w}{r} - v + \frac{v+ui}{2} + \frac{v-ui}{2}\right)^3 - 27\left(\frac{v+ui}{2}\right)\left(\frac{v-ui}{2}\right)\left(\frac{w}{r} - v\right),$$

wo $w = 1$, $i = \sqrt{-1}$ zu setzen ist, so sieht man aus dem in § 10, Gleichung 21) Ausgesprochenen, dass die Punkte

$$4)\qquad \frac{w}{r} - v = 0,\quad v + ui = 0,\quad v - ui = 0,$$

also der Punkt A und die beiden imaginären Kreispunkte drei Rückkehrpunkte der Curve sind und dass der Punkt $w = 0$ oder der Coordinatenanfang P als Schnittpunkt der Rückkehrtangenten anzusehen ist. Doppeltangente ist die Gerade $x = \frac{3r}{2}$ und die Berührungspunkte liegen in der Entfernung $\frac{r\sqrt{3}}{2}$ über und unter der x-Axe. Der Schnittpunkt conjugirter Tangenten ist eine Hyperbel, welche die erwähnten Punkte enthält.

Man kann nach der Relation zwischen den Winkeln φ, φ' fragen, denen conjugirte Tangenten entsprechen. Nun weiss man, dass jede Tangente die Curve noch in zwei solchen Punkten schneidet, zu denen conjugirte Tangenten gehören. Substituirt man also in die Gleichung

$$x\sin 3\psi - y\cos 3\psi - 3r\sin\psi = 0$$

für x, y ihre Werthe aus 1), so findet sich als Resultat

$$2 \sin(3\psi - \varphi) - \sin(3\psi - 2\varphi) - 3 \sin\psi = 0.$$

Aber diese Gleichung ist durch den unwesentlichen Factor $\sin^2\left(\psi - \frac{\varphi}{2}\right)$ (welcher die beiden zusammenfallenden Werthe $\frac{\varphi}{2} = \psi$ für den Berührungspunkt liefert) theilbar. Der Quotient ist

$$2 \sin\psi + \sin(\varphi - \psi) = 0.$$

Sind also φ, φ' die Wurzeln dieser für $\sin\varphi$ quadratischen Gleichung, so hat man

$$2 \sin\psi + \sin(\varphi - \psi) = 0, \quad 2 \sin\psi + \sin(\varphi' - \psi) = 0.$$

Eliminirt man ψ, so findet sich als die gesuchte Relation

$$tg\,\varphi \,.\, tg\,\varphi' = \tfrac{1}{3}. \tag{5}$$

Man bemerkt die Analogie dieser Gleichung mit der für die Steiner'sche Curve gefundenen, welche war

$$tg\,\varphi \,.\, tg\,\varphi' = -1.$$

Die Gleichung 5) giebt auch ein leichtes Mittel an die Hand, die Gleichung des Kegelschnitts zu bilden, welcher der Ort der Schnittpunkte conjugirter Tangenten ist; denn sie zeigt, dass, wenn man eine Tangente der Curve durch einen Parameter $tg\frac{\varphi}{2} = t$ bestimmt, der conjugirten Tangente der Werth $t' = \frac{1}{3t}$ entspricht. Hiernach kann man die Gleichungen zweier conjugirter Tangenten so schreiben:

$$x(3t - t^3) - y(1 - 3t^2) - 3rt(1 + t^2) = 0,$$

$$x(3t^2 - \tfrac{1}{9}) + y(t - 3t^3) - \frac{r}{3}(1 + 9t^2) = 0.$$

Eliminirt man t, so findet man

$$\frac{\left(x + \frac{6r}{5}\right)^2}{\left(\frac{9r}{5}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{3r^2}{5}} = 1, \tag{6}$$

die Gleichung einer Hyperbel, deren Centrum um die Strecke $\frac{r}{5}$ hinter C liegt und deren Axen $\frac{9r}{5}$ und $r\sqrt{\frac{-3}{5}}$ sind.

Die Elimination kann auf folgende Weise leicht vollzogen werden. Setzt man

$$
7)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\begin{array}{l}\text{I.}\\ \text{II.}\end{array} & t = \quad t' = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \text{so ist} \left\{\begin{array}{l} x = \frac{3r}{2},\quad y = \frac{r\sqrt{3}}{2}, \\ x = \frac{3r}{2},\quad y = -\frac{r\sqrt{3}}{2}, \end{array}\right. \\
\text{III.} & t = -t' = \frac{1}{\sqrt{-3}},\ \text{„ „}\quad x = -3,\ y = 0, \\
\text{IV.} & t = 0,\ t' = \infty,\quad \text{„ „}\quad x = \frac{3r}{5},\ y = 0.
\end{array}\right.
$$

Durch diese vier Punkte ist aber der Kegelschnitt vollkommen bestimmt, da wegen der Symmetrie die x-Axe die Richtung der grossen Hauptaxe der Curve bestimmt; deshalb liegt auch das Centrum in der Mitte zwischen den Punkten III und IV. Auch sieht man, dass die Punkte I und II Berührungspunkte der Doppeltangente sind, welche man als sich selbst conjugirt aufzufassen hat.

§ 17.

Wir haben gesehen, dass specielle Curven dritter Classe und vierter Ordnung durch Rollen von Kreisen auf oder in Kreisen erhalten werden können. Es ist nun interessant, dass analog Curven dritter Ordnung und vierter Classe, also mit einem Doppelpunkte * dadurch erzeugt werden können, dass eine Parabel auf einer andern, gleichen, rollt, und zwar so, dass im Anfange des Rollens die Scheitel beider Parabeln zusammenfallen. Beginnt dann die eine Parabel auf der andern zu rollen (ohne aber dabei zu gleiten), so beschreibt ein mit ihr unveränderlich fest verbundener Punkt eine Curve, deren rechtwinklige Coordinaten sich folgendermassen als Functionen eines Parameters λ darstellen:

$$
x = \frac{\alpha(1-\lambda^2) - 2\beta\lambda}{1+\lambda^2}, \quad y = \frac{m\lambda(1+\lambda^2) + 2\alpha\lambda + \beta(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2},
$$

wo der Ursprung der Coordinaten im Schnittpunkte der Axe und Directrix der festen Parabel liegt, mit deren Axe die x-Axe zusammenfällt. m ist der halbe Parameter der Parabeln, α, β sind die Coordinaten des beschreibenden Punktes, bezogen auf den Brennpunkt der rollenden Parabel; endlich ist λ die Tangente des halben Winkels, den die Parabelaxen in einem bestimmten Momente einschliessen.

Setzt man $\beta = 0$, $\alpha = 0$, so hat man $x = 0$, oder der Brennpunkt der rollenden Parabel bewegt sich auf der Directrix der festen. Verlegt man den Ursprung in den Scheitel der Parabel, kehrt die Richtung der x um und setzt $\beta = 0$, $\alpha = \frac{m}{2}$, so hat man eine Curve

---

* Ich bemerke, dass Punkte ausserhalb der Parabel Curven mit Doppelpunkt, Punkte auf der Parabel Curven mit Spitze, und endlich Punkte innerhalb der Parabel Curven mit conjugirtem Punkte beschreiben.



$$y^2(m-x)=x^3,$$

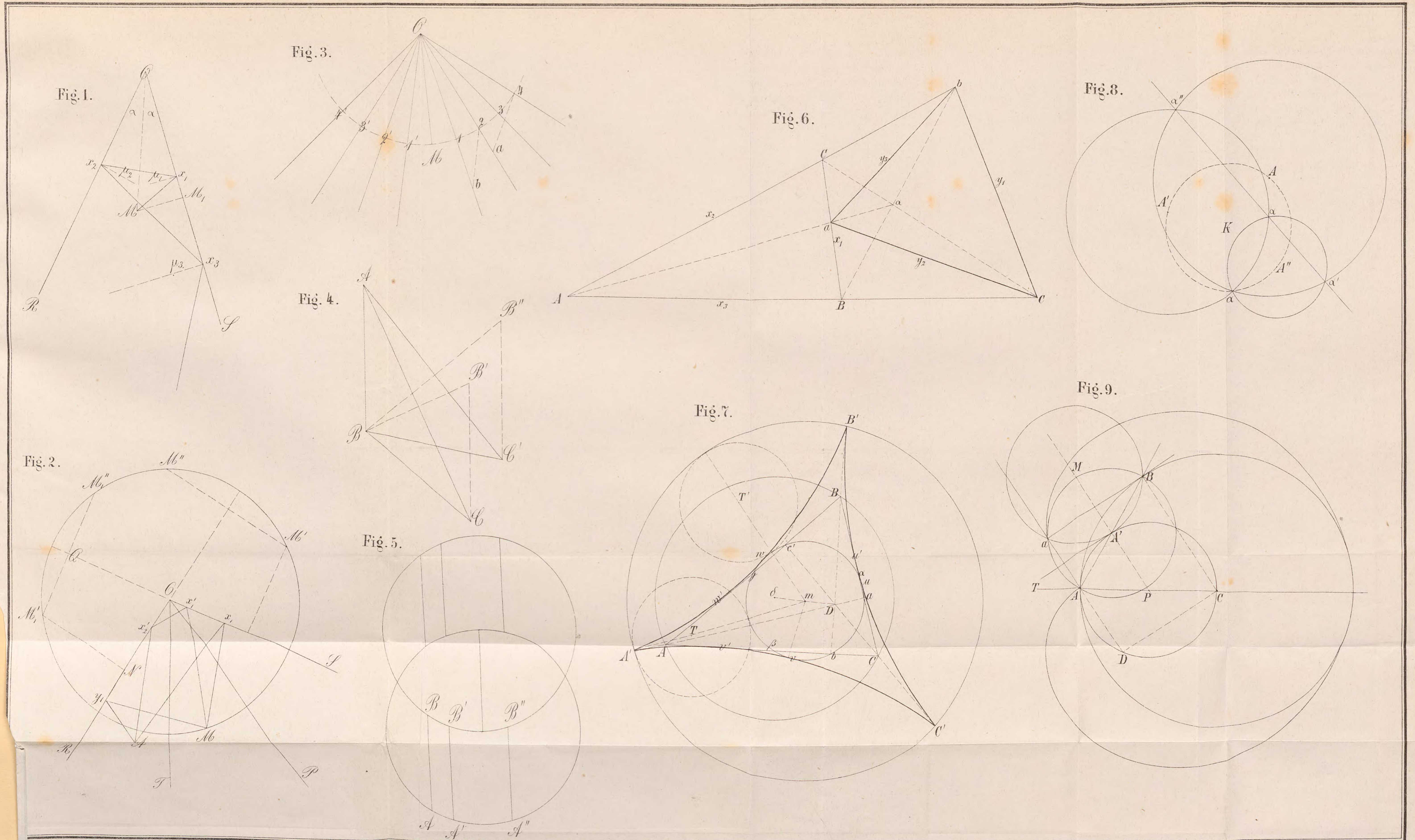
welche im Parabelscheitel einen Rückkehrpunkt hat und für welche die Directrix als Wendetangente anzusehen ist. (Berührungspunkt ist der unendlich ferne Punkt derselben.) Es ist dies die in älteren Werken häufig als Cissoide* bezeichnete Curve. Lässt man in ihrer Gleichung m variiren, so hat man ein Büschel von Curven, welche im Coordinatenanfange eine gemeinschaftliche Rückkehrtangente haben und von einem Curvenbüschel vierter Ordnung:

$$(x^2+y^2)^2-p(2x^2+y^2)=0$$

(für p als den Parameter des Büschels) orthogonal geschnitten werden.

---

* Schon von Diokles angewendet, siehe: *Montucla, Histoire des mathématiques, Vol. I p.* 339.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

Kleinere Mittheilungen.

XVI. Ueber die Construction und Darstellung des Ikosaeders und Sternen-Dodekaeders.

(Hierzu Taf. V, Fig. 1—7 *d.*)

Betrachtet man ein Ikosaeder in der durch Fig. 1 angegebenen Lage, in welcher die obere Kante desselben, $a_1 a_4$, horizontal liegt und etwas zur linken Seite des beobachtenden Auges sich befindet, so kann man sehen, dass die zwölf Eckpunkte des Ikosaeders sich in drei Gruppen zu je vier Punkten vereinigen lassen, welche in Fig. 1 und 2 mit den gleichen Buchstaben

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4,$$
$$b_1\, b_2\, b_3\, b_4,$$
$$c_1\, c_2\, c_3\, c_4$$

bezeichnet sind.

Diese drei Gruppen bilden drei auf einander senkrechte, sich durchkreuzende Rechtecke, welche in Fig. 2 in Parallelprojection, in Fig. 3*a* im Aufriss, in Fig. 3*b* im Grundriss dargestellt sind. Diese Rechtecke haben ihren gemeinsamen Schnittpunkt im Mittelpunkte des Ikosaeders und sollen mit dem Namen „Axenrechtecke" bezeichnet werden.

Es soll zunächst das Verhältniss der kleinen Seite zur grossen Seite des Axenrechtecks bestimmt werden.

Wir betrachten dazu das Rechteck $a_1 a_2 a_3 a_4$, Fig. 1. Die Seite $a_1 a_4$ = Seite $a_1 c_1$ als Kante des Ikosaeders; die Punkte $c_1 a_1 b_2 b_3 a_2$ liegen aber in einer Ebene und bilden ein regelmässiges Fünfeck, dessen Diagonale $a_1 a_2$ ist. Also verhält sich $a_1 c_1$ und $a_1 a_4$ zu $a_1 a_2$ wie die Seite eines regelmässigen Fünfecks zur Diagonale desselben.

Dieses Verhältniss wird in Fig. 5 anschaulich. *mo* ist eine Seite, *mn*, *no* sind Diagonalen des Fünfecks; *mno* bildet ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel an der Spitze *mno* 36^0 als Peripheriewinkel des Centriwinkels von 72^0 beträgt. Die Seite des regelmässigen Fünfecks verhält sich also zur Diagonale wie die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Winkel an der Spitze 36^0 beträgt, zur Seite desselben.



Es ist also folgender Satz gefunden:

> Die Eckpunkte des Ikosaeders liegen in drei congruenten, sich einander senkrecht durchkreuzenden Axenrechtecken. Das Verhältniss der kurzen Seite des Axenrechtecks, welche eine Kante des Ikosaeders bildet, zur langen Seite ist das Verhältniss der Seite eines regelmässigen Fünfecks zur Diagonale desselben.

Durch Rechtecke aus Cartonpapier, welche durch passende Einschnitte in der angegebenen Weise durcheinander gesteckt werden, lässt sich dieser Satz deutlich veranschaulichen.

Sucht man in dem System dieser Axenrechtecke die fünf Punkte auf, welche im Ikosaeder in einer Ebene liegen und ein regelmässiges Fünfeck bilden, so findet man, dass in den Axenrechtecken eine solche Ebene bestimmt wird beispielsweise durch eine kurze Seite $c_2 c_3$, eine lange Seite $b_4 b_8$ und den Punkt a_2 (oder durch Seite $c_2 c_3$ $b_1 b_2$ a_1).

Aus dem Gesagten ist ersichtlich, dass in dem System der betrachteten Axenrechtecke die kürzesten Verbindungslinien der Eckpunkte ein Ikosaeder bilden. Es soll nun die nächste Gruppe von Verbindungslinien der Eckpunkte der drei Axenrechtecke betrachtet werden, nämlich diejenigen, welche durch die lange Seite $a_1 a_2$ des Axenrechtecks dargestellt werden.

Wir verlassen für einen Augenblick das Ikosaeder, um eine kurze Betrachtung des regelmässigen Pentagonaldodekaeders anzustellen. Dieser Körper wird von zwölf regelmässigen Fünfecken begrenzt. Es ist bekannt und leicht ersichtlich, dass die Verbindungslinien der zwölf Flächenmittelpunkte ein Ikosaeder bilden. Denn diese zwölf Mittelpunkte sind gleichweit von einander entfernt und befinden sich auf der Oberfläche der dem Dodekaeder eingeschriebenen Kugel.

Wenn man nun statt der zwölf Mittelpunkte der Dodekaederflächen solche Punkte verbindet, welche in gleichem Abstande über den Flächen und senkrecht über den zwölf Flächenmittelpunkten sich befinden, so erhält man offenbar wiederum ein Ikosaeder, welches mit dem ersten denselben Mittelpunkt hat (den des Dodekaeders), der als innerer Aehnlichkeitspunkt beider Ikosaeder angesehen werden kann.

Verlängert man nun sämmtliche Flächen des Dodekaeders, so bildet sich über jeder Fläche desselben eine regelmässige fünfseitige Pyramide, deren Spitze senkrecht über dem Mittelpunkte ihrer Basis, des Fünfecks, steht. Da diese so entstandenen Pyramiden congruent sind, haben sie gleiche Höhe, also liegen ihre Spitzen nach der soeben angestellten Betrachtung im Ikosader. Von diesem Ikosaeder aber, dessen Eckpunkte die Spitzen der zwölf Pyramiden bilden, sind nicht die zunächstliegenden Punkte verbunden, sondern diejenigen, welche um die Langseite des Axenrechtecks entfernt sind.

Das so entstandene körperliche Gebilde führt den Namen „Sternendodekaeder". Es ist in Taf. V, Fig. 7, stereoskopisch dargestellt.

Fassen wir das bis hierher Entwickelte noch einmal zusammen, so kommen wir zur Aufstellung folgenden Satzes:

> In dem System der drei Axenrechtecke des Ikosaeders sind drei Gruppen von gleichlangen Linien vorhanden. Die Länge der Linien der ersten Gruppe wird dargestellt durch die kurze Seite, die Länge der Linien der zweiten Gruppe durch die lange Seite, die Länge der Linien der dritten Gruppe durch die Diagonale des Axenrechtecks.
>
> Die 30 Linien der ersten Gruppe bilden ein Ikosaeder,
>
> die 30 Linien der zweiten Gruppe ein Sternendodekaeder;
>
> die sechs Linien der dritten Gruppe stellen die Axen des Ikosaeders und Sternendodekaeders dar, sind also gleich dem Durchmesser der um beide Körper beschriebenen Kugel.

Der Umstand, dass das Sternendodekaeder als ein dem Ikosaeder eingeschriebener Körper betrachtet werden und letzteres durch das System der Axenrechtecke dargestellt werden kann, ist sehr vortheilhaft zur Darstellung eines Fadenmodells des Sternendodekaeders zu verwenden. Da dasselbe mit wenigen Kosten leicht herzustellen und wegen seiner Durchsichtigkeit ungemein instructiv ist, so soll seine Anfertigung jetzt beschrieben werden.

Man lasse vom Tischler das Fig. 4 gezeichnete Gestell anfertigen. Dasselbe besteht aus zwei sich senkrecht durchkreuzenden quadratischen Rahmen *ABCD* und *EFGH*. Die Rahmstücke *AB* und *CD* sind in ihrer Mitte von den gleichstarken Stücken *LM* und *JK* durchkreuzt. Ausgeführt sind Modelle von folgenden Dimensionen:

Die Länge von *AB* beträgt 17 Centimeter, die Breite 20, die Stärke 3 Millimeter.

Nun betrachte man die lichte Weite des Rahmens als Diagonale eines regelmässigen Fünfecks, construire die dazu gehörige Seite, trage dieselbe auf den inneren Mittellinien der Rahmenhölzer dergestalt ab, dass die Mitte der abgetragenen Seite mit dem Durchkreuzungspunkte der Mittellinien der Rahmenhölzer zusammenfällt. So erhält man die zwölf Endpunkte der abgetragenen Seiten als die bekannten Punkte der Axenrechtecke. Mit einem feinen Bohrer durchbohre man diese Eckpunkte und bringe an der Aussenseite des Rahmens zur Umschlingung des Fadens bei den Eckpunkten kleine Stifte oder Schrauben an.

Zur Erleichterung der Verbindung der richtigen Punkte stelle man das Gestell so hin, wie es die Zeichnung angiebt, und bezeichne die gefundenen Eckpunkte nach der in den Figuren angegebenen Weise mit den Buchstaben a_1, a_2 etc.

Zur Verbindung der betreffenden Punkte mit dem Faden dient folgendes Schema:

$$a_1\left|\begin{array}{l} b_3 b_4 \\ c_2 c_3, \\ a_2 \end{array}\right. \quad a_2\left|\begin{array}{l} b_1 b_2 \\ c_2 c_3, \\ a_1 \end{array}\right. \quad a_3\left|\begin{array}{l} b_1 b_2 \\ c_1 c_4, \\ a_4 \end{array}\right. \quad a_4\left|\begin{array}{l} b_3 b_4 \\ c_1 c_4, \\ a_3 \end{array}\right.$$

$$b_1\left|\begin{array}{l} a_2 a_3 \\ c_3 c_4, \\ b_2 \end{array}\right. \quad b_2\left|\begin{array}{l} a_2 a_3 \\ c_1 c_2, \\ b_1 \end{array}\right. \quad b_3\left|\begin{array}{l} a_1 a_4 \\ c_1 c_2, \\ b_4 \end{array}\right. \quad b_4\left|\begin{array}{l} a_1 a_4 \\ c_3 c_4, \\ b_3 \end{array}\right.$$

$$c_1\left|\begin{array}{l} a_3 a_4 \\ b_2 b_3, \\ c_2 \end{array}\right. \quad c_2\left|\begin{array}{l} a_1 a_2 \\ b_2 b_3, \\ c_1 \end{array}\right. \quad c_3\left|\begin{array}{l} a_1 a_2 \\ b_1 b_4, \\ c_4 \end{array}\right. \quad c_4\left|\begin{array}{l} a_3 a_4 \\ b_1 b_4. \\ c_3 \end{array}\right.$$

(NB. Im angeführten Schema kommt jeder Faden zweimal vor. Vorhanden sind demnach $3 \cdot \frac{4.5}{2} = 30$ Fäden.)

Man geht nun so zu Werke, dass man den Faden zieht zwischen jedem Punkte vor dem Striche und direct jedem der fünf hinter dem Striche befindlichen Punkte, oder man verbindet die letzteren fünf Punkte, welche in einer Ebene liegen und ein regelmässiges Fünfeck bilden, durch die Figur des Pentagramm. In Fig. 4 sind beide Arten der Verbindung für $a_1\left|\begin{array}{l} b_3 b_4 \\ c_2 c_3 \\ a_2 \end{array}\right.$ angedeutet.

Wenn das Modell mit weissen Fäden ausgeführt ist, so trägt es noch sehr zur grösseren Deutlichkeit bei, das durch Durchkreuzung der Fäden gebildete Dodekaeder durch Ueberpinselung mit Carmin von den auf ihm befindlichen Pyramiden abzuheben.

Die betrachtete Entstehung des Ikosaeders aus der bisherigen Anordnung der Axenrechtecke ist aber nicht die einzig mögliche. Man kann sich die Punkte des Ikosaeders auch bestimmt denken durch Rotation des Axenrechtecks um seine Diagonale als Axe um je $\frac{360}{5}^{0} = 72^{0}$. Zur Veranschaulichung dieser Entstehungsweise dient die stereoskopische Zeichnung Fig. 8. Durch die beigefügten Ziffern von 1 bis 5 sind die fünf Stellungen des Axenrechtecks kenntlich.

Denkt man nämlich ein Ikosaeder mit senkrecht stehender Axe vor sich, so sieht man vom höchsten und tiefsten Punkte derselben fünf Kanten ausgehen, von denen eine obere und eine untere einander parallel sind und deren entsprechende Endpunkte mit einander verbunden das bekannte Axen-

rechteck bilden. Das Ikosaeder wird so in fünf Axenrechtecke zerlegt und man erhält den Satz:

> Die Punkte des Ikosaeders werden bestimmt durch fünf Drehungen von je 72° des Axenrechtecks um seine Diagonale als Drehungsaxe.

Es lassen sich also die Punkte des Ikosaeders durch zwei ganz verschiedene Anordnungen der Axenrechtecke bestimmen, was jedenfalls eine charakteristische Eigenthümlichkeit dieses Körpers ist.

Aus dem Axenrechteck lässt sich die Berechnung der Seite des der Kugel eingeschriebenen Ikosaeders auf folgende Weise ableiten.

Bezeichnet man in Fig. 5 die Seite mo mit S, die Diagonale mn mit D, so ist $S = 2D \sin 18^0$. Bildet man nun in Fig. 6 ein Axenrechteck aus D und S als Seiten und bezeichnet die Diagonale desselben als Axe mit A, so erhalten wir zur Bestimmung des Rechtecks folgende Ausdrücke:

$$D = D,$$
$$S = 2D \sin 18^0,$$
$$A = \sqrt{D^2 + 4D^2 \sin^2 18} = D\sqrt{1 + 4\sin^2 18^0}.$$

Um den Radius der Kugel $= 1$ zu setzen, muss $A = 2$ gemacht werden, es müssen also sämmtliche Ausdrücke mit $\frac{2}{D\sqrt{1+4\sin^2 18^0}}$ multiplicirt werden. Hierdurch ergiebt sich

$$D = \frac{2}{\sqrt{1+4\sin^2 18^0}},$$
$$S = \frac{4.\sin 18^0}{\sqrt{1+4\sin^2 18^0}},$$
$$A = 2.$$

Der Sinus von 18^0 ist das Verhältniss der halben Seite des regulären Zehnecks zum Radius des umschriebenen Kreises. Die Seite des Zehnecks $= \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$. Demnach erhält man, wenn man $r = 1$ setzt:

$$\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Dieser Ausdruck in S eingesetzt, ergiebt für die gesuchte Seite des Ikosaeders

$$S = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{1+4.\frac{5+1-2\sqrt{5}}{16}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{1+\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}.$$

Durch numerische Berechnung des letzten Ausdruckes erhält man

$$S = 1{,}05146,$$

wenn der Radius der um dasselbe beschriebenen Kugel $= 1$ ist.

Um auf geometrischem Wege bei gegebenem Durchmesser der Kugel die Seite des in sie eingeschriebenen Ikosaeders zu bestimmen, construire man ein Axenrechteck, dessen Diagonale gleich dem gegebenen Durchmesser der Kugel ist. Die kurze Seite desselben ist die gesuchte Seite des Ikosaeders.

Die lange Seite ist die Seite des in die Kugel eingeschriebenen Sternendodekaeders, deren Berechnung nach der eben abgeleiteten Formel

$$D = \frac{2}{\sqrt{1 + 4 \sin^2 18^0}}$$

leicht ausgeführt werden kann.

Man erhält durch Einsetzung des Werthes von $\sin 18^0$

$$D = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}} = 1,7013$$

als Grösse der Seite des Sternendodekaeders.

Es ist hieraus zu ersehen, welche vortheilhafte Anwendung zur Berechnung und Construction man durch die Axenrechtecke machen kann.

Die Beobachtung des Fadenmodells macht noch andere Beziehungen ersichtlich; besonders macht dasselbe deutlich, wie man zur Darstellung der Projection des Dodekaeders die projectirten Punkte des auf die erste oder zweite Art aus den Axenrechtecken entstandenen Ikosaeders benutzen kann.

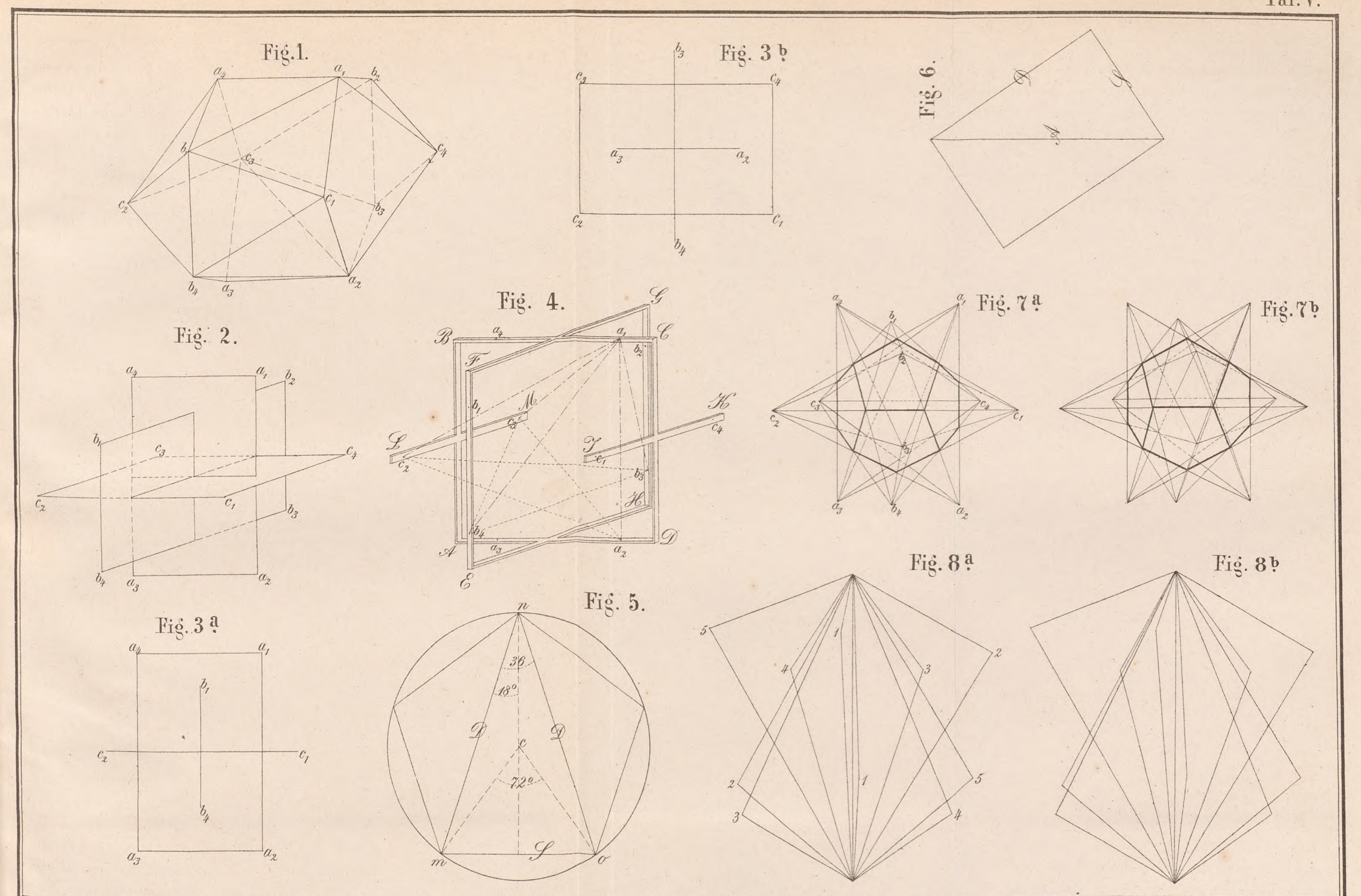
Diese Betrachtungen führen auf das specielle Gebiet der Projectionslehre; da die Hauptsache in dem bisher Entwickelten angegeben ist, so wird es für alle sich für diesen Gegenstand Interessirenden genügend sein.

Halle, 14. September 1872. P. SCHÖNEMANN.

XVII. Die Gleichung der elastigen Linie willkürlich belasteter gerader Stäbe.

I. Allgemeine Formeln.

Ein Stab ist in einer beliebigen Anzahl Punkte, deren Höhenlage innerhalb gewisser Grenzen verschieden sein kann, unterstützt. Oberhalb desselben ist eine Horizontale als Abscissenaxe angenommen. Der Stab wird an willkürlichen Stellen seiner ganzen Länge durch beliebige, gesetzmässig oder gesetzlos vertheilte und concentrirte Lasten angegriffen. Hierdurch entsteht die Biegung. Beim Uebergang von den verlängerten zu den verkürzten Fasern tritt eine „neutrale Schicht" auf, die keine Längenänderung, wohl aber eine Formänderung erleidet. Die in der Längenrichtung laufende Schwerlinie der neutralen Schicht ist die „neutrale Axe"; sie heisst nach der Biegung „elastige Linie". Es ist unsere Aufgabe, die


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3 a.
Fig. 3 b.
Fig. 4.
Fig. 5.
36
18°
72°
Fig. 6.
Fig. 7 a.
Fig. 7 b.
Fig. 8 a.
Fig. 8 b.

Gleichung derselben in einer Form aufzustellen, welche für alle besonderen continuirlichen und einfachen Stäbe und bei allen Belastungsarten giltig bleibt.

Wir betrachten irgend eine Oeffnung l, deren begrenzende Stützpunkte um c, c' von der Abscissenaxe entfernt liegen. Ursprung der Coordinaten bei der ersten Stütze, daselbst $y = c$. Die Tangenten der Neigungswinkel über o und l sind τ, τ'. Durch die Biegung sind im Innern des Stabes Spannungen entstanden, welche sich mit den äusseren Lasten ins Gleichgewicht gesetzt haben. Dieselben reduciren sich für jeden Querschnitt auf eine Verticalkraft und ein Moment. Innerhalb l, unmittelbar an den Stützen, seien M, M' die Momente, während den Verticalkräften gleichgrosse Stützenerectionen A, A' das Gleichgewicht halten. Die Momente M, M' können unter Umständen 0 werden. (Einfache Stäbe mit frei aufliegenden Enden.)

Es bezeichnen $P_1, P_2, P_3 \ldots$ die Lasten, welche zwischen 0 und x bei $a_1, a_2, a_3 \ldots$ angreifen, wobei die P auch Lastelemente sein und die a stetig aufeinander folgen können. Das Moment im Querschnitt x ist dann

$$M_x = M + Ax - \sum^x P(x-a). \tag{1}$$

Die allgemeine Gleichung der Biegung lautet

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_x}{\Theta}, \tag{2}$$

worin Θ das Product aus Elasticitätsmodul und Trägheitsmoment oder das Elasticitätsmoment im Querschnitt x. Die Gleichung 2) ist an die Bedingung geknüpft, dass der Quotient aus Längendifferential und Abscissendifferential, nämlich $\frac{ds}{dx} = 1$ gesetzt werden kann, wodurch eine Grenze in der Höhendifferenz und in der Stärke der Einbiegung gegeben ist. Verfährt man nun zunächst ganz allgemein, so folgt aus 2)

$$\frac{dy}{dx} + Const. = -\int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\, dx$$

und, weil für $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = \tau$:

$$\frac{dy}{dx} = \tau - \int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\, dx. \tag{3}$$

Durch nochmalige Integration wird erhalten

$$y + Const. = \tau . x - \int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\, dx,$$

aber für $x = 0$ $y = c$, also

$$4) \qquad y = c + \tau x - \int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx,$$

worin M_x durch 1) bestimmt. Dies ist die allgemeinste Form für die Gleichung der elastigen Linie. Sie gilt für homogene und heterogene Stäbe constanten oder veränderlichen Querschnitts von 1 bis ∞ vielen Oeffnungen, für frei aufliegende oder eingespannte Enden und bei jeder Art von Belastung. So lange indessen Nichts über Θ vorausgesetzt worden, ist eine Bestimmung der Integrale nicht möglich.

II. Homogene prismatische Stäbe.

In diesem Falle ist Θ constant. Die Aufstellung der Gleichung ist — wie auch in III — besonders von den Werthen einiger bestimmter Integrale abhängig. Wir geben deren Herleitung der Uebersicht halber in einem speciellen Capitel. Aus 1) und 3) folgt

$$\frac{dy}{dx} = \tau - \frac{M}{\Theta} x - \frac{A}{2\Theta} x^2 + \frac{1}{\Theta} \int_0^x \overset{x}{\Sigma} P(x-a)\, dx$$

und durch Substitution des Werthes 10)

$$5) \qquad \frac{dy}{dx} = \tau - \frac{1}{2\Theta} \left[2Mx + Ax^2 - \overset{x}{\Sigma} P(x-a)^2\right]$$

als Tangente des Neigungswinkels im Punkte x. Durch nochmalige Integration wird hieraus

$$y = c + \tau . x - \frac{M}{2\Theta} x^2 - \frac{A}{6\Theta} x^3 + \frac{1}{2\Theta} \int_0^x \overset{x}{\Sigma} P(x-a)^2\, dx$$

und nach Einsetzen von 11)

$$6) \qquad y = c + \tau x - \frac{1}{6\Theta} \left[3Mx^2 + Ax^3 - \overset{x}{\Sigma} P(x-a)^3\right].$$

Dies ist die Gleichung der elastigen Linie beliebiger homogener Stäbe constanten Querschnitts bei ganz willkürlicher Belastung. Die elastige Linie verläuft stetig, doch ändert sich das Curvengesetz unter jeder concentrirten Last und überall da, wo sich bei stetig vertheilten Lasten das Gesetz der Vertheilung ändert, so zwar, dass die in solchen Punkten zusammenhängengenden Curventheile daselbst eine gemeinschaftliche Tangente haben.

Der Werth der Summenausdrücke ist z. B. bei gleichmässig vertheilter Last von q pro Längeneinheit innerhalb der ganzen Oeffnung

$$\overset{x}{\Sigma} P(x-a)^2 = \int_0^x q . da . (x-a)^2 = \tfrac{1}{3} q x^3,$$

$$\sum^x P(x-a)^3 = \int_0^x q.da.(x-a)^3 = \tfrac{1}{4} q x^4.$$

Beträgt die Last pro Längeneinheit q von $a=0$ bis $a=g$ und p von $a=g$ bis $a=l$, so ist

von $x=0$ bis $x=g$:

$$\sum^x P(x-a)^2 = \int_0^x q\, da\, (x-a)^2 = \tfrac{1}{3} q x^3,$$

$$\sum^x P(x-a)^3 = \int_0^x q\, da\, (x-a)^3 = \tfrac{1}{4} q x^4;$$

von $x=g$ bis $x=l$:

$$\sum^x P(x-a)^2 = \int_0^g q\, da\, (x-a)^2 + \int_g^x p\, da\, (x-a)^2$$
$$= \tfrac{1}{3} p x^3 - \frac{g}{3}(q-p)(3x^2 - 3gx + g^2),$$

$$\sum^x P(x-a)^3 = \int_0^g q\, da\, (x-a)^3 + \int_g^x p\, da\, (x-a)^3$$
$$= \tfrac{1}{4} p x^4 - \frac{g}{4}(q-p)(4x^3 - 6gx^2 + 4g^2 x - g^3)$$

und man erkennt, dass sich das Curvengesetz bei g geändert hat.

III. Homogene Stäbe mit sprungweise veränderlichem Querschnitt.

Der Querschnitt eines homogenen Stabes sei nicht auf die ganze Länge einer betrachteten Oeffnung l, wohl aber zwischen 0 und x auf gewissen Strecken e_1, $e_2 - e_1 \ldots x - e_s$ constant. Die entsprechenden Elasticitätsmomente sind $\Theta_0, \Theta_1 \ldots \Theta_s$. Die neutrale Axe war vor der Biegung eine gerade Linie. Nach 3) ist für alle Stäbe

$$\frac{dy}{dx} = \tau - \int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\, dx$$

und es wird hieraus durch Substitution von 16) die Tangente des Neigungswinkels im Punkte x:

$$7)\quad \frac{dy}{dx} = \tau - \frac{1}{2\Theta_s}\Big[2Mx + Ax^2 - \sum^x P(x-a)^2\Big]$$
$$- \frac{1}{2\Theta_s}\sum_{z=1}^{z=s} \Delta_z \Big[2Me_z + Ae_z - \sum^{e_z} P(e_z - a)^2\Big].$$

Ferner gilt nach 4) allgemein

$$y = c + \tau x - \int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{\Theta} \, dx,$$

so dass nach Einsetzen des Integralwerthes aus 17)

$$\begin{aligned} y = c + \tau x - \frac{1}{6\Theta_n} \left[3 M x^2 - A x^3 - \sum^{x} P (x-a)^3\right] \\ 8) \qquad - \frac{1}{6\Theta_s} \sum_{z=1}^{z=n} \Delta_z \left[3 M e_z (2x - e_z) + A e_z^2 (3x - 2e_z) \right. \\ \left. - \sum^{e_z} P (e_z - a)^3 - 3(x - e_z) \sum^{e_z} P (e_z - a)^2\right], \end{aligned}$$

die Gleichung der elastigen Linie beliebiger homogener Stäbe bei sprungweise veränderlichem Querschnitt und willkürlicher Belastung. Ist Θ constant, dann verschwinden nach 15) alle Δ und Gleichung 8) geht über in die für constanten Querschnitt geltende Formel 6). Die Bildung der Summenausdrücke in 7) und 8) ist wie in II.

In den Ingenieurwissenschaften treten besonders die in II und III betrachteten Formen als Brückenträger auf.

IV. Ableitung der bestimmten Integrale.

Erste Gruppe. Unter der Annahme, dass zwischen 0 und x bei $a_1, a_2, a_3 \ldots$ die Kräfte $P_1, P_2, P_3 \ldots$ angreifen, haben wir folgende Integrale auszuführen:

$$\int_0^x \sum^x P (x-a) \, dx, \quad \int_0^x \sum^x P (x-a)^2 \, dx.$$

Man betrachte zunächst das Integral $\int_0^x \sum^x P \, dx$. Es ist

$$\int_0^x \sum^x P \, dx = \int_0^{a_1} \sum P \, dx + \int_{a_1}^{a_2} \sum P \, dx + \ldots + \int_{a_z}^x \sum P \, dx.$$

In jedem Partialintegral ist $\sum P$ constant und wird daher

$$\begin{aligned} \int_0^x \sum^x P \, dx &= 0 + P_1 (a_2 - a_3) + (P_1 + P_2)(a_3 - a_2) + \ldots + (P_1 + P_2 + \ldots + P_z)(x - a_z) \\ &= P_1 (x - a_1) + P_2 (x - a_2) + \ldots + P_z (x - a_z) \end{aligned}$$

und

$$9) \qquad \int_0^x \sum^x P \, dx = \sum^x P (x - a).$$

Unsere beiden Integrale werden nun ganz analog bestimmt. Man zerlegt

$$\int_0^x \sum^x P(x-a) = \int_0^x \sum^x Px\,dx - \int_0^x \sum^x Pa\,dx$$

und erhält dann wie oben

$$\int_0^x \sum^x Px\,dx = \tfrac{1}{2} \sum^x Px^2 - \tfrac{1}{2} \sum^x Pa^2; \qquad -\int_0^x \sum^x Pa\,dx = -\sum^x Pax + \sum^x Pa^2$$

$$\int_0^x \sum^x P(x-a) = \tfrac{1}{2} \sum^x P(x-a)^2. \tag{10}$$

In vollständig gleicher Weise wird aus

$$\int_0^x \sum^x P(x-a)^2\,dx = \int_0^x \sum^x Px^2\,dx - 2\int_0^x \sum^x Pax\,dx + \int_0^x \sum^x Pa^2\,dx$$

und nach Bestimmung der einzelnen Integrale

$$\int_0^x \sum^x Px^2\,dx = \tfrac{1}{3} \sum^x Px^3 - \tfrac{1}{3} \sum^x Pa^3$$

$$-2\int_0^x \sum^x Pa\,dx = -\sum^x Pax^2 + \sum^x Pa^3$$

$$\int_0^x \sum^x Pa^2\,dx = \sum^x Pa^2x - \sum^x Pa^3$$

$$\int_0^x \sum^x P(x-a)^2\,dx = \tfrac{1}{3} \sum^x P(x-a)^3. \tag{11}$$

Wir können hier zufügen die allgemeine Formel

$$\int_0^x \sum^x P(x-a)^{n-1}\,dx = \frac{1}{n} \sum^x P(x-a)^n \tag{12}$$

und den Werth des n fachen Integrals

$$\int_0^x dx \int_0^x dx \ldots \int_0^x \sum^x P.\,dx = \frac{1}{n!} \sum^x P(x-a)^n. \tag{13}$$

Zweite Gruppe. Mit der Bedingung, dass Θ zwischen 0 und x nicht überall gleich, sondern nur auf gewisse Strecken e_1, $e_2 - e_1 \ldots x - e_s$ constante Werthe Θ_0, $\Theta_1 \ldots \Theta_s$ habe, sind abzuleiten

$$\int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx, \quad \int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx,$$

worin

$$M_x = M + Ax - \sum^x P(x-a).$$

Es ist sofort

$$\int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx = \frac{1}{\Theta_0} \int_0^{e_1} M_x dx + \frac{1}{\Theta_1} \int_{e_1}^{e_2} M_x dx + \ldots + \frac{1}{\Theta_s} \int_{e_s}^x M_x dx,$$

$$14) \quad \int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx = \frac{1}{\Theta_s} \int_0^x M_x dx + \sum_{\nu=1}^{\nu=s} \left(\frac{1}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{1}{\Theta_\nu} \right) \int_0^{e_\nu} M_x dx,$$

aber mit Rücksicht auf 10)

$$\int_0^x M_x dx = Mx + \tfrac{1}{2} Ax^2 - \tfrac{1}{2} \sum^x P(x-a)^2,$$

und so hat man, wenn noch allgemein zur Abkürzung gesetzt wird

$$15) \quad \frac{\Theta_s}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{\Theta_s}{\Theta_\nu} = \varDelta_\nu,$$

den Werth des ersten Integrals

$$16) \quad \int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx = \frac{1}{2\Theta_s} \left[2Mx + Ax^2 - \sum^x P(x-a)^2 \right] + \frac{1}{2\Theta_s} \sum_{\nu=1}^{\nu=s} \varDelta_\nu \left[2Me_\nu + Ae_\nu^2 - \sum^{e_\nu} P(e_\nu - a)^2 \right].$$

Wir kommen jetzt zu dem Doppelintegral und haben nach 14) und 15)

$$\int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx = \frac{1}{\Theta_s} \int_0^x dx \int_0^x M_x dx + \frac{1}{\Theta_s} \sum_{\nu=1}^{\nu=s} \varDelta_\nu \int_0^x dx \int_0^{e_\nu} M_x dx.$$

Hierin ist mit Rücksicht auf 11)

$$\int_0^x dx \int_0^x M_x dx = \tfrac{1}{2} Mx^2 + \tfrac{1}{6} Ax^3 - \tfrac{1}{6} \sum^x P(x-a)^3$$

$$\int_0^x dx \int_0^{e_\nu} M_x\, dx = \int_0^{e_\nu} dx \int_0^{e_\nu} M_x\, dx + \int_{e_\nu}^x dx \int_0^{e_\nu} M_x\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} M e_\nu^2 + \tfrac{1}{6} A e_\nu^3 - \tfrac{1}{6} \overset{e_\nu}{\Sigma} P (e_\nu - a)^3$$

$$+ \tfrac{1}{2} (x - e_\nu) [2 M e_\nu + A e_\nu^2 - \overset{e_\nu}{\Sigma} P (e_\nu - a)^2],$$

so dass der Werth des ganzen Integrals

$$\int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx = \frac{1}{6\Theta_s} [3 M x^2 + A x^3 - \overset{x}{\Sigma} P (x - a)^3] \tag{17}$$

$$+ \frac{1}{6\Theta_s} \sum_{\nu=1}^{\nu=s} \varDelta_\nu [3 M e_\nu (2x - e_\nu) + A e_\nu^2 (3x - 2e_\nu)$$

$$- \overset{e_\nu}{\Sigma} P (e_\nu - a)^3 - 3 (x - e_\nu) \overset{e_\nu}{\Sigma} P (e_\nu - a)^2].$$

Die gestellte Aufgabe ist damit vollständig gelöst.

Andere Ableitung des Doppelintegrals. Die folgende Ableitung ist zwar etwas umständlicher, aber vielleicht besser zu verfolgen. Man setze vorübergehend in 16)

$$\frac{1}{2\Theta_s} \varDelta_\nu [2 M e_\nu + A e_\nu^2 - \overset{e_\nu}{\Sigma} P (e_\nu - a)^2] = a_\nu,$$

$$\frac{1}{2\Theta_s} \sum_{\nu=1}^{\nu=s} \varDelta_\nu [2 M e_\nu + A e_\nu^2 - \overset{e_\nu}{\Sigma} P (e_\nu - a)^2] = A_\nu,$$

dann ist

$$A_\nu = a_1 + a_2 + \ldots + a_\nu.$$

Durch Zerlegen in Partialintegrale wird

$$\int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx = \int_0^{e_1}\int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx + \int_{e_1}^{e_2}\int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx + \ldots + \int_{e_s}^x\int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx.$$

Hierin ist, nach 16) ausgedrückt:

von 0 bis e_1 $\displaystyle\int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx = \frac{1}{2\Theta_0} [2 M x + A x^2 - \overset{x}{\Sigma} P (x - a)^2],$

„ e_1 „ e_2 $\displaystyle\int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx = \frac{1}{2\Theta_1} [2 M x + A x^2 - \overset{x}{\Sigma} P (x - a)^2] + A_1$

. . . .

von e_s bis x $\displaystyle\int_0^x \frac{M_x}{\Theta} dx = \frac{1}{2\Theta_s} [2 M x + A x^2 - \overset{x}{\Sigma} P (x - a)^2] + A_s,$

wo innerhalb der angegebenen Strecken $A_1, A_2 \ldots A_s$ constant. Man erhält also

$$\int\limits_0^{e_1} dx \int\limits_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx = \frac{1}{6\,\Theta_0}\left[3\,M e_1^2 + A e_1^3 - \sum^{e_1} P(e_1 - a)^3\right],$$

$$\int\limits_{e_1}^{e_2} dx \int\limits_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx = \frac{1}{6\,\Theta_1}\left[3\,M e_2^2 + A e_2^3 - \sum^{e_2} P(e_2 - a)^3\right]$$

$$- \frac{1}{6\,\Theta_1}\left[3\,M e_1^2 + A e_1^3 - \sum^{e_1} P(e_1 - a)^3\right] + A_1 (e_2 - e_1)$$

. . . .

$$\int\limits_{e_s}^{x}\int\limits_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx = \frac{1}{6\,\Theta_s}\left[3\,M x^2 + A x^3 - \sum^{x} P(x - a)^3\right]$$

$$- \frac{1}{6\,\Theta_s}\left[3\,M e_s^2 + A e_s^3 - \sum^{e_s} P(e_s - a)^3\right] + A_s (x - e_s)$$

und demnach für das ganze Integral

$$\int\limits_0^{x}\int\limits_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx = \frac{1}{6\,\Theta_s}\left[3\,M x^2 + A x^3 - \sum^{x} P(x - a)^3\right]$$

$$- \frac{1}{6\,\Theta_s}\sum_{\nu=1}^{\nu=s} \Delta_\nu \left[3\,M e^2_\nu + A e^3_\nu - \sum^{e_\nu} P(e_\nu - a)^3\right] + \sum_{\nu=1}^{\nu=s} A_\nu (x - e_\nu).$$

Nun ist aber

$$A_1 = a_1,$$
$$A_2 = a_1 + a_2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$A_s = a_1 + a_2 + \ldots + a_s$$

und hieraus

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=s} A_\nu\,(x - e_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\nu=s} a_\nu\,(x - e_\nu).$$

Substituirt man den Werth von a_ν und dann den ganzen Summenausdruck in das vorstehende Integral, so erhält man nach Reduction wie oben

$$\int\limits_0^{x} dx \int\limits_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx = \frac{1}{6\,\Theta_s}\left[3\,M x^2 + A x^3 - \sum^{x} P(x - a)^3\right]$$

$$- \frac{1}{6\,\Theta_s}\sum_{\nu=1}^{\nu=s} \Delta_\nu \Big[3\,M e_\nu (2x - e_\nu) + A e^2_\nu (3x - 2e_\nu)$$

$$- \sum^{e_\nu} P(e_\nu - a)^3 - 3\,(x - e\ )\sum^{e_\nu} P(e_\nu - a)^2\Big].$$

Bekanntlich geht die Untersuchung aller Verhältnisse continuirlicher Stäbe und einfacher Stäbe mit eingespannten Enden von der Gleichung der elastigen Linie aus und es ist mittels der gegebenen Formeln möglich, allgemeinste, für alle Belastungsarten giltige Theorien aufzustellen.

Wiesbaden. Dr. JAKOB J. WEYRAUCH.

XVIII. Eine Abbildungsaufgabe.

Im Folgenden wird eine Aufgabe behandelt, welche auf die Transformation der elliptischen Functionen führt, nämlich die Aufgabe, eine Riemann'sche Fläche T conform so auf eine andere (zusammenhängende) $\mathfrak{T}$ abzubilden, dass jedem Punkte in T h Punkte in $\mathfrak{T}$ entsprechen, jedem Punkte in $\mathfrak{T}$ aber nur ein Punkt in T entspricht, und dass die den Zusammenhang charakterisirende Zahl (p) für T und $\mathfrak{T}$ dieselbe ist.

Es sei T eine Riemann'sche, $2p+1$-fach zusammenhängende Fläche, die überall n-fach über der z-Ebene ausgebreitet ist und wie die Wurzel s) der irreductibeln Gleichung

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$$

verzweigt ist. Dann ist

$$w = 2(p+n-1)$$

die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte in T und daher

$$p = \tfrac{1}{2}w - n + 1.$$

Ist nun $\mathfrak{z}$ eine in T h-werthige Function, so kann man über jeden Punkt der Fläche T h Punkte setzen und jedem Werthe von $\mathfrak{z}$ einen derselben entsprechen lassen. Wenn man nun in continuirlicher Aufeinanderfolge zu jedem Punkte in T die entsprechenden h Punkte bestimmt, so erhält man eine geschlossene, h-fach über der Fläche T, also $n.h$-fach über der z-Ebene ausgebreitete Fläche $\mathfrak{T}$ von der Beschaffenheit, dass jedem Punkte in T h Punkte in $\mathfrak{T}$ entsprechen. Es besteht die Fläche $\mathfrak{T}$ aus h Theilflächen, die alle der Fläche T congruent sind und die mit $T_1, T_2 \ldots T_h$ bezeichnet werden mögen. Zwischen entsprechenden, d. h. in Bezug auf die Theilflächen, denen sie angehören, gleichgelegenen (oder gleichgezählten) Blättern in $\mathfrak{T}$, also zwischen den Theilflächen unter einander, liegen Verzweigungspunkte (findet Verzweigung statt), wenn anders alle Werthe von $\mathfrak{z}$ durch stetige Abänderung (Fortsetzung) eines speciellen, indem $\mathfrak{z}$ als Function des Ortes in T angesehen wird, erlangt werden können und wenn die verschiedenen Werthe von $\mathfrak{z}$ für denselben Punkt in T nicht in Gruppen unter einander gleicher zerfallen. Gäbe es an irgend einer Stelle einen Verzweigungspunkt, der nicht-gleichgelegene Blätter verbände, so würde man dadurch, dass man die Variabele z in den h gleichgelegenen Blättern

---

* Siehe z. B.: Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Für den akademischen Unterricht und zum Gebrauch der Ingenieure. Von Dr. phil. Jakob J. Weyrauch. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner, 1873.



der Theilflächen, in deren einem der Verzweigungspunkt liegt, herumführt, in $h-1$ Blättern zu demselben Werthe der Function $\mathfrak{z}$ zurück, in einem Blatte aber zu einem neuen Werthe gelangen, und es würden demnach einem Punkte in T $h+1$ Punkte in $\mathfrak{T}$ entsprechen, oder es müssten zu einem Punkte von T (oder vielmehr zu jedem Punkte eines endlichen Flächenstücks um jenen dem Verzweigungspunkte in T entsprechenden Punkt herum) $h+1$ Werthe von $\mathfrak{z}$ gehören, was gegen unsere Annahme ist.

Jede Function $\mathfrak{z}$ einer Fläche $\mathfrak{T}$, welche die eben skizzirte Gestalt hat und deren Werthe für einen Punkt in T nicht in Gruppen unter einander gleicher zerfallen (was ausgeschlossen ist*), ist die Wurzel einer irreductibeln Gleichung vom Grade h nach $\mathfrak{z}$ mit rationalen oder, wenn man will, ganzen Coefficienten in s und z. Wird $\mathfrak{z}$ in i Punkten von $\mathfrak{T}$ unendlich gross erster Ordnung, so verschwinden, die Coefficienten als ganze Functionen vorausgesetzt, sämmtliche Coefficienten dieser Gleichung in je i Punkten** von T und dann noch in einigen anderen, für die alle Coefficienten gleichzeitig verschwinden. Sind nämlich $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \ldots \mathfrak{z}_h$ die verschiedenen Werthe von $\mathfrak{z}$ für ein Werthepaar (s, z) und ist a_0 eine ganze Function von s und z, die in i vorgegebenen Punkten, für welche $\mathfrak{z}$ unendlich wird, verschwindet, so ist

$$a_0(\mathfrak{f}-\mathfrak{z}_1)(\mathfrak{f}-\mathfrak{z}_2)\ldots(\mathfrak{f}-\mathfrak{z}_h) = \mathfrak{F}[\mathfrak{f}, (s,z)] = a_0\mathfrak{f}^h + a_1\mathfrak{f}^{h-1} + \ldots + a_h$$

eine einwerthige Function in T, die für alle endlichen Werthe von s und z endlich bleibt und deren Coefficienten $a_1, a_2 \ldots a_h$ folglich als ganze Functionen von s und z dargestellt werden können, und die für $\mathfrak{f} = \mathfrak{z}$ in $\mathfrak{T}$ überall verschwindet. Demnach ist $\mathfrak{z}$ die Wurzel einer Gleichung

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{z}, (s,z)] = a_0\mathfrak{z}^h + a_1\mathfrak{z}^{h-1} + \ldots + a_{h-1}\mathfrak{z} + a_h = 0$$

und es müssen, da $\mathfrak{z}$ nur für i vorgegebene Punkte unendlich wird, die in s und z ganzen Functionen $a_0, a_1 \ldots$ in den übrigen Punkten, in welchen a_0 noch verschwindet, ebenfalls sämmtlich Null werden.

Die Function $\mathfrak{F}(\mathfrak{f}, s, z)$ ist aber eine unzerfällbare Function; denn jeder rationale Factor derselben bildet, da er für einige der Wurzeln $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 \ldots \mathfrak{z}_h$ verschwindet, für $\mathfrak{f} = \mathfrak{z}$ eine Function von s und z, die in einem Theile von $\mathfrak{T}$, der einige der Theilflächen $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_h$ ganz enthält, überall verschwindet, folglich, da die Theilsysteme unter einander zusammenhängen, in der ganzen Fläche Null sein muss. Zwei unzerfällbare Factoren der Function $\mathfrak{F}$ könnten aber nur für eine endliche Anzahl von Werthepaaren (s, z) zugleich verschwinden, wenn nicht der eine durch Multiplication mit einem constanten Factor aus dem andern erhalten werden kann. Dann

---

* Damit ist nicht gesagt, dass sie nicht für denselben Werth von z in Gruppen unter einander gleicher zerfallen könnten.

** Fällt ein solcher Punkt für irgend einen Coefficienten auf $z = \infty$ oder $s = \infty$, so wird dieser Coefficient dort in einer um Eins niedrigeren Ordnung unendlich, als die übrigen Coefficienten.



müssten aber die Werthe von $\mathfrak{z}$ für denselben Punkt von T in Gruppen unter einander gleicher zerfallen, was ausgeschlossen ist. Folglich muss $\mathfrak{F}$ eine unzerfällbare Function sein.

Betrachtet man nun $\mathfrak{z}$ als Function von z, und $\mathfrak{T}$ als über der z-Ebene $n.h$-fach ausgebreitet, so wird man zwei Fälle unterscheiden können.

Entweder ist die Function $\mathfrak{z}$ die Wurzel einer irreductibeln Gleichung zwischen $\mathfrak{z}$ und z vom Grade $h.n$ nach $\mathfrak{z}$ und i nach z, nämlich dann, wenn die Werthe von $\mathfrak{z}$ für dasselbe z nicht in Gruppen unter einander gleicher zerfallen. In diesem Falle ist $\mathfrak{z}$ wie $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}$ wie $\mathfrak{z}$ auch bei der über der z-Ebene gedachten Ausbreitung verzweigt, und jede in $\mathfrak{T}$ einwerthige Function, also auch s, kann rational in $\mathfrak{z}$ und z ausgedrückt werden. Jedem Punkte in $\mathfrak{T}$ entspricht ein einziger Punkt in T.

Oder die Werthe von $\mathfrak{z}$ zerfallen in Gruppen unter einander gleicher für dasselbe z, und $\mathfrak{T}$ zerfällt in ebensoviele Theilflächen (die mit einander nicht zusammenhängen), als Gruppen vorhanden sind. (Diese Theilflächen können offenbar bei unseren Annahmen nicht aus einer ganzen Anzahl der früher besprochenen Theilflächen T_1, T_2... bestehen.) Dann ist $\mathfrak{T}$ zwar wie $\mathfrak{z}$ verzweigt, aber nicht $\mathfrak{z}$ wie $\mathfrak{T}$, d. h. es entspricht dann wohl jedem Punkte von $\mathfrak{T}$ nur ein Werth von $\mathfrak{z}$, aber nicht jedem Werthe von $\mathfrak{z}$ nur ein Punkt in $\mathfrak{T}$. In diesem Falle kann die in $\mathfrak{T}$ einwerthige Function s nicht rational durch $\mathfrak{z}$ und z ausgedrückt werden, sondern nur als Wurzel einer Gleichung, deren Coefficienten rational in Bezug auf $\mathfrak{z}$ und z sind und deren Grad (in Bezug auf s) gleich der Anzahl der Gruppen ist. Dieser zweite Fall ist aber den Bestimmungen unserer Aufgabe zufolge hier auszuschliessen.

Wir beschäftigen uns also nur mit dem Falle, in welchem die Werthe von $\mathfrak{z}$ für dasselbe z nicht in Gruppen unter einander gleicher zerfallen, und fügen unserer Aufgabe gemäss die Forderung hinzu, dass $\mathfrak{T}$ nicht mehrfach zusammenhängend sein solle, als T. Ist nun w die Anzahl der Verzweigungspunkte in T, $\mathfrak{w}$ die Zahl derer in $\mathfrak{T}$, und ist die Zahl der zwischen den Theilflächen T_1, T_2 ... T_h vorhandenen Verzweigungspunkte 2ν, so ist offenbar

$$\mathfrak{w} = h.w + 2\nu.$$

Diese 2ν Verzweigungspunkte können in $\mathfrak{T}$ beliebig gewählt werden, nur immer zwischen entsprechenden Blättern der Theilflächen T_1, T_2... T_h. Dadurch nun, dass man zwei solche Verzweigungspunkte in zwei Blättern, dem λ^{ten} und λ'^{ten} eines Systems T_μ, und ebenso (wie das sich von selbst versteht) des durch diese Verzweigungspunkte damit verbundenen Systems $T_{\mu'}$ in eine Verzweigungsstelle jener zwei Blätter (λ und λ') gleichzeitig hineinrückt, kann der Zusammenhang zwischen diesen beiden, dem λ^{ten} und λ'^{ten} Blatte in T_μ und dem gleichgelegenen von $T_{\mu'}$ aufgehoben werden; dafür stellt sich jedoch eine Verzweigung zwischen dem λ^{ten} Blatte von T_μ und dem λ'^{ten} in $T_{\mu'}$ und zwischen dem λ'^{ten} in T_μ und dem λ^{ten} in $T_{\mu'}$ her.

Es sei nämlich k der betrachtete Verzweigungspunkt in T_μ zwischen dem λ^{ten} und λ'^{ten} Blatte, k' der entsprechende in $T_{\mu'}$, $\varkappa$ der Verzweigungspunkt zwischen dem λ^{ten} Blatte von T_μ und $T_{\mu'}$, $\varkappa'$ der zwischen dem λ'^{ten} von T_μ und $T_{\mu'}$, und $\varkappa\,\varkappa'$ seien nahe an k und k' gerückt und werden als genau übereinanderliegend gedacht. Führt man dann die Variabele z in einer geschlossenen Curve um ein Gebiet, über welchem die Verzweigungspunkte k, k', $\varkappa$, $\varkappa'$ liegen, und nimmt dann als Anfangslage von z einen Punkt im λ^{ten} Blatte von T_μ, so kann man sich vorstellen, man sei erst um k herumgegangen und dadurch in das λ'^{te} Blatt von T_μ gelangt, und dann um $\varkappa'$ herum und dadurch ins λ'^{te} Blatt von $T_{\mu'}$ gelangt. Man ist also durch einen ganzen Umgang durch ein beide Verzweigungspunkte enthaltendes Gebiet, wenn z in seine Anfangslage zurückgekehrt ist, aus dem λ^{ten} Blatte von T_μ in das λ'^{te} von $T_{\mu'}$ gelangt. Umkreist man dasselbe Gebiet nochmals, so gelangt man (mittels k') ins λ^{te} Blatt von $T_{\mu'}$ und dann (mittels $\varkappa$) ins λ^{te} von T_μ zurück.

Geht man ebenso von einem Punkte im λ'^{ten} Blatte von T_μ aus, so gelangt man durch eine Umkreisung des besprochenen Gebietes ins λ^{te} Blatt von $T_{\mu'}$, durch eine nochmalige in die Anfangslage zurück. Wenn also $\varkappa$, $\varkappa'$ in k und k' hineingelegt werden, so werden aus jenen vier Verzweigungspunkten nur zwei. Eine andere Art, Verzweigungspunkte verschwinden zu machen, giebt es nicht. Es können jedoch durch ein solches Hineinrücken von Verzweigungspunkten, die zwischen Theilflächen liegen, in solche, die diesen allein angehören, niemals mehr Verzweigungspunkte aufgehoben werden, als hineingeschoben werden, und die Zahl $\mathfrak{w}$ erhält daher ihren Minimalwerth, wenn sie gleich $h.w$ ist. Daher ergiebt sich die den Zusammenhang der Fläche $\mathfrak{T}$ charakterisirende Zahl $\mathfrak{p}$, wenn $\mathfrak{w}$ den kleinsten Werth besitzt:

$$\mathfrak{p} = \tfrac{1}{2}(hw + 2 - 2hn) = h(\tfrac{1}{2}w - n + 1) - (h-1) = h(p-1) + 1.$$

Demnach ist $\mathfrak{p} = 1$, wenn $p = 1$ ist für jedes h. Wenn aber $p > 1$ ist, kann man ausser eindeutigen Abbildungen (d. h. $h=1$) keine finden, die der Bedingung entsprächen, dass $\mathfrak{T}$ denselben Zusammenhang habe, als T, und nicht in Theilsysteme zerfalle.*

Die Flächen T und $\mathfrak{T}$ sind also höchstens dreifach zusammenhängend ($p=1$), und dieser Fall allein soll weiter betrachtet werden.

Das überall endliche Integral u in T ist auch ein überall endliches Integral (erster Gattung) in $\mathfrak{T}$; aber der Flächeninhalt des endlichen Stückes, auf welches $\mathfrak{T}$ einmal durch u abgebildet wird, ist offenbar h-mal so gross als das Stück, auf welches T einmal (d. h. die in eine einfach zu-

* Daraus kann man leicht den bekannten Satz ableiten, wenn $p > 1$ ist. Abel'sche Functionen können nicht in andere derselben Classe (d. h. mit demselben p) transformirt werden, so dass die einen mehrdeutige Functionen der anderen sind, diese aber eindeutige Functionen der ersten, während dies für elliptische Functionen sehr wohl möglich ist.



sammenhängende zerschnittene Fläche) abgebildet wird, weil die Werthe von s in $\mathfrak{T}$ in h Gruppen unter einander gleicher zerfallen, oder weil jedes Theilsystem (T_1, $T_2 \ldots T_h$) auf ein gleichgrosses Stück durch u abgebildet wird.

Aus demselben Grunde folgt, dass die Periodicitätsmoduln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des Integrals erster Gattung in $\mathfrak{T}$ aus den Periodicitätsmoduln A und B desselben Integrals als Function in T in der Form

$$\mathfrak{A} = \alpha A + \beta B, \quad \mathfrak{B} = \gamma A + \delta B$$

enthalten sein müssen, worin α, β, γ, δ ganze Zahlen sind. Denn jedes Integral einer Function von s und z über eine geschlossene Curve in $\mathfrak{T}$ erstreckt, kann zerlegt werden in eine Summe von Integralen, welche über eine ganze Anzahl geschlossener Curven in T erstreckt werden, eben weil die Werthe s in $\mathfrak{T}$ in Gruppen unter einander gleicher zerfallen. Aber das Integral u, über eine beliebige geschlossene Curve in T erstreckt, ist in der Form $mA + nB$ enthalten, wenn m und n ganze Zahlen sind. Die Gleichheit der Flächenstücke, auf welche u T h-mal und $\mathfrak{T}$ einmal abbildet, liefert noch (vergl. Crelle's Journal, Bd. 75 S. 229) die Relation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = h.$$

Hieraus geht hervor, dass unser Abbildungsproblem mit dem der Transformation elliptischer Functionen vom h^{ten} Grade zusammenfällt.

Es sei nun T wie die durch die Gleichung

$$F(s,z) = (1 - z^2)s^2 - (1 - k^2 z^2) = 0$$

bestimmte Function s verzweigt. Die Fläche T ist dann überall zweifach über der z-Ebene ausgebreitet und hat ihre Verzweigungspunkte über den Stellen 1, -1, $1:k$, $-1:k$ der z-Ebene. Eine Fläche $\mathfrak{T}$, welche h-fach über T ausgebreitet ist, hat demnach $4h$ Verzweigungspunkte zwischen den Blättern der Theilsysteme T_1, $T_2 \ldots T_h$, die über denselben Punkten der z-Ebene liegen, und ausserdem 2ν willkürliche zwischen entsprechenden Blättern der Systeme T_1, $T_2 \ldots T_h$.

Nun müssen dem Vorhergehenden zufolge die 2ν willkürlichen Verzweigungspunkte in $\mathfrak{T}$ so vertheilt werden, dass sie alle auf die unbeweglichen (über ± 1, $\pm 1:k$ liegenden) fallen und sich mit diesen zusammen so verbinden, dass ihre Anzahl nicht vermehrt wird. Dann wird die Fläche $\mathfrak{T}$ so gestaltet sein, dass sie über ± 1, $\pm 1:k$ $4h$ Verzweigungspunkte besitzt, welche die Fläche $\mathfrak{T}$ zu einer wirklich zusammenhängenden machen. Man kann so zu jeder $2h$ blättrigen Fläche gelangen, die $4h$ Verzweigungspunkte hat, die sämmtlich einfach sind und nur über ± 1, $\pm 1:k$ liegen.

Umgekehrt ist s in jeder zusammenhängenden Fläche $\mathfrak{T}$ mit $2h$ Blättern und $4h$ Verzweigungspunkten, die so liegen, dass in jedem Blatte über den Stellen ± 1, $\pm 1:k$ ein einfacher Verzweigungspunkt liegt, eine einwerthige Function des Ortes, deren Werthe in h Gruppen unter einander gleicher zerfallen.



Unsere Aufgabe läuft nun darauf hinaus, eine Function $\mathfrak{z}$ zu construiren, welche wie eine eben beschriebene Fläche $\mathfrak{T}$ verzweigt ist und deren Werthe für dasselbe z nicht in Gruppen unter einander gleicher zerfallen. Da $\mathfrak{T}$ dreifach zusammenhängend ist, so kann man von der Function $\mathfrak{z}$ annehmen, dass sie in zwei willkürlich gewählten Punkten in $\mathfrak{T}$ unendlich werde. Wir wählen hierzu zwei Punkte, die über $1:k$ und $-1:k$ liegen, und erhalten daher für die Grösse a_0 in der Gleichung $\mathfrak{F}[\mathfrak{z}, (s, z)] = 0$ die Function s, welche für $z = \pm 1:k$ Null wird. Damit $\mathfrak{z}$ für z oder s gleich unendlich endlich bleibe, muss diese Gleichung die Gestalt haben

$$\mathfrak{F} = s\mathfrak{z}^h + (A_1 + sB_1)\mathfrak{z}^{h-1} + \ldots + (A_{h-1} + sB_{h-1})\mathfrak{z} + A_h + B_h s = 0.$$

Die Function a_0 besitzt in diesem Falle ausser den vorgegebenen Punkten $\pm 1:k$ keine Punkte weiter, für die sie noch verschwände, und die Coefficienten derselben besitzen daher keine Punkte, für die sie gemeinsam verschwinden. Die so definirte Function $\mathfrak{z}$ wird sich nun in $4h$ Verzweigungspunkten über ± 1, $\pm 1:k$ verzweigen und ausserdem noch in $4h - 4$ Punkten, die, weil $\mathfrak{z}$ nur eine Function von s (nicht explicite von z) ist, paarweise übereinander liegen, so dass man $2h - 2$ Paare hat. Um $\mathfrak{z}$ unserer Aufgabe gemäss zu bestimmen, muss man die $2h$ Constanten A_1, B_1, $A_2 \ldots A_h$, B_h so wählen, dass $\mathfrak{F}$ nicht in Factoren zerfällt und dass die $2h - 2$ Paare von Verzweigungspunkten, die von diesen Constanten abhängen, alle auch noch auf die Punkte ± 1, $\pm 1:k$ fallen, also so, dass die Discriminante der Gleichung $\mathfrak{F} = 0$ nur für $z = \pm 1$, $\pm 1:k$ verschwindet.

Die zwischen $\mathfrak{z}$ und z bestehende Gleichung erhalten wir dadurch, dass wir in dem Ausdrucke

$$z = \sqrt{\frac{1 - s^2}{s^2 - k^2}} = \frac{i}{k^2 - s^2}\sqrt{1 - s^2 \,.\, k^2 - s^2}$$

$$s = -\frac{A_h + B_{h-1}\mathfrak{z} + \ldots + A_1\mathfrak{z}^{h-1}}{B_h + B_{h-1}\mathfrak{z} + \ldots + B_1\mathfrak{z}^{h-1} + \mathfrak{z}^h} = \frac{U}{V}$$

substituiren. Bildet man durch die so erhaltene Gleichung die Fläche $\mathfrak{T}$ auf eine Fläche $\mathfrak{S}$ über der $\mathfrak{z}$-Ebene ab, so muss diese ebenfalls dreifach zusammenhängend sein, wenn es $\mathfrak{T}$ ist; sie darf also, weil sie zweiblätterig ist, nur vier Verzweigungspunkte besitzen und es müssen demnach, da

$$z = \frac{i}{(k^2 - s^2)V^2} \cdot \sqrt{(V^2 - U^2) \,.\, (V^2 k^2 - U^2)}$$

ist, von den $4h$ Wurzeln der Gleichung

$$V^2 - U^2 \,.\, V^2 k^2 - U^2 = 0$$

$2h - 2$ doppelte und nur 4 einfache sein. Man hat also genau dieselben Rechnungen anzustellen, die Jacobi im ersten, von der Transformation der elliptischen Function handelnden Theile der *Fundamenta nova* ausgeführt hat.

Halle a. d. S. J. THOMAE.



XIX. Ueber einige bestimmte Integrale.

I.

Ist $m \leqq n-1$, so giebt die Zerlegung in Partialbrüche:

$$2n\frac{x^{2m}}{x^{2n}-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\sum_{r=1}^{r=n-1}\left(\frac{e^{\frac{2mr\pi i}{n}}}{1-xe^{-\frac{r\pi i}{n}}}+\frac{e^{-\frac{2mr\pi i}{n}}}{1-xe^{\frac{r\pi i}{n}}}\right).$$

Setzt man $n-m$ statt m und berücksichtigt, dass

$$e^{\pm 2\frac{n-m}{n}r\pi i}=e^{\mp\frac{2mr\pi i}{n}},$$

so folgt

$$2n\frac{x^{2(n-m)}}{x^{2n}-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\sum_{r=1}^{r=n-1}\left(\frac{e^{-\frac{2mr\pi i}{n}}}{1-xe^{-\frac{r\pi i}{n}}}+\frac{e^{\frac{2mr\pi i}{n}}}{1-xe^{\frac{r\pi i}{n}}}\right).$$

Diese Gleichung zur vorhergehenden addirt, giebt

$$n\frac{x^{2m}+x^{2(n-m)}}{x^{2n}-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-2\Sigma\cos\frac{2rm\pi}{n}\cdot\frac{1-x\cos\frac{r\pi}{n}}{1-2x\cos\frac{r\pi}{n}+x^2}$$

oder, $x=e^v$ gesetzt:

$$\frac{1}{e^v-1}-n\frac{e^{2mv}+e^{2(n-m)v}}{e^{2nv}-1}=\frac{1}{1+e^v}+2\Sigma\cos\frac{2rm\pi}{n}\,\frac{1-e^v\cos\frac{r\pi}{n}}{1-2e^v\cos\frac{r\pi}{n}+e^{2v}}$$

$$=-\frac{\partial\log(1+e^{-v})}{\partial v}-\Sigma\cos\frac{2rm\pi}{n}\,\frac{\partial\log\left(1-2e^{-v}\cos\frac{r\pi}{n}+e^{-2v}\right)}{\partial v}.$$

Mittels dieser Gleichung erhält man unmittelbar

$$1)\qquad \int_0^\infty\left(\frac{1}{e^v-1}-n\frac{e^{2mv}+e^{2(n-m)v}}{e^{2nv}-1}\right)\partial v$$

$$=\log 2+\sum_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{2rm\pi}{n}\log 2\left(1-\cos\frac{r\pi}{n}\right)=S,$$

wo

$$2)\qquad S=\sum_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{2rm\pi}{n}\log\left(1-\cos\frac{r\pi}{n}\right).$$

Vertauscht man r mit $n-s$ und setzt nachher wieder r statt s, so ist auch

$$3)\qquad S=\sum_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{2rm\pi}{n}\log\left(1+\cos\frac{r\pi}{n}\right).$$

Addirt man diese Gleichung zur Gleichung 2), so folgt noch

$$4)\qquad S=\sum_{r=1}^{r=n-1}\cos\frac{2rm\pi}{n}\,.\,\log\sin\frac{r\pi}{n}.$$

Setzt man mit Gauss

$$5)\qquad \psi(z)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-u}}{u}-\frac{e^{-zu}}{e^u-1}\right)\partial u,$$

so ist

$$\tfrac{1}{2}\psi\left(-\frac{m}{n}\right)+\tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{m}{n}-1\right)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-u}}{u}-\tfrac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{m}{n}u}+e^{\frac{n-m}{n}u}}{e^u-1}\right)\partial u$$

oder, im Integrale rechts $u=2nv$ gesetzt:

$$\tfrac{1}{2}\psi\left(-\frac{m}{n}\right)+\tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{m}{n}-1\right)=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-2nv}}{v}-n\,\frac{e^{2mv}+e^{2(n-m)v}}{e^{2nv}-1}\right)\partial v.$$

Zieht man von der vorstehenden Gleichung die Gleichung 1) ab, so folgt

$$\tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{m}{n}-1\right)+\tfrac{1}{2}\psi\left(-\frac{m}{n}\right)-S=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-2nv}}{v}-\frac{1}{e^v-1}\right)\partial v.$$

Unter Zuziehung der Gleichung 5) für $z=0$ und $u=v$ findet man, dass das Integral auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung den Werth $\psi(0)-\log 2n$ hat. Es ist folglich

$$6)\qquad \tfrac{1}{2}\psi\left(-\frac{m}{n}\right)+\tfrac{1}{2}\psi\left(\frac{m}{n}-1\right)=S+\psi(0)-\log 2n.$$

Da nun

$$\psi\left(-\frac{m}{n}\right)-\psi\left(\frac{m}{n}-1\right)=\pi\,\mathrm{cotang}\,\frac{m}{n}\,\pi,$$

so erhält man in Verbindung mit der Gleichung 6)

$$7)\qquad \psi\left(-\frac{m}{n}\right)=\tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{cotang}\,\frac{m}{n}\,\pi+S+\psi(0)-\log 2n,$$

wo S durch eine der Gleichungen 2), 3) und 4) bestimmt ist.

In den „*Commentat. Gotting.*", *T. II p.* 39, hat Gauss die Gleichung 7) durch ziemlich verwickelte algebraische Betrachtungen abgeleitet. Er bemerkt dort über diese Gleichung und eine ähnliche:

„*Ceterum combinatis his aequationibus cum aequatione*

$$\psi(z+n)=\psi(z)+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}+\ldots+\frac{1}{z+n}$$

sponte patat, $\psi(z)$ *pro quovis valore rationali ipsius* z, *positivo seu negativo per* $\psi(0)$ *atque logarithmos determinari posse, quod theorema sane maxime est memorabile.*"

Bei dieser Gelegenheit möge eine eigenthümliche Entwickelung für $\psi(z)$ angemerkt werden. Setzt man

$$e^{-ux}=[1-(1-e^{-u})]^x=1-x(1-e^{-u})-\frac{x(1-x)}{1.2}(1-e^{-u})^2-\ldots,$$

so erhält man aus

$$\int_0^1 e^{-ux}\,\partial x=\frac{1-e^{-u}}{u}$$

die bekannte Gleichung

$$8)\qquad \frac{1}{u}=\frac{1}{1-e^{-u}}-\sum_{n=1}^{n=\infty}a_n(1-e^{-u})^{n-1},$$

wo

$$9)\qquad a_n=\int_0^1\frac{x(1-x)\ldots(n-1-x)}{1.2\ldots n}\,\partial x,\quad a_1=\int_0^1 x\,dx.$$

Die Gleichung 8) multiplicire man auf beiden Seiten mit $e^{-(z+1)u}$ und subtrahire auf beiden Seiten $\frac{e^{-u}}{u}$; dann ist

$$\frac{e^{-(z+1)u}-e^{-u}}{u}=\frac{e^{-zu}}{e^u-1}-\frac{e^{-u}}{u}-\sum_{n=1}^{n=\infty}a_n(1-e^{-u})^{n-1}e^{-(z+1)u}$$

oder

$$\frac{e^{-u}}{u}-\frac{e^{-zu}}{e^u-1}=\frac{e^{-u}-e^{-(z+1)u}}{u}-\Sigma a_n(1-e^{-u})^{n-1}.e^{-(z+1)u}.$$

Mittels dieser Gleichung geht die Gleichung 5) über in

$$\psi(z)=log(z+1)-\sum_{n=1}^{n=\infty}a_n.\frac{\Pi(z)\,\Pi(n-1)}{\Pi(z+n)}=log(1+z)$$

$$-\frac{a_1}{z+1}-\frac{a_2}{(z+1)(z+2)}-\frac{1.2a_3}{(z+1)(z+2)(z+3)}-\frac{1.2.3a_4}{(z+1)(z+2)(z+3)(z+4)}\ldots,$$

wo

$$\Pi(n)=\Gamma(n+1)=\int_0^\infty e^{-u}u^n\,du$$

gesetzt ist.

II.

Die bekannte Gleichung

$$\int_0^\infty\frac{u^{z-1}}{1+u}\,\partial u=\frac{\pi}{sin\,\pi z},$$

wo $0<z<1$, lässt sich auf folgende Weise auf den Fall ausdehnen, dass z eine complexe Grösse $z=x+yi$ ist, wo $i=\sqrt{-1}$.

Setzt man in den Gleichungen

$$\pi\frac{e^{a\pi w}+e^{-a\pi w}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\pi\frac{e^{a\pi(1+w)}+e^{a\pi(1-w)}}{e^{2a\pi}-1}=\frac{1}{a}+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{a\cos n\pi w}{a^2+n^2},$$

$$\pi\frac{e^{a\pi w}-e^{-a\pi w}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\pi\frac{e^{a\pi(1+w)}-e^{a\pi(1-w)}}{e^{2a\pi}-1}=\quad 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin n\pi w}{a^2+n^2}$$

$2a\pi=u$ und $w=1-2x$, so gehen dieselben über in

$$1)\qquad \frac{e^{(1-x)u}+e^{xu}}{e^u-1}=\frac{2}{u}+4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{u\cos 2n\pi x}{u^2+(2n\pi)^2},$$

$$2)\qquad \frac{e^{(1-x)u}-e^{xu}}{e^u-1}=\quad 4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{2n\pi\sin 2n\pi x}{u^2+(2n\pi)^2}.$$

In der Gleichung 1) ist $0<x<1$, in der Gleichung 2) ist $0<x<\frac{1}{2}$. Die Gleichungen 1) und 2) bleiben unverändert, wenn x mit $1-x$ vertauscht wird; dann gilt die Gleichung 2) noch, wenn $0<1-x<\frac{1}{2}$, d. i. $\frac{1}{2}<x<1$. Hieraus folgt, dass man in der Gleichung 2) $0<x<1$ voraussetzen darf, während in der Gleichung 1) $0\leqq x\leqq 1$ ist. Im Folgenden soll $0<x<1$ angenommen werden.

Setzt man in 1) $x=\frac{1}{2}$, dividirt auf beiden Seiten durch $2u$, so folgt

$$\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}u}-e^{-\frac{1}{2}u}}\right)\frac{1}{u}=2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{u^2+(2n\pi)^2}$$

und hieraus

$$3)\qquad \int_0^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}u}-e^{-\frac{1}{2}u}}\right)\frac{\partial u}{u}=\tfrac{1}{2}\log 2.$$

Die Gleichung

$$4)\qquad \log\Pi(z)=\log\Gamma(z+1)=\int_0^\infty\left(ze^{-u}-\frac{1-e^{-zu}}{e^u-1}\right)\frac{\partial u}{u}$$

gilt für ein beliebiges reelles oder complexes z. Nimmt man $z=-\frac{1}{2}$, so ist die linke Seite von 4) gleich $\frac{1}{2}\log\pi$, also

$$\tfrac{1}{2}\log\pi=\int_0^\infty\left(-\tfrac{1}{2}e^{-u}+\frac{e^{\frac{1}{2}u}-1}{e^u-1}\right)\frac{\partial u}{u}.$$

Diese Gleichung zu 3) addirt und die Summe mit 2 multiplicirt, giebt

$$5)\qquad \log 2\pi=2\int_0^\infty\left(-\tfrac{1}{2}e^{-u}-\frac{1}{e^u-1}+\frac{1}{u}\right)\frac{\partial u}{u}.$$

Setzt man in der Gleichung 4) $z=x-1+yi$ und $z=-x-yi$, und addirt die so erhaltenen Gleichungen, so folgt



$$\log \Pi(x-1+yi)\,\Pi(-x-yi)$$
$$=\int_0^\infty\left(-e^{-u}-\frac{2}{e^u-1}+\frac{e^{(1-x-yi)u}+e^{(x+yi)u}}{e^u-1}\right)\frac{\partial u}{u}.$$

Diese Gleichung von der Gleichung 5) subtrahirt, giebt

$$\log 2\pi-\log \Pi(x-1+yi)\,\Pi(-x-yi)$$
$$6)\qquad =\int_0^\infty\left(\frac{2}{u}-\frac{e^{(1-x-yi)u}+e^{(x+yi)u}}{e^u-1}\right)\frac{\partial u}{u}=P+Qi,$$

wo

$$7)\qquad \begin{cases} P=\displaystyle\int_0^\infty\left(\frac{2}{u}-\frac{e^{(1-x)u}+e^{xu}}{e^u-1}\cos yu\right)\frac{\partial u}{u}, \\ Q=\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{(1-x)u}-e^{xu}}{e^u-1}\,\frac{\sin yu}{u}\,\partial u. \end{cases}$$

Wegen der Gleichung 1) lässt sich das Integral P auf folgende Art darstellen:

$$P=2\int_0^\infty\frac{1-\cos yu}{u^2}\,\partial u-4\sum_{n=1}^{n=\infty}\cos 2n\pi x\int_0^\infty\frac{\cos yu}{u^2+(2n\pi)^2}\,\partial u,$$

d. i.

$$P=\pi y-\sum_1^\infty\frac{e^{-2n\pi y}}{n}\cos 2n\pi x=\pi y+\tfrac{1}{2}\log\left(1-2e^{-2\pi y}\cos 2\pi x+e^{-4\pi y}\right).$$

Setzt man rechts

$$\pi y=\tfrac{1}{2}\log e^{2\pi y},$$

so lässt sich P auch auf folgende Form bringen:

$$P=\tfrac{1}{2}\log\left(e^{2\pi y}+e^{-2\pi y}-2\cos 2\pi x\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\log 2\left(\cos 2\pi y-\cos 2\pi x\right)=\tfrac{1}{2}\log 4\sin\pi(x+yi)\sin\pi(x-yi)$$

oder

$$8)\qquad P=\log 2+\tfrac{1}{2}\log\sin\pi(x+yi)\sin\pi(x-yi).$$

Das Integral Q in 7) lässt sich mittels der Gleichung 2) auf folgende Form bringen:

$$Q=4\sum_{n=1}^{n=\infty}\sin 2n\pi x\int_0^\infty\frac{2n\pi}{u^2+(2n\pi)^2}\,\frac{\sin yu}{u}\,\partial u,$$

d. i.

$$Q=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1-e^{-2n\pi y}}{n}\sin 2n\pi x$$

oder

$$Q = arctang \frac{\sin 2\pi x}{1 - \cos 2\pi x} - arctang \frac{e^{-2\pi y} \sin 2\pi x}{1 - e^{-2\pi y} \cos 2\pi x}$$

$$= arctang \frac{1 - e^{-2\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}} \frac{\sin 2\pi x}{1 - \cos 2\pi x} = arctang \frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}} \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x}.$$

Diese Gleichung lässt sich kürzer schreiben:

$$-Q = arctang\, i \frac{\cos \pi x \sin \pi yi}{\sin \pi x \cos \pi yi}.$$

Da nun

$$arctang\, i w = \frac{i}{2} \log \frac{1+w}{1-w},$$

so ist

$$-\frac{Q}{i} = \tfrac{1}{2} \log \frac{\sin \pi x \cos \pi yi + \cos \pi x \sin \pi yi}{\sin \pi x \cos \pi yi - \cos \pi x \sin \pi yi},$$

d. h.

$$Qi = \tfrac{1}{2} \log \frac{\sin \pi (x+yi)}{\sin \pi (x-yi)}.$$

Diese Gleichung zur Gleichung 8) addirt, giebt

$$P + Qi = \log 2 + \log \sin \pi (x+yi).$$

Setzt man diesen Werth von $P+Qi$ in die Gleichung 6) und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so folgt

$$\Pi(x-1+yi)\, \Pi(-x-yi) = \int_0^\infty \frac{u^{x-1+yi}}{1+u} \partial u = \frac{\pi}{\sin \pi (x+yi)},$$

wo die reelle Grösse x der Beschränkung $0 < x < 1$ unterworfen ist.

Durch Trennung des reellen und imaginären Theiles lassen sich aus der Gleichung 9) zwei Integrale herleiten. Die Gleichung 9) lässt sich auch noch auf anderem Wege deduciren, wenn man das Integral auf die Grenzen 0 und 1 bringt und die folgenden, leicht zu beweisenden Gleichungen anwendet:

$$\int_0^1 u^m \cos (y \log u) \partial u = \frac{m+1}{(m+1)^2 + y^2},$$

$$\int_0^1 u^m \sin (y \log u) \partial u = \frac{-y}{(m+1)^2 + y^2},$$

wo $m+1 > 0$ vorausgesetzt ist.

III.

Aus

$$\frac{1}{n+z} = \int_0^\infty e^{-(n+z)v} \partial v$$

folgt, $1+v=u$ gesetzt:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{-(n+z)}}{n+z}=\Sigma\int_0^\infty e^{-(n+z)(v+1)}\,dv=\Sigma\int_1^\infty e^{-(n+z)u}\,\partial u=\int_1^\infty\frac{e^{-zu}}{e^u-1}\,\partial u.$$

Nimmt man zur Abkürzung

$$S=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{-(n+z)}}{n+z},$$

so ist

$$\int_1^\infty\frac{e^{-zu}}{u}\,\partial u-S=\int_1^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{e^u-1}\right)e^{-zu}\,\partial u.$$

Subtrahirt man auf beiden Seiten

$$\frac{e^{-z}}{2z}=\tfrac{1}{2}\int_1^\infty e^{-zu}\,\partial u,$$

so ist

$$1)\quad \int_1^\infty\frac{e^{-zu}}{u}\,\partial u-S-\frac{e^{-z}}{2z}=\int_1^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{e^u-1}-\tfrac{1}{2}\right)e^{-zu}\,\partial u$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{e^u-1}-\tfrac{1}{2}\right)e^{-zu}\,\partial u+M,$$

wo

$$2)\quad M=\int_0^1\left(\frac{1}{e^u-1}+\tfrac{1}{2}-\frac{1}{u}\right)e^{-zu}\,\partial u.$$

Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung 1) ist aber gleich

$$\frac{\partial\log\Gamma(1+z)}{\partial z}-\log z-\frac{1}{2z},$$

mit Rücksicht auf den Werth von S folgt also aus 1)

$$3)\quad \int_1^\infty\frac{e^{-zu}}{u}\,\partial u=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{-(n+z)}}{n+z}+\frac{e^{-z}}{2z}-\frac{1}{2z}-\log z+\frac{\partial\log\Gamma(1+z)}{\partial z}+M.$$

Setzt man in M

$$\tfrac{1}{2}\frac{e^u+1}{e^u-1}-\frac{1}{u}=\frac{B_1}{1.2}u-\frac{B_2}{1\ldots4}u^3\ldots,$$

wo B_1, $B_2\ldots$ die Bernoulli'schen Zahlen sind, so ist nach 2)

$$M=\int_1^\infty e^{-zu}\left(\frac{B_1}{1.2}u-\frac{B_2}{1\ldots4}u^3\ldots\right)\partial u$$

$$=-\frac{B_1}{1.2}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1-e^{-z}}{z}+\frac{B_3}{1\ldots4}\frac{\partial^3}{\partial z^3}\frac{1-e^{-z}}{z}\ldots.$$

Die Gleichung 3) giebt dann

$$\int_1^\infty\frac{e^{-zu}}{u}\partial u=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{e^{-(n+z)}}{n+z}-\frac{1-e^{-z}}{2z}$$

$$-\log z+\frac{\partial\log\Gamma(1+z)}{\partial z}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n Bn}{1.2\ldots(2n)}\frac{\partial^{2n-1}}{\partial z^{2n-1}}\frac{1-e^{-z}}{z}.$$

Diese Entwickelung der links stehenden Transcendenten, des sogenannten Integrallogarithmus, scheint bisher noch nicht bemerkt zu sein. Bei dieser Gelegenheit möge eine sehr einfache Reductionsmethode eines Integrals auf die obige Transcendente noch Erwähnung finden. Bildet man das Product der beiden Gleichungen

$$V=\int_0^\infty\frac{\sin zu}{1+u^2}\partial u,\quad \pi=2\int_0^\infty\frac{\sin uv}{v}\partial v,$$

so folgt

$$\pi V=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{\cos u(v-z)-\cos u(v+z)}{v(1+u^2)}\partial u\,\partial v.$$

Man integrire zuerst nach u und zerlege das Integral in Beziehung auf v in zwei Integrale mit den Grenzen z, ∞ und 0, z; dann ist

$$\pi V=\int_z^\infty\frac{\partial v}{v}\int_0^\infty\frac{\cos u(v-z)-\cos u(v+z)}{1+u^2}\partial u$$

$$+\int_0^z\frac{\partial v}{v}\int_0^\infty\frac{\cos u(z-v)-\cos u(v+z)}{1+u^2}\partial u.$$

Da nun in beiden Integralen in $\cos au$ immer a positiv ist, so giebt die Ausführung der Integration nach u

$$2V=(e^z-e^{-z})\int_z^\infty\frac{e^{-v}}{v}\partial v+e^{-z}\int_0^z\frac{e^v-e^{-v}}{v}\partial v.$$

Einen andern Werth von V erhält man, wenn man V auf folgende Weise schreibt:

$$V=\int_0^\infty \frac{\sin z u}{u}\,\frac{u\,\partial u}{1+u^2}$$

und unter dem Integralzeichen

$$\frac{u}{1+u^2}=\int_0^\infty e^{-v}\sin u v\,\partial v$$

setzt. Integrirt man dann im Doppelintegral zuerst nach v, so ergiebt sich für V eine Gleichung, welche in Verbindung mit der obigen eine bekannte Entwickelung des Integrallogarithmus liefert.

A. Enneper.

XX. Zur Geschichte der mechanischen Wärmelehre und der Theorie der Gase.

Unter Denjenigen, welche in der Geschichte der mechanischen Wärmetheorie neben Rumford und Humphrey Davy genannt werden, wird auch S. Carnot wegen seiner Schrift: „*Reflexions sur la puissance motrice du feu*", welche 1824 in Paris bei Bachelier erschien, aufgeführt. Sadi Carnot war der Sohn des berühmten Lazarus Carnot, Mitgliedes des Convents und Wohlfahrtsausschusses, *Organisateur de la victoire* von 1793, später napoleonischer Graf und Vertheidiger von Antwerpen, dann unter der Restauration als *régicide* aus Frankreich verbannt und 1825 in Magdeburg verstorben. Die erwähnte kleine Schrift ist nicht mehr im Buchhandel zu haben und da unsere Bibliothek mit Mühe endlich ein Exemplar erlangte, lag die Versuchung nahe, dasselbe in Betreff seiner Ansprüche auf die mechanische Wärmetheorie näher anzusehen.

Carnot legt den Schwerpunkt seiner Ansichten auf den Umstand, dass in allen Fällen, wo mechanische Bewegung durch Wärme erzeugt wird, Wärme aus einem Körper in einen andern übergehen müsse, dass also eine Wiederherstellung des Gleichgewichts der Wärme (*retablissement d'équilibre dans le calorique*), eine Ausgleichung des gestörten Gleichgewichts stattfindet. Das ist eine Beobachtung, aber keine Erklärung. Er entwickelt nun diese Beobachtung an der Dampfmaschine; „denn", sagt er, „von der einen Seite entweicht die Brennluft, nachdem sie den Kessel umspült, aus dem Kamin mit einer niedrigeren Temperatur, als sie durch die Verbrennung erhalten hatte, und von der andern Seite entweicht das Wasser des Condensators, nachdem er den Dampf verdichtet, mit einer höheren Temperatur, als es mitgebracht hatte". Nun folgt die schlagende Stelle: „*La production de la puissance motrice est donc due dans les machines à vapeur, non à une consommation réelle du calorique, mais à son transport d'un corps chaud à un corps froid, c'est à dire à son rétablissement d'équilibre, équilibre supposé*



rompu pas quelque cause que ce soit, par une action chimique, telle que la combustion, ou par toute autre."

Dieses eine Wort „*non*" vernichtet alle Ansprüche Carnot's auf eine Stellung in der Geschichte der mechanischen Wärmelehre, denn er behauptet gerade das Gegentheil von dem, was diese Lehre aufstellt. Carnot ist der Ansicht, dass die Feuerluft und der entweichende Dampf (oder das Condensationswasser) genau soviel Wärme enthielten, als auf dem Herde durch die Verbrennung erzeugt worden war. Er hat also die bewegende Kraft ganz umsonst, und es ist auffallend, dass Carnot nicht bemerkte, dass er das *Perpetuum mobile* in der Hand habe, während jeder Physiker kopfscheu wird, wenn ihm ein solches Verhältniss bei seinen Arbeiten aufstösst. Der Grund liegt darin, dass die wirklich consumirte und in Massenbewegung umgesetzte Wärme bei der Dampfmaschine nur einige Procente von der ganzen Wärmemenge beträgt, also wegen ihrer Kleinheit unmittelbar nicht beobachtet werden kann, dass keine Versuche darüber vorlagen und dass das Princip von der Unzerstörbarkeit der Bewegung noch nicht aufgefunden und ausgesprochen war. In jedem Falle hätte Carnot ein gewisses Befremden ausdrücken müssen, als er auf einen Satz kam, der einen logischen Widerspruch einschloss, dass nämlich eine Bewegung aus Nichts entstehen könne. Davor hielt ihn aber sein *apperçu* von der Ausgleichung des gestörten Gleichgewichts ab, welches sich in allen Fällen bewährte.

Jede Erzeugung der Massenbewegung durch Wärme beruht auf einer Volumveränderung eines Körpers. Eine solche kann aber nur eintreten, wenn einem Körper Wärme zugeführt wird; dies kann aber wieder nur von einem Körper geschehen, der wärmer ist, als derjenige, in welchen die Wärme übertreten soll. Die eigentliche Ursache der Bewegung ist also die Ausdehnung, und der Uebergang der Wärme von einem Körper auf den andern die Bedingung, dass Ausdehnung eintreten könne. Es ist also in der Carnot'schen Erklärung die Bedingung mit der Ursache verwechselt. Den ganz ähnlichen Fehler macht auch die galvanische Contacttheorie, indem sie die Berührung zweier sich zu dem Sauerstoff des Wassers ungleich verhaltenden Metalle als die Ursache der Elektricitätsentwickelung ansprach, während es nur die Bedingung war. Berühren sich zwei Metalle dieser Art in einer Flüssigkeit oder auch ausserhalb derselben, wenn sie in derselben Flüssigkeit standen, so wird an demjenigen Metall, welches den meisten Sauerstoff zu einer feuerbeständigen Verbindung aufnimmt, die ganze Summe von Bewegung frei, welche der Sauerstoff beispielsweise im Zinkoxyd weniger enthält, als im Wasser, und diese Bewegung pflanzt sich als ein Stoss wellenförmig aus diesem Metall auf das andere fort, welches indolenter gegen den Sauerstoff war. Dies war der galvanische Strom, der im folgenden Augenblick wieder in Wärme überging und nur so lange existirte, als immer neuer Sauerstoff aus dem Wasser an das Zink trat.



Trennte man die beiden Metalle, so konnte der Stoss nicht mehr auf das zweite Metall übergehen, es kam also der Strom gar nicht zu Stande und die Auflösung des Zinkes geschah einfach unter Wärmeentwickelung, ohne dass vorher ein Strom existirte. Die Berührung der Metalle war also eine Bedingung, und die Ursache lag in der grösseren Affinität des einen Metalls zum Sauerstoff.

Im Verlaufe seiner Untersuchung kommt Carnot auch auf Dasjenige, was er an die Spitze hätte stellen sollen. S. 14 sagt er: „Die Wärme kann offenbar nur durch Volumveränderungen Bewegung erzeugen; diese Veränderungen verdankt man aber nicht einer gleichbleibenden Temperatur, sondern nur einem Wechsel von Wärme und Kälte; um einen Körper zu erwärmen, muss man einen wärmeren Körper haben, um ihn zu erkalten, einen kälteren."

Von dieser klaren Ansicht kommt er jedoch bald wieder zurück auf seine Ansicht von der Ausgleichung des gestörten Gleichgewichts. Auf S. 28 vergleicht er die Wirkung der Wärme zur Hervorbringung von Bewegung mit einem Wasserfall (*chute d'eau*), wobei die Höhe des Wasserfalles mit dem Unterschiede der Temperatur, die Wassermenge mit der Wärmemenge verglichen wird. Dieser Vergleich ist aber nicht glücklich gewählt, weil der Wärme die Materialität des Wassers fehlt. Der Fallraum, welcher neben der Menge des Wassers die Grösse der Bewegung bedingt, hat in der Wärme kein Analogon.

Auf S. 117 findet Carnot aus der Berechnung der Cornwalliser Wasserhebungsmaschinen, dass nur etwa $\frac{1}{20}$ von der bewegenden Kraft des Brennmaterials utilisirt wird. Wenn man dies Wort als gleichbedeutend mit Verwendung, Verbrauch nimmt, so stimmt dieser Satz nicht mit der ersten Behauptung, dass die Bewegung „*non à une consommation réelle du calorique*" verdankt werde. Diese Unsicherheit des Begriffes muss offenbar dem Mangel des Gesetzes von der Erhaltung der Kraft zugeschrieben werden und kann Carnot nachgesehen werden, wenn man annimmt, dass er keinen Antheil an der Entdeckung dieses Gesetzes habe.

Clausius bespricht schon 1850* die Ansicht von Carnot, dass bei der Erzeugung von bewegender Kraft Wärme nicht verbraucht werde, in demselben Sinne, wie oben geschehen, und sagt bestimmt aus, „dass zur Erzeugung von Arbeit nicht blos eine Aenderung der Vertheilung der Wärme, sondern auch ein wirklicher Verbrauch von Wärme nöthig sei, und dass umgekehrt durch Verbrauch von Arbeit wiederum Wärme erzeugt werden könne". Das Wort „Arbeit" ist hier im Sinne von „Massenbewegung" gebraucht. Wir nehmen jetzt den Begriff allgemeiner und nennen Arbeit die Leistung einer jeden Kraft, wobei diese Kraft ihre Natur ver-

* Abhandlungen etc., 1, S. 17 und 18.



ändert, wo also Wärme in Massenbewegung, galvanischer Strom in Wärme, chemische Bewegung in Wärme u. s. w. und umgekehrt umgesetzt wird.

In ähnlichem Sinne bespricht Helmholtz* die Ansicht von Carnot. Er sagt darin, dass Carnot die mechanische Arbeit, welche die Wärme verrichtet, daraus herzuleiten gesucht habe, „dass sich der hypothetische Wärmestoff zu expandiren strebe, gleichsam einem Gase ähnlich, und habe aus dieser Vorstellung ein merkwürdiges Gesetz (? Beobachtung) über die Arbeitsfähigkeit der Wärme abgeleitet, welches noch heute, freilich mit einer durch Clausius vorgenommenen wesentlichen Aenderung, in die Grundlagen der neueren sogenannten mechanischen Wärmetheorie eingeht".

Es bezieht sich dieser letzte Ausspruch auf die oben citirte Stelle aus Clausius' Abhandlungen. Da aber die experimentalen Untersuchungen von Joule schon weit früher stattgefunden haben, so war dieser Satz vom Verbrauch der Wärme bereits bewiesen und aus der Reihe der Hypothesen und Ansichten ausgeschieden.

Die Theorie der Gase wird gewöhnlich auf die Ansichten von Krönig und Clausius bezogen. Ueber dieselbe spricht sich N. Dellinghausen in seinem sehr bedeutsamen Werke „Grundzüge der Vibrationstheorie der Natur", Reval 1872, folgendermassen aus: „Die Vorstellung, welche sich Krönig und Clausius über die innere Constitution der Gase gebildet haben, befriedigt uns nicht. Vor Allem vermissen wir in ihr eine genügende Grundlage, um darauf eine allgemeine Naturtheorie aufbauen zu können. Man kann sich keine Rechenschaft über die Ursache geben, welche die Moleküle zu einer Bewegung veranlasst. Der Vergleich, welchen Krönig zwischen den Gasen und vollkommen elastischen Kugeln, welche in einem ebenfalls elastischen Kasten geschüttelt werden, lässt die innere Bewegung der Gase als ein wirres, ungeordnetes Durcheinandertreiben der Atome erscheinen, welches der sonst so strengen Gesetzmässigkeit der Natur widerspricht. Die von Clausius hinzugefügten drehenden und vibrirenden Bewegungen tragen nicht dazu bei, den inneren Zustand der Körper zu ordnen oder aufzuklären. Die Art der Vibrationen ist nicht hinreichend präcisirt; es ist keine Rücksicht auf die verschiedene Dauer der Schwingungen genommen; die Annahme eines imponderabeln Weltäthers ist noch als zulässig erachtet; mit einem Worte, man sieht, dass in dieser Hinsicht die mechanische Wärmetheorie noch mit allen Vorurtheilen der atomistischen Theorie zu kämpfen hat." Es ist übrigens ganz mit Unrecht, dass man Krönig die Priorität der Gastheorie zuschreibt; denn schon 1812 hat Humphrey Davy in seinen „*Elements of chemical philosophy*" (S. 95) die Gastheorie ebenso bündig und klar, wie Krönig 1856 (Pogg. 99, 315) ausgesprochen. Es heisst dort: „Es scheint möglich, alle

* Populäre wissenschaftliche Vorträge, 2, 163.



Phänomene der Wärme zu erklären, wenn man annimmt, dass bei festen Körpern die Theilchen sich in einem beständigen Zustande der Vibration befinden, dass die Theilchen der heissesten Körper sich mit der grössten Geschwindigkeit und durch die grössten Räume bewegen; dass bei Flüssigkeiten und Gasen neben der vibratorischen Bewegung, welche bei den Gasen als am grössten angenommen werden muss, die Theilchen auch eine Bewegung um ihre Axe (*have a motion round their own axes*) haben, welche bei den Gasen ebenfalls als am grössten angenommen werden muss, und dass bei ätherischen Stoffen (*etherial substances* = elastisch-flüssigen) die Theilchen sich rund um ihre Axen und getrennt von einander bewegen, und dass sie den Raum in geraden Linien durchdringen" („*and that in etherial substances the particles move round their own axes and separate from each other, penetrating in right lines thorough space*").

Wie man leicht ersieht, ist in dieser Darstellung die geradlinige Bewegung der Theilchen von Krönig und die rotatorische von Clausius bereits 1812 ausgesprochen. Es soll damit nicht gesagt sein, dass beide Forscher diese Ideen nicht selbstständig gehabt hätten; allein die Wahrheit erfordert auch, dass auch die früheren Ansprüche nicht unbeachtet bleiben. Auch ich hatte im Jahre 1837 die Theorie der Gase auf eine Vibration der Atome zurückgeführt; da ich aber jetzt finde, dass Davy dies schon 1812 gethan habe, so verzichte ich darauf, meine Priorität gegen Krönig und Clausius durchzuführen.

Davy erklärt ferner die Temperatur durch die Anzahl der Vibrationen und die Wärmecapacität durch grössere Amplitude der Vibrationen, eine Ansicht, die ich ebenfalls 1837, ohne die Davy'sche Aeusserung zu kennen, ausgesprochen habe.

Einen wesentlichen Fortschritt in der Erklärung der inneren Vibrationsbewegung der Körper hat Dellingshausen durch Anwendung der feststehenden Grundsätze der Wellentheorie gemacht.

Durch das Zusammentreffen in entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzender Schallwellen können unter gewissen Umständen, wie bei den Wellen an einem Seile oder bei den Wasserwellen, stehende Wellen entstehen. Tritt nämlich die Verdichtung einer Schallwelle in eine an einem Ende geschlossene Röhre, so wird sie am Ende derselben reflectirt und muss in umgekehrter Richtung wieder zurückgehen. Trifft nun eine solche reflectirte Verdichtung, nachdem sie momentan mit der ihr folgenden Verdünnung zusammengefallen ist, in der Entfernung einer halben Welle vom Boden der Röhre auf eine zweite in die Röhre eintretende Verdichtung, so wird die zwischen beiden im Moment des Zusammentreffens befindliche Luftschicht unbeweglich, da sie von den beiden Verdichtungen in der Richtung ihrer Fortpflanzung, also nach entgegengesetzten Richtungen getrieben wird. Die Luftschicht bildet sich zu einem festen Schwingungsknoten aus, von dem die Verdichtungen auf ebendieselbe Weise zurückgeworfen werden,

wie von dem Ende der geschlossenen Röhre. Nachdem die zweite Verdichtung von dem entstehenden Schwingungsknoten reflectirt worden ist, trifft sie in der Entfernung riner weiteren halben Wellenlänge auf eine dritte in die Röhre eintretende Verdichtung u. s. w. Derselbe Vorgang wiederholt sich so lange, bis die Luft auf der ganzen Länge der Röhre in eine stehende Schwingung versetzt worden ist. Damit die Unbeweglichkeit der Schwingungsknoten aufrecht erhalten werde, müssen die benachbarten stehenden Luftwellen stets in dem entgegengesetzten Schwingungszustande sein. In der anstossenden Welle findet deshalb an der sie trennenden Knotenfläche immer gleichzeitig entweder eine Verdichtung oder Verdünnung statt. Hat am Ende einer stehenden Welle die Verdichtung ihr Maximum erreicht, so hat sich gleichzeitig am andern Ende eine Verdünnung ausgebildet, indem beide von den unbeweglichen Schwingungsknoten zurückgeworfen werden und dadurch sich in entgegengesetzter Richtung bewegen, fallen sie zusammen, wodurch die Luft momentan ihren gewöhnlichen Dichtigkeitszustand annimmt. Während sich an den Schwingungsknoten abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen bilden, oscilliren die zwischen den Knotenflächen liegenden Luftschichten hin und her. Die Amplitude der Luftschichten ist durch den Einfluss der unbeweglichen Schwingungsknoten in der Nähe derselben nur gering; sie bewegen sich nur etwas nach links und nach rechts. Die Grösse der Excursion wächst aber mit der Entfernung von den Schwingungsknoten und erreicht folglich ihr Maximum in der Mitte der stehenden Wellen.

Man kann die stehenden Wellen in einer Wellenrinne durch regelmässiges Eintauchen und Herausziehen eines Körpers leicht hervorbringen; ja sogar in einer Badewanne mit geraden Wänden kann man durch Heben und Senken der flachen Hand auf der Oberfläche des Wassers stehende Wellen erregen, wenn man den Rhythmus einmal getroffen hat. Ich habe mir oft die lange Weile im Bade zu Wiesbaden durch Erregung und Beobachtung stehender Wellen verkürzt. Es schwingt dann die ganze Oberfläche des Wassers aufwärts und abwärts, aber keine Welle läuft horizontal weiter. Was in der Schallwelle rechts und links ist, bedeutet in der Wasserwelle nach oben und unten. Verdichtung der Luft entspricht Erhebung der Welle, Verdünnung der Luft einer Senkung. Atmosphärische Dichtigkeit bedeutet das natürliche Niveau des Wassers.

Die Länge der stehenden Wellen, d. h. die Entfernung von einem Knotenpunkte zum andern, ist immer nur halb so gross, als die Länge der fortschreitenden Wellen, aus deren Zusammenwirken sie entstanden sind. Bei den transversalen Wellen bildet sich ein Schwingungsknoten zwischen jedem Wellenberge und jedem Wellenthale; bei den longitudinalen Wellen entstehen die Schwingungsknoten dort, wo die Verdichtungen zusammentreffen. Ist an dem einen Schwingungsknoten die Hälfte der Verdichtung zurückgeworfen, so ist an dem andern Ende der stehenden Welle die Hälfte der Verdünnung reflectirt, so dass auch bei den longitudinalen Wellen die



Länge der stehenden Wellen nur die Hälfte der fortschreitenden Wellen beträgt. Auf der Bildung solcher stehenden Luftwellen beruht das Tönen der Orgelpfeifen, der Flöte, was so lange fortdauert, als die Unbeweglichkeit der äussersten Knotenflächen in der Röhre durch das Einblasen des Windes aufrecht erhalten wird.

Aus der gegebenen Darstellung geht das Gesetz hervor, dass fortschreitende Wellen mit Vibrationen von gleicher Dauer und Intensität sich in stehende Wellen verwandeln, wenn sie in entgegengesetzter Richtung sich fortpflanzend aufeinandertreffen. Wenn wir dies Gesetz auf die Wärmewellen anwenden, so gelangen wir zu dem Resultate, dass sich die Wärmewellen innerhalb eines homogenen Körpers, in dem wir die Wärmevibrationen bei gleichmässiger Temperatur von gleicher Dauer und Intensität voraussetzen können, bei ihrem Zusammentreffen in entgegengesetzter Richtung in stehende Wärmewellen verwandeln. Da aber innerhalb eines Körpers die Wärmewellen sich nicht allein nach allen Richtungen fortpflanzen, sondern auch in jeder Richtung auf andere ihnen entgegenkommende Wärmewellen treffen, so bilden sich auch nach allen Seiten zwischen den stehenden Wärmewellen feste Schwingungsknoten, welche, sich aneinanderschliessend, sich zu einer zusammenhängenden Knotenfläche vereinigen und somit auch die stehenden Wärmewellen von allen Seiten vollkommen umhüllen. Diese Ansicht hat schon Vieles voraus vor dem geschüttelten Kasten Krönig's. Sie bedarf kaum eines Beweises, wenn die Wellentheorie mathematische Begründung geniesst.

Wir müssen uns also den inneren Zustand der Körper auf die Weise vorstellen, als ob sie, wie die organischen Körper, aus Zellen gebildet wären, mit dem Unterschiede jedoch, dass die Zellenwände nicht aus einer feinen Membran, wie bei den Pflanzen, auch nicht aus Wachs, wie bei den Honigscheiben bestehen, sondern aus den die einzelnen stehenden Wärmewellen von einander trennenden unbeweglichen und vollkommen geschlossenen Knotenflächen gebildet wären. Diese Zellen nennt Dellingshausen Vibrationsatome. Dieselben sind also stehende Wärmewellen, welche nach allen Seiten hin durch unbewegliche Knotenflächen von den anderen stehenden Wärmewellen des Körpers abgegrenzt werden. Innerhalb dieser festen Knotenflächen gehen die Wärmevibrationen vor sich. Da aber die stehenden Wellen aus dem Zusammenwirken fortschreitender Wellen hervorgehen, so folgt daraus, dass, obgleich bei der Bildung der stehenden Wärmewellen scheinbar jede Fortpflanzung fortschreitender Wärmewellen aufgehört hat, dennoch die inneren Bewegungen der Vibrationsatome von den Bewegungen der anderen Vibrationsatome des Körpers abhängig sind, und dass somit nach wie vor ein beständiges Strahlen der Wärme zwischen den verschiedenen Theilen eines Körpers angenommen werden kann.

Die Bewegung jedes einzelnen Punktes innerhalb eines Vibrationsatomes ist, wie bei allen zusammengesetzten Bewegungen, die Resultirende aller mitgetheilten Bewegungen. An den Knotenflächen ist sie gleich Null, da hier die fortschreitenden Wärmewellen sich in ihren bewegenden Wirkungen gegenseitig aufheben. Die Amplitude der stehenden Wärmevibrationen nimmt aber, wie bei den stehenden Wellen überhaupt, mit den Entfernungen von den Knotenflächen zu und erreicht folglich ihr Maximum in der Mitte der Vibrationsatome. Wie bei der Interferenz der senkrecht zu einander polarisirten Lichtstrahlen die resultirenden Schwingungen entweder linear oder circular oder elliptisch polarisirte Vibrationen sind, so kann auch die Bahn, welche jeder Punkt innerhalb eines Vibrationsatomes durch seine Wärmevibrationen beschreibt, von der geraden Linie an sehr verschiedene Formen annehmen; im Allgemeinen wird sie aber aller Wahrscheinlichkeit nach eine doppelt gekrümmte Curve sein, um den aus allen Richtungen mitgetheilten Bewegungen Genüge leisten zu können.

Vor Allem drängt sich hier die Frage auf, wohin man die äussersten Knotenflächen der stehenden Wärmewellen verlegen soll, ob an die Oberfläche der Körper oder tiefer in sie hinein. Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns nochmals zu den uns bekannten Vibrationserscheinungen wenden. Wenn man einen flachen elastischen Stab vollkommen horizontal in einen grossen schweren Schraubstock an einem Ende einspannt, ihn mit leichtem trockenem Sande dünn bestreut und ihn dann durch den Strich eines Violinbogens in eine stehende Transversalschwingung versetzt, so sammelt sich der Sand auf den Schwingungsknoten an und bezeichnet dadurch auf das Genaueste ihre Lage. Es findet sich, dass der am freien Ende durch den letzten Schwingungsknoten abgeschnittene Theil nur halb so gross ist, als die übrigen durch Schwingungsknoten markirten Theile des Stabes. Die äussersten Knotenlinien sind also bei Stäben und Platten um die halbe Länge einer stehenden Welle von ihrem freien Ende entfernt. Es ist dies die Mitte eines Vibrationsatomes, wo bekanntlich die Entfernung aus der Gleichgewichtslage eine grössere ist. Darauf beruht auch die Fortpflanzung der Wärme in berührende Körper durch den Anstoss der bewegten Moleküle. Läge die Knotenfläche am äussersten Rande des Körpers, so wäre nicht zu begreifen, wie die Wärme durch Leitung in einen andern Körper überginge, da in der Knotenfläche selbst keine Bewegung stattfindet.

Um die Luft in einer an einem Ende geschlossenen Röhre in eine stehende Schwingung zu versetzen, braucht man nur vor das offene Ende der Röhre einen oscillirenden Körper zu bringen, von dem solche Schallwellen ausgehen, dass die Länge der Röhre $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$ u. s. w. von der Länge dieser Wellen beträgt. Wird nun in einer solchen Röhre, in welcher man die Luft in stehende Schwingungen versetzt hat, an der Stelle eines Schwingungsknotens ein Loch gemacht, so wird dadurch die Bildung der

stehenden Wellen gestört, wenn nicht ganz verhindert, weil im Moment der Verdichtung die Luft entweichen, im Moment der Verdünnung einströmen kann. Der störende Einfluss einer solchen Oeffnung ist geringer, wenn sie von dem Schwingungsknoten entfernter gemacht wird, und verschwindet endlich ganz, wenn sie in der Mitte einer stehenden Welle angebracht wird, weil hier weder eine Verdünnung, noch Verdichtung stattfindet. Die Bildung der stehenden Wellen in einer Röhre ist also an bestimmte Verhältnisse zwischen der Länge der Röhre und der Länge der eintretenden Schallwellen gebunden.

Es kann somit als ein für alle Körper, sowohl für die festen, als auch für die flüssigen und gasförmigen giltiges Gesetz aufgestellt werden, dass, wenn sie in eine stehende Schwingung versetzt werden, sich an ihren freien Enden oder Rändern immer nur halbe stehende Wellen bilden. Da die Wärme ebenfalls nur eine stehende Schwingung der Körper ist, so folgt aus obigem Gesetze, dass bei den stehenden Wärmewellen die äussersten Knotenflächen um eine halbe Länge einer stehenden Wärmewelle von der Oberfläche der Körper entfernt sind, dass also an dieser immer nur halbe stehende Wärmewellen oder Vibrationsatome vorkommen oder, was dasselbe bedeutet, dass die Berührungsfläche zweier Körper stets durch die Mitte ihrer beiderseitigen Vibrationsatome hindurchgeht. Wie wir aber ferner wissen, finden in der Mitte der stehenden Wellen, wie an dem offenen Ende einer tönenden Röhre, die geringsten Veränderungen in der Dichtigkeit des schwingenden Mittels statt; dagegen erreichen hier die Vibrationen das Maximum ihrer Intensität. Die sich berührenden Körper führen also mit der vollen Intensität ihrer Wärmevibrationen beständige Stösse gegen einander aus, worauf die Leitung der Wärme beruht.

Bonn. Dr. Mohr.

XXI. Ueber die von einer Geraden erzeugte Minimalfläche.

Im „*Journal de Mathématiques*“ *de Liouville*, *Tome VII S.* 203, hat Catalan durch geometrische Betrachtungen die windschiefe Fläche, deren Hauptkrümmungshalbmesser in jedem Punkte gleich, aber von entgegengesetzter Richtung sind, bestimmt und gefunden, dass die schiefe Schraubenfläche (*l'héliçoïde gauche à plan directeur*) die einzige von einer Geraden erzeugte Fläche sei, der die soeben erwähnte Eigenschaft zukommt.

Zu demselben Resultate gelangt man viel leichter auf analytischem Wege.

Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche die Eigenschaft ausdrückt, dass der Inhalt der in einem beliebigen gegebenen Umrisse enthaltenen Fläche ein Minimum sein soll, ist bekanntlich

$$1) \qquad (1+q^2)\,r - 2pqs + (1+p^2)\,t = 0.$$

Soll die Fläche ausserdem eine von einer Geraden erzeugte sein, muss ihre Gleichung der partiellen Differentialgleichung

2) $$a^2 r + 2abs + b^2 t = 0,$$

worin a, b im Allgemeinen Functionen von x, y, z, p, q sind, Genüge leisten. Die Gleichung der gesuchten Fläche muss also zwei partiellen Differentialgleichungen gleichzeitig genügen. Es ist aber aus der Vergleichung der Coefficienten in diesen Gleichungen leicht einzusehen, dass diese dieselbe Fläche nicht darstellen können, wofern nicht entweder

$$r = 0, \quad t = 0 \text{ oder } s = 0 \text{ ist.}$$

Wir werden nun die Flächen bestimmen, welche diesen Bedingungen entsprechen.

Ist $r = \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$, so hat man $\frac{dz}{dx} = p = \varphi(y)$, weil bei der Integration y als constant betrachtet werden muss. Eine nochmalige Integration giebt

3) $$z = x\,\varphi(y).$$

Die Form der Function φ ist nun so zu bestimmen, dass die Gleichung 3) der Gleichung 1) Genüge leistet. Wir differentiiren deshalb die Gleichung 3), wodurch kommt

$$p = \varphi, \quad r = 0, \quad q = x\varphi', \quad t = x\varphi'', \quad s = \varphi',$$

und erhalten durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung 1)

$$(1 + \varphi^2)\,\varphi'' - 2\varphi\,\varphi'^2 = 0$$

oder

$$(1 + \varphi^2)\frac{d^2\varphi}{dy^2} - 2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = 0.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung hat zum Integral

$$\varphi = \tan(cy + c').$$

Die Gleichung 3) wird dann

$$z = x \tan(cy + c')$$

oder, einfacher geschrieben:

4) $$z = x \tan cy,$$

weil die willkürliche Constante c' durch die Substitution $y = y' - \frac{c'}{c}$ weggeschafft werden kann.

Die partielle Differentialgleichung

$$t = 0$$

giebt, in gleicher Weise behandelt:

5) $$z = y \tan cx.$$

Die noch übrig gebliebene Annahme

$$s = 0$$

giebt zuletzt

6) $$z = ax + by + c$$

oder die Gleichung für die Ebene

Die Gleichungen 4) und 5) stellen nun bekanntlich dieselbe Schraubenfläche dar, mit dem Unterschiede nur, das die Fläche 4) die Axe der y, und 5) die der x zur Axe hat.

Hierdurch ist also dargethan, dass, mit Ausnahme der Ebene, die gewöhnliche Schraubenfläche die einzige von einer Geraden erzeugte Fläche ist, welche die Bedingung einer durch einen beliebigen gegebenen Umriss gehenden Minimalfläche erfüllt.

Helsingfors. S. Lewänen.

XXII. Ueber die gleichzeitige Convergenz oder Divergenz zweier Reihen.

In Cauchy's *Cours d'analyse algébrique* findet sich zuerst der hübsche Satz, dass die unendlichen Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \ldots,$$
$$2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + 16u_{16} + \ldots$$

gleichzeitig convergiren oder divergiren, wenn $u_1, u_2, u_3 \ldots$ positive Grössen bedeuten, von denen jede grösser als die folgende, und für welche bei unendlich wachsenden n die Bedingung $Lim\, u_n = 0$ erfüllt ist. Ein Seitenstück zu diesem Satze erhält man auf folgende Weise.

Unter den obigen Voraussetzungen ist

$$u_1 = u_1,$$
$$u_2 + u_3 + u_4 > 3u_4,$$
$$u_5 + u_6 + \ldots + u_9 > 5u_9,$$
$$u_{10} + u_{11} + \ldots + u_{16} > 7u_{16}$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

mithin durch Addition

$$\Sigma u_n > \Sigma (2n-1)\, u_{nn}, \quad (n = 1, 2, 3 \ldots \infty)$$

und umgekehrt

$$\Sigma n u_{nn} < \tfrac{1}{2} (\Sigma u_n + \Sigma u_{nn}).$$

Wenn nun Σu_n einen endlichen Werth besitzt, so hat auch Σu_{nn} einen solchen, mithin ist $\Sigma n u_{nn}$ gleichfalls von endlicher Grösse, d. h. aus der Convergenz von Σu_n folgt die Convergenz von $\Sigma n u_{nn}$.

Zweitens gelten die Ungleichungen

$$u_1 + u_2 + u_3 < 3u_1,$$
$$u_4 + u_5 + \ldots + u_8 < 5u_4,$$
$$u_9 + u_{10} + \ldots + u_{15} < 7u_9$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

d. i. zusammen

$$\Sigma u_n < \Sigma (2n+1)\, u_{nn}$$

oder

$$\Sigma u_n < 2\Sigma n u_{nn} + \Sigma u_{nn}.$$

Ist nun $\Sigma n u_{nn}$ endlich, so ist es auch Σu_{nn} und ebenso Σu_n, d. h. aus der Convergenz von $\Sigma n u_{nn}$ folgt die Convergenz von Σu_n. Mit dem Vori-

gen zusammen ergiebt sich jetzt, dass die Reihen Σu_n und $\Sigma n u_{nn}$ immer gleichzeitig convergiren. Die gleichzeitige Divergenz beider Reihen schliesst man hieraus sehr leicht apagogisch; die Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + \dots$$

und

$$1 u_1 + 2 u_4 + 3 u_9 + 4 u_{16} + \dots$$

sind demnach gleichzeitig convergent oder divergent.

SCHLÖMILCH.

XXIII. Allgemeine Auflösung der Gleichung $a x^2 \pm 1 = y^2$ in ganzen Zahlen.

Es ist allgemein

$$\text{I)}\quad \begin{aligned} &a\left[a^n f^{2n+1} + \binom{2n+1}{2} a^{n-1} f^{2n-1} g^2 + \binom{2n+1}{4} a^{n-2} f^{2n-3} g^4 + \dots\right]^2 - [a f^2 - g^2]^{2n+1} \\ &= \left[\binom{2n+1}{1} a^n f^{2n} g + \binom{2n+1}{3} a^{n-1} f^{2n-2} g^3 + \binom{2n+1}{5} a^{n-2} f^{2n-4} g^5 + \dots\right]^2; \end{aligned}$$

$$\text{II)}\quad \begin{aligned} &a\left[\binom{2n}{1} a^{n-1} f^{2n-1} g + \binom{2n}{3} a^{n-2} f^{2n-3} g^3 + \binom{2n}{5} a^{n-3} f^{2n-5} g^5 + \dots\right]^2 + [a f^2 - g^2]^{2n} \\ &= \left[a^n f^{2n} + \binom{2n}{2} a^{n-1} f^{2n-2} g^2 + \binom{2n}{4} a^{n-2} f^{2n-4} g^4 + \dots\right]^2. \end{aligned}$$

Ist demnach $a f^2 - g^2 = -1$ die kleinste Lösung von $a x^2 - y^2 = -1$, so enthalten die Relationen I) und II) die allgemeine Auflösung; ist $a f^2 - g^2 = +1$ die kleinste Lösung von $a x^2 - y^2 = +1$, so liefert die Relation I) alle Lösungen.

Mittels obiger Formeln kann man mit leichter Mühe sehr genaue Näherungswerthe von Quadratwurzeln ganzer Zahlen berechnen; z. B. $\sqrt{2}$ zu berechnen, suche man die kleinste Lösung von $2x^2 + 1 = y^2$. Dieselbe ist $2.2^2 + 1 = 3^2$, also $f = 2$, $g = 3$. Man setze $n = 5$, dann erhält man aus II)

$$2 . 15994428^2 + 1 = 22619537^2,$$

also nahezu

$$\sqrt{2} = \tfrac{22619537}{15994428} = 1{,}414213562373O9(6).$$

Husum, den 5. Sept. 1873. Prof. LUDWIG MATTHIESSEN.

XVI.

Kurze Mittheilungen über Siemens und Halske'sche neue Telegraphenapparate.

Von

Dr. Karl Eduard Zetzsche,

Professor der königl. höheren Gewerbschule zu Chemnitz.

Die reichhaltige Ausstellung der Firma Siemens & Halske in Berlin bietet aus den verschiedenen Gebieten der Telegraphie eine grosse Anzahl theils ganz neuer, theils nach richtigeren Grundsätzen und in zweckmässigerer Form gebauter Apparate. Bei dem ziemlich verbreiteten Interesse an den Fortschritten der elektrischen Telegraphie werden einige kurze Mittheilungen über diejenigen der Siemens'schen Apparate nicht unwillkommen sein, welche bis jetzt weder durch Abbildung, noch durch Beschreibung zu allgemeinerer Kenntniss gekommen sind. Dabei mögen diese Apparate in derselben Gruppirung und Reihenfolge vorgeführt werden, wie in dem (145 Nummern enthaltenden) „Verzeichniss der Ausstellungsgegenstände von Siemens & Halske".

A. Messinstrumente.

1. Das Spiegelgalvanometer mit aperiodisch schwingender Nadel unterscheidet sich von Thomson's und anderen Spiegelgalvanoskopen wesentlich durch die Form seines Magnetes, die erfolgreiche Anwendung eines kupfernen Dämpfers und die handliche Anordnung seiner einzelnen Theile, welche ein schnelles und bequemes Auseinandernehmen und Wiederzusammensetzen des Instrumentes ermöglicht. Der hufeisenförmige Magnet dieses Galvanometers hat eine Form, die sich experimentell als die günstigste herausgestellt hat; er ist nämlich aus einem hohlen Stahlcylinder (Fingerhut) mit geschlossenem Boden dadurch hergestellt worden, dass die seitlichen Theile mittels zweier zu einem Durchmesser und zur Axe parallelen Ebenen abgeschnitten wurden. Dieser Glocken-Magnet hängt nun in der cylindrischen Ausbohrung einer massiven Kupferkugel und vermag sich wegen seiner Form der innern Wand der Kugel nicht nur überhaupt mit wenig Spielraum sehr gut

anzuschmiegen, sondern auch in allen seinen Stellungen gleich gut, und er hat überdies in allen Stellungen genau dieselbe Lage gegen die dämpfende Kupferkugel. Ist daher die Kupfermasse völlig homogen und gut leitend, so wird der Magnet, dessen Trägheitsmoment trotz seines intensiven Magnetismus nur gering ist, sich vollkommen aperiodisch bewegen, d. h. er wird bei seiner Ablenkung durch einen elektrischen Strom keine Schwingungen um die neue Gleichgewichtslage machen, sondern in der letzteren sofort stehen bleiben. Dies ermöglicht ein rascheres und sicheres Arbeiten mit dem Galvanometer und macht dasselbe auch unabhängiger von den zufälligen Erschütterungen des Hauses, weil die daraus sich ergebenden Magneterschütterungen durch die Dämpfung ebenfalls abgeschwächt werden.

Uebrigens ist das Instrument so fein gebaut, dass es, auch ohne Anwendung eines Richtmagneten und ohne eine sehr delicate Behandlung zu erfordern, eine hohe Empfindlichkeit besitzt, nämlich einen Ausschlag von 80 Scalentheilen für den Strom von einem Daniell'schen Element in einem Draht von 1000000 S. E. Widerstand*, bei 2 Meter Entfernung der Scala von dem Spiegel, und wenn jede der beiden Rollen einen Draht von circa 1700 S. E. Widerstand in circa 16000 Umwindungen trägt; das Galvanometer kann daher zur genauen Messung von schwachen, sowie bei zweckmässiger Schaltung von beliebig starken Strömen benutzt werden. Durch Anbringung eines Richtmagneten kann die Empfindlichkeit beliebig gesteigert werden.

Im Bug des Hufeisens ist ein Aluminiumstäbchen eingeschraubt und vernietet, welches an dem unteren Ende des kleinen Spiegelträgers aus Aluminium drehbar angehängt ist, damit die Spiegelstellung vom magnetischen Meridian unabhängig wird. Der Spiegel, ein auf seiner Rückseite versilbertes (planparalleles) Glasscheibchen von 2,5$^{mm.}$ Durchmesser und 0,3$^{mm.}$ Dicke, ruht im Träger unten auf 2 Stützpunkten, während er oben von einem übergreifenden Schräubchen gehalten wird, mittels dessen seine Neigung regulirt werden kann. Der Träger endlich hängt an einem von einer Glasröhre eingeschlossenen Coconfaden, welcher durch ein Loch in der Mitte des die Glasröhre oben verschliessenden Messinghutes eingeführt und auf einen drehbaren Stift mit randrirtem Kopfe aufgewickelt wird. Seitlich sind in den Hut 3 randrirte Schrauben eingeführt, welche im Innern eine messingene Büchse festhalten; diese letztere besitzt wieder eine Oeffnung für den Faden und dient zur Führung desselben; durch Benutzung jener seitlichen Schrauben wird

---

* In der Ausstellung war das Galvanometer (mit 3500 S. E.) so eingeschaltet, dass es den einen Zweig des Stromkreises eines Daniell'schen Elementes bildete, während der andere Zweig nur 3,6 S. E., der ganze Stromkreis aber noch 1000 S. E. Widerstand enthielt; es ward also vom 1000000. Theile des Stromes durchlaufen

der Aufhängepunkt des Fadens genau vertical über die Mitte des cylindrischen Hohlraumes in der Kupferkugel gestellt.

Das Spiegelgehäuse sitzt in einer Vertiefung eines auf die Kupferkugel aufgesetzten messingenen Ringes und wird durch 3 Schrauben festgehalten; durch Lüftung dieser Schrauben lässt sich das Spiegelgehäuse drehen.

Die Kupferkugel ist auf eine verticale messingene Axe gesetzt, welche sich frei in einer in der Mitte eines messingenen Dreifusses angebrachten Oeffnung drehen kann; diese Axe trägt einen ringförmigen Ansatz, welcher über einen, auf den Dreifuss aufgesetzten, mit einem Stiel versehenen Ring übergreift. Jener Ansatz und mit ihm die Kupferkugel kann festgestellt werden durch eine Klemme, welche an dem Stiel des Ringes angebracht ist; wenn durch das Anschrauben dieser Klemme die Kupferkugel fest mit dem Ringe verbunden ist, so kann noch eine feinere Bewegung desselben ausgeführt werden vermittelst zweier an dem Stiel des Ringes angebrachter Schrauben mit durchlochten Köpfen, welche gegen einen fest in dem auf 3 Stellschrauben ruhenden Dreifuss sitzenden Ansatz drücken.

Die Spulen, welche der Strom durchläuft, bilden zwei getrennte Rollen; jede Rolle ist auf der einen Seite kugelförmig ausgehöhlt und wird mittels starker randrirter Schrauben an der Kupferkugel befestigt. Die Rollen bestehen je nach Bedürfniss aus dickerem oder dünnerem Draht und sind unifilar oder bifilar gewickelt; jede trägt die den Drahtenden entsprechende Anzahl von Klemmen, so dass die einzelnen Drähte hinter einander, gegen einander und parallel geschaltet werden können.

Das Stativ des zugehörigen Fernrohres besteht aus einem starken hölzernen Dreifuss mit Tisch, auf welchem ein messingener Dreifuss auf drei Messingplatten aufgesetzt ist und nach unten vermittelst einer durch den hölzernen Tisch gehenden Spiralfeder aufgedrückt wird. Das Fernrohr liegt auf einem messingenen Gestell, das einen Träger zum Einschieben der Scala besitzt und dessen Axe sich frei im Dreifusse dreht und durch eine an dem messingenen Dreifuss sitzende Klemme mit randrirter Schraube festgestellt werden kann. Die Mitte der Scala soll unter der Mitte des Objectivs liegen und ihr Bild im Fernrohr sichtbar sein. Bei der Aufstellung legt man die Ebene der Windungen zunächst ungefähr in die Meridianebene, bringt den Magnet mittels der 3 Stellschrauben am Fusse des Galvanometers zum freien Schwingen und richtet das Fernrohr senkrecht auf den Spiegel, welcher seinerseits vorher über dem Magnet so zu stellen ist, dass Fernrohr und Scala in entsprechender Entfernung von dem auf einer festen Unterlage, am besten auf einer Mauer stehenden Instrumente und in guter Beleuchtung aufgestellt werden kann. Das Spiegelgehäuse wird stets so gedreht, dass das Planglas parallel zum Spiegel steht. Endlich müssen noch die Rollen genau in

die Meridianebene gebracht werden; zu diesem Zwecke sendet man einen Strom durch das Galvanometer, der einen starken, aber noch ablesbaren Ausschlag hervorruft, und lässt dann denselben Strom in entgegengesetzter Richtung wirken; dabei dreht man die Rollen so lange, bis diese beiden Ausschläge genau gleich werden.

Wenn die vorstehenden Vorschriften bei der Aufstellung befolgt sind und wenn die Entfernung der Scala vom Spiegel nicht weniger als zwei Meter beträgt, so sind die Ausschläge den Strömen genau proportional zu setzen.

2. Die aperiodische Bussole hat eine ähnliche Einrichtung wie das aperiodische Spiegelgalvanometer, anstatt der Kupferkugel aber einen Kupfercylinder.

3. Der Universalwiderstandskasten bietet in ähnlicher Weise wie das ebenfalls ausgestellte Siemens'sche Universalgalvanometer (vgl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphen-Vereins, XV S. 1) die Möglichkeit, mit demselben Instrument mehrere wesentlich verschiedene Messungen vorzunehmen, und zwar mit noch grösserer Genauigkeit als mit letzterem. Das neue Instrument lässt sich nämlich nicht nur als gewöhnliche Widerstandsscala benutzen, sondern auch zur Messung der Widerstände von Drähten (als Wheatstone'sche Brücke), zur Messung der Batteriewiderstände nach einer neuen, von Dr. Werner Siemens angegebenen Methode, und zur Vergleichung elektromotorischer Kräfte nach der von Du Bois-Reymond modificirten Compensationsmethode von Poggendorff. Jeder der seit Jahren gebräuchlichen grösseren Widerstandskästen von Siemens & Halske kann sogleich durch Ansetzen eines neuen Theiles in einen Universalwiderstandskasten umgewandelt werden.

Das Instrument besteht aus einem vollständigen Widerstandskasten *A* von 1 bis 5000 S. E. und aus drei beigefügten Theilen *B*, *C*, *D*, welche ebenfalls Rollen von bestimmten Widerständen enthalten und mit Klemmen für die verschiedenen Messungen versehen sind. Alle Widerstandsrollen sind, wie in allen Widerstandskästen von Siemens & Halske, aus doppelt mit Seide übersponnenem Neusilberdraht von verschiedener Stärke gefertigt und bei 20° C. justirt mit der Genauigkeit von ½ pro mille, was ungefähr der Veränderung des Widerstandes durch Erhöhung oder Erniedrigung der Temperatur um 1° C. entspricht. Die Rollen können ein- und ausgeschaltet werden durch Stöpsel, welche in ausgeschliffene Hohlkehlen der Messingstücke passen, an welche die Enden der Drähte geführt sind; beim Gebrauch der Widerstandskästen, namentlich bei kleineren Widerständen, sind diese Stöpsel stets so fest als möglich mit Drehung in die von den Hohlkehlen gebildeten Löcher einzustecken. Zum Messen der Bruchtheile einer Einheit sind zwei sorgfältig gezogene Platindrähte ausgespannt, auf welche ein mit einer vergoldeten Kante

und einer Bleiplatte versehener messingener Läufer aufgesetzt werden kann; wird der die Enden der Widerstände A und B verbindende Stöpsel am Anfang der Platindrähte herausgenommen, so muss der aus A kommende Strom den einen Platindraht, dann den Läufer und den andern Platindraht durchlaufen, um nach B zu gelangen. Ungefähr 250$^{\text{mm.}}$ dieses Doppeldrahtes haben 1 S. E. Widerstand; der Widerstand des Platindrahtes muss jedoch bei jedem einzelnen Instrumente bestimmt und diese Bestimmung von Zeit zu Zeit wiederholt werden, weil die Spannung des Drahtes variirt; 0,2$^{\text{mm.}}$ bis 0,3$^{\text{mm.}}$ entsprechen daher 0,001 S. E. Wird der Läufer nicht genau senkrecht zu den beiden Drähten aufgesetzt, so giebt das Mittel aus den Ablesungen auf beiden Drähten genau die wahre Ablesung. Die Ablesung am Läufer geschieht auf der ebenen Seite desselben; da die Kante abgerundet ist und daher die Stelle des Contactes nicht von oben gesehen werden kann, so muss der durch diese Art der Ablesung begangene Fehler bei jeder Ablesung berücksichtigt werden. Dieser Fehler wird ein für allemal dadurch bestimmt, dass man bei irgend einer Messung den Läufer genau einstellt und abliest, dann denselben herauszieht, umkehrt und dieselbe Einstellung bei der umgekehrten Lage des Läufers wiederholt; die halbe Differenz der beiden Ablesungen ist der gesuchte Fehler.

Die Messung von Batteriewiderständen beruht auf folgender Bemerkung, deren Richtigkeit sich durch Rechnung leicht nachweisen lässt: Ist in einen Stromkreis eine Batterie vom Widerstande w und ein Galvanometer eingeschaltet, und wird ein Punkt x in dem einen Stromkreiszweige durch einen Leiter vom Widerstande C der Reihe nach mit 2 Punkten y_1 und y_2 des andern Stromkreiszweiges, deren Entfernung von einander dem Widerstande B entspricht, verbunden, so sind die in beiden Fällen durch das Galvanometer gehenden Sröme gleich, sobald der Widerstand von x durch die Batterie hindurch bis zum Punkte y_2 ebenso gross ist wie der Widerstand von x durch das Galvanometer hindurch bis y_1. Zur Ausnutzung dieser Eigenschaft wird die Klemme IV an dem nach A hin gelegenen Ende des Widerstandes B des Universalwiderstandes als y_2 gewählt, am andern Ende von B beginnt D und dann erst folgt C; das nach C hin gelegene Ende von D dient als y_1, das freie Ende von C als x und an diesen beiden Enden befinden sich Klemmen III und II zur Einfügung des das Galvanometer aufnehmenden Drahtes $(y_1\, x)$; die Batterie wird zwischen die Klemme I am freien Ende von A und eine Klemme VI eingeschaltet, welche durch einen kleinen Taster s mit der Klemme II an C in leitende Verbindung gesetzt werden kann; eine Klemme V endlich steht mit einem Taster t in Berührung, welcher jetzt durch einen Stöpsel S mit der Klemme IV an dem gegen A hin gelegenen Ende von B verbunden ist; auf einem Ambosse an dem nach B hin gelegenen Ende von D liegt eine Feder, welche von dem nach

D hin liegenden Ende von C ausläuft und durch den Taster t vom Ambosse abgehoben wird, wobei der Tasterhebel und die Feder dieses Ende von C mit dem Stöpsel S und Klemme IV in leitende Verbindung setzt. Zwischen Klemme III und dem daneben liegenden Ende von C darf kein Stöpsel stecken; die Stöpsel zwischen den einzelnen Rollen der Widerstandsabtheilungen A, B, C, D können stecken oder nicht. Bei der Messung des Widerstandes r der Batterie nebst Zuleitungsdrähten drückt man nun den Taster s beständig, t nur zeitweise, und ändert die Widerstände in A und D so lange, bis der Ausschlag des Galvanometers, wenn t gedrückt wird, ebenso gross ist, als wenn t losgelassen wird, bis also die Nadel des Galvanometers keine Bewegung beim Niederdrücken des Tasters t macht. Dann ist $r = G + D - A$, wobei G den Widerstand des Galvanometers nebst Zuleitungsdrähten bedeutet. Die Messung wird am genauesten, wenn G und D solche Werthe haben, dass A klein wird. In den Zweigen B und C müssen stets Widerstände eingeschaltet werden; im Allgemeinen solche, deren Grösse ungefähr denjenigen in den übrigen Zweigen entspricht; die in B und C eingeschalteten Widerstände haben nur Einfluss auf die Genauigkeit der Messung, die Formel ist unabhängig von denselben. — Die Methode ist selbstverständlich auf alle Leiter anwendbar, welche Sitze von elektromotorischer Kraft sind, so namentlich Inductionsmaschinen und Thermosäulen. — Wenn das Galvanometer zu empfindlich ist, so würden am besten die Enden des Galvanometerdrahtes durch eine Zweigleitung verbunden, deren Widerstand so gewählt werden kann, dass der Ausschlag die gewünschte Grösse erhält; als Widerstand des Galvanometers muss dann natürlich der Widerstand des Systems der beiden Zweige eingeführt werden, welcher nach der bekannten Formel $c = \frac{a.b}{a+b}$ berechnet wird, wobei a und b die betreffenden Widerstände der beiden Zweige, c derjenige des Systems ist.

Bei der Messung von Drahtwiderständen werden in B und C am besten gleiche Widerstände eingeschaltet, und zwar ungefähr von derselben Grösse wie der zu messende Widerstand W. Will man sich der Platindrähte nicht bedienen und doch W auf 0.1 S. E. genau messen, so muss B 10mal so gross genommen werden als C. Für gewöhnliche Messungen ist der Taster s überflüssig und man verbindet die Enden des Drahtes d, dessen Widerstand W gemessen werden soll, mit den Klemmen I und II; treten in dem Drahte d Inductionsströme auf oder sind Einwirkungen der Ströme ausserhalb des Galvanometerzweiges zu befürchten, so legt man das zweite Ende des Drahtes an die Klemme VI, damit das Galvanometer erst durch Drücken des Tasters s eingeschaltet werde. Die Klemme III ist dabei durch Stöpsel mit C und D verbunden; der Stöpsel zwischen der Klemme IV und dem Taster t darf

nicht stecken, die übrigen Stöpsel können stecken oder nicht. Man findet mittels eines zwischen den Klemmen II und IV eingeschalteten Galvanometers den Widerstand $W = \frac{A\,C}{B}$.

Bei der Vergleichung elektromotorischer Kräfte E und E_0 wird die Batterie E_0 zwischen die Klemmen I und VI, die Batterie E mit dem Galvanometer zwischen den Klemmen I und V eingeschaltet; der Stöpsel zwischen IV und t darf wieder nicht stecken, der zwischen III und C muss stecken, alle übrigen können stecken oder nicht. Es sind nun die Widerstände so lange zu variiren, bis das Galvanometer keinen Ausschlag giebt beim Drücken beider Taster, und dann ist $E = \frac{A+B+D}{A+B+D+C+r_0} E_0$. Der Widerstand r_0 des Elementes oder der Batterie E_0 muss für sich bestimmt werden. Diese letztere Bestimmung wird überflüssig, wenn der Widerstand $A+B+C+D$ im Verhältniss zu r_0 sehr gross ist; in diesem Falle kann man r_0 in der Formel vernachlässigen.

Soll endlich der Universalwiderstand als gewöhnliche Widerstandsscala benutzt werden, so wird er mittels der Klemmen I und II eingeschaltet und zwischen der Klemme IV und dem Taster t wieder nicht gestöpselt, während alle anderen Stöpsel stecken können oder nicht.

4. Der magnet-elektrische Distanzmesser oder Ortsbestimmer für stationäre Aufstellung bei Torpedoanlagen u. s. w. besteht auf der ersten Beobachtungsstation aus einem Beobachtungsfernrohre und einem Inductor, auf der zweiten Beobachtungsstation aus einem zweiten Beobachtungsfernrohre und einem Indicator. Das erste Fernrohr wird durch eine Kurbel auf den Beobachtungsgegenstand eingestellt, diese Kurbel dreht aber zugleich den Inductor um und dessen Ströme werden nach dem Indicator geleitet und drehen ein an demselben angebrachtes Lineal über einem Messtische in ganz ähnlicher Weise, wie bei dem bekannten Siemens'schen magnet-elektrischen Wasserstandszeiger (vgl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphen-Vereins, XIII, S. 185) in gleichem Schritte mit dem ersten Fernrohre vorwärts oder rückwärts. Dieses Lineal markirt also die Visur des ersten Fernrohrs auf der zweiten Station, das zweite Fernrohr dagegen ist unmittelbar mit einem seine Visur markirenden Lineale verbunden. Der Schnittpunkt beider Lineale giebt also in der durch das Verhältniss der Entfernung der beiden Linealdrehaxen zu der Entfernung der beiden Beobachtungsstationen bedingten Verjüngung den Ort des anvisirten Schiffes u. s. w. Zu grösserer Bequemlichkeit in der Ortsbestimmung ist der mit einer Glastafel bedeckte Messtisch in 8000 quadratische Felder getheilt.

5. Der elektrische Apparat zum Messen der Geschwindigkeit einer Kugel im Geschützrohr ist eine neuere Form des

1844 von Dr. Werner Siemens angegebenen Apparates und besteht aus dem eigentlichen Messapparat, dem Gewehr (oder Geschütz), einer Anzahl Leydener Flaschen und einem zum Laden der Flaschen (auf eine Schlagweite von etwa 5mm.) erforderlichen Volta-Inductor. Von der inneren Belegung einer jeden der 6 Flaschen führt ein isolirter Kupferdraht nach einem der 6 in gleichen Entfernungen (von etwa 15cm.) von einander angebrachten Löcher im Gewehrlaufe; ein siebenter Draht kann von einer siebenten Flasche nach der Aufschlagstelle des Hahnes geführt werden, wenn man die Zeit zwischen der Entzündung der Ladung und dem Anfang der Bewegung der Kugel mit bestimmen will. Die Löcher sind der Controle halber von beiden Seiten her durch die Wand des Laufes gebohrt. Ueber jede durchbohrte Stelle ist ein Messingring gelegt mit 2 den Bohrungen entsprechenden Vertiefungen, in welche nach dem Einstecken des Drahtes durch randrirte Schrauben über den Drath gesteckte Gummiplatten eingepresst werden, um die Bohrung luftdicht zu verschliessen; bei vorsichtiger Einführung der Drähte bleibt dieser luftdichte Verschluss auch erhalten, während die Kugel den Lauf durchfliegt. Bei Geschützen werden die Drähte in etwas anderer Weise in das Rohr eingeführt. Von den äusseren Belegungen führt ein gemeinschaftlicher isolirter Draht nach einem Messingrohre, das von einer dicken Hartgummihülle umgeben ist, und in dessen anderes Ende ein in ein Glasröhrchen eingeschmolzener Platindraht eingesetzt ist. Dieser durch das Messingrohr mit dem von den äusseren Belegungen kommenden Drathe leitend verbundene Platindraht steht einer durch eine Terpentinflamme berussten stählernen Trommel des eigentlichen Messapparates nahe gegenüber und ist entlang der Trommel verstellbar, damit ohne frische Berussung die Funken bei mehr als einem Schusse von dem Platindraht auf die Trommel überspringen können. Das Gewehr liegt auf einem hölzernen Stativ und ist mit dicken Gummistücken versehen zur Milderung des Zurückprallens beim Schuss; sein Lauf steht in leitender Verbindung mit der Trommel und deshalb muss der Funke vom Platindraht auf die Trommel überspringen, sobald die Kugel den dünnen Guttapercha- oder Kautschuk-Ueberzug des in den Lauf eingeführten geladenen Poldrahtes einer inneren Belegung verletzt und so den Draht mit dem Laufe leitend verbindet. Zur Beurtheilung der Stärke der Ladung der Flaschen ist ein stellbarer Selbstentlader vorhanden. Die Flaschen stehen in einem inwendig mit Stanniol belegten, auf isolirenden Füssen ruhenden Kasten, dessen Deckel mit einer Vorrichtung zur bequemen gleichzeitigen Ladung sämmtlicher Flaschen ausgerüstet ist.

Das durch ein Gewicht bewegte Uhrwerk, welches die Trommel in Umdrehung versetzt, befindet sich in einem Messingkasten, auf einem hohen eisernen Stativ; an der Vorderseite des Kastens geben 2 Zeiger auf 2 Zifferblättern die Umdrehungszahlen der Trommel, der eine Zei-

ger die Hunderter, der andere die Einer. Die Bewegung der Trommel wird durch den von Dr. Werner Siemens angegebenen Regulator gleichmässig gemacht. Dieser Regulator besteht aus einem oder zwei Windflügeln, deren Axe sich in jeden Winkel zu der durch das Uhrwerk getriebenen Drehungsaxe stellen kann. Auf die Windflügel wirkt eine Feder in der Weise, dass bei einer gewissen Normalgeschwindigkeit die Centrifugalkraft der Windflügel in jeder Lage derselben durch die Feder von selbst compensirt wird. Wenn aber auch nur die geringste Erhöhung der Geschwindigkeit eintritt, so werden die Flügel sogleich mit bedeutender Kraft in die auf die Drehungsaxe senkrechte Lage geworfen, und umgekehrt suchen sie sich bei der geringsten Verminderung der Geschwindigkeit der Axe parallel zu stellen. Durch diese Verstellungen der Flügel aber wird der Luftwiderstand im ersten Falle bedeutend vermehrt, im zweiten Falle bedeutend vermindert, die Geschwindigkeit des Werkes daher schnell verlangsamt oder beschleunigt; der Regulator muss also bei der geringsten Veränderung der Geschwindigkeit immer rasch wieder das Werk auf die Normalgeschwindigkeit zurückbringen. An dem Messapparat für Schiessversuche wirkt als Feder ein breites Stahlblech, welches oben auf dem Kasten angebracht ist. Dasselbe reicht mit dem einen Ende bis auf die Axe der stählernen Trommel, drückt aber nicht auf diese Axe selbst, sondern auf einen Stahlstift, der innerhalb der Axe liegt und sich in derselben frei auf- und abbewegen kann; dieser Stahlstift drückt dann vermittelst eines Hebelwerkes auf die Windflügel. Die Normalgeschwindigkeit selbst aber lässt sich verändern; ihre Grösse hängt nämlich wesentlich von der Stärke der Feder ab und diese wieder wesentlich von der Länge der Feder. Es lässt sich nun die Klemme, welche das hintere Ende der Stahlfeder festhält, in einem Schlitten durch eine Schraube bewegen und auf diese Weise kann man die Feder merklich verlängern oder verkürzen und dadurch die für die Messung vortheilhafteste Normalgeschwindigkeit der Trommel herstellen. Durch eine mit einem Stift versehene Scheibe an der hinteren Seite des Kastens kann eine Mikrometerschraube in das Räderwerk ein- und ausgerückt werden. Der Rand der Scheibe ist in 100 Theile getheilt, eine ganze Umdrehung derselben bewegt die stählerne Trommel um $^1/_{100}$ ihrer Peripherie, 1 Scalentheil der Scheibe entspricht daher $^1/_{10000}$ des Trommelumfangs. Die Trommel macht im Mittel ungefähr 4200 Umdrehungen in der Minute, also 70 Umdrehungen in der Secunde; es entspricht daher die Bewegung der Trommel um 1 Scalentheil der Scheibe $^1/_{700000}$ Secunde. Jeder auf die Trommel überspringende Funken erzeugt auf dieser einen kleinen, von Russ befreiten Kreis, in dessen Mitte ein ziemlich scharf begrenzter Punkt die Stelle anzeigt, wo der Funken übersprang. Neben dem Glasrohr mit dem Platindraht ist eine auf die Trommel gerichtete Lupe an-

gebracht. Die Zeit nun, welche zwischen dem Ueberspringen zweier aufeinanderfolgender Funken verflossen ist, wird so bestimmt, dass man die Mikrometerscheibe in das Räderwerk einrückt und durch vorsichtiges Drehen derselben die beiden von den Funken gebildeten Punkte nach einander in das Fadenkreuz der Lupe bringt und abliest, wieviel Scalentheile der Scheibe der Entfernung der Punkte entsprechen. Einige Zeit vor dem Schuss wird das Werk in Gang gesetzt und mit der Secundenuhr die Geschwindigkeit der Trommel gemessen, d. h. deren Umdrehungenzahl in der Minute auf den Zifferblättern abgelesen; aus dieser Zahl und den oben mitgetheilten Daten über die Scheibe lässt sich unmittelbar der einem Scalentheil dieser letzteren entsprechende Zeitwerth und daher auch die Zeit, welche zwischen dem Ueberspringen zweier Funken verfloss, in Secunden angeben und die Geschwindigkeit der Kugel auf dem zugehörigen Wege berechnen. Die Genauigkeit ist bei diesem Apparate so gross, weil die Kugel keinen Draht zu zerreissen braucht und im Apparat auch sonst keine mechanischen Fehler vorhanden sind.

6. Der in der Ausstellung von Gebrüder Siemens in London neben dem Pyrometer von Dr. Wilhelm Siemens (Royal Institution, March 1, 1872) und dem von beiden Brüdern angegebenen Apparate zur Bestimmung der Wassertemperatur (Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphen-Vereins XIV, S. 38) befindliche Apparat zur Vergleichung der Lichtstärken in verschiedenen Wassertiefen enthält in einem cylindrischen Raume von geringer Höhe eine Anzahl Gläschen mit einem Stoffe, auf welchen das Licht chemisch wirkt, wie z. B. Chlorsilberpapier; ein Sector von der Breite eines Gläschens ist aus dem Boden und Deckel jenes scheibenförmigen Raumes ausgeschnitten und also dem Lichte zugänglich, während der übrige Raum dunkel ist. Nachdem das Instrument in diejenige Wassertiefe herabgebracht wurde, in welcher die Lichtstärke beobachtet werden soll, so wird durch einen elektrischen Strom die verticale Axe, auf welcher die Gläschen befestigt sind, um einen Schritt gedreht, so dass ein Gläschen in den belichteten Sector tritt; nach Verlauf einer bestimmten Zeit aber macht ein zweiter Strom das Gläschen wieder einen Schritt weiter gehen und auf der anderen Seite des belichteten Sectors wieder in den dunkeln Raum eintreten. Der Apparat gestattet nur eine Vergleichung der an den betreffenden Stellen vorhandenen chemisch wirkenden Lichtmengen; Beobachtungen in verschieden gefärbten Wassern sind also nicht ohne Weiteres mit einander vergleichbar, da man in gelblich gefärbtem Wasser weniger, in bläulich gefärbtem mehr Licht messen wird, als da ist.

B. Telegraphenapparate im engeren Sinne.

7. Der combinirte Blitzableiter mit selbstthätiger Ausschaltung wird in Russland vielfach angewendet. In seinem Glasschutzkasten sind die beiden in die Station einmündenden Telegraphenleitungen an zwei Schienen L_1 und L_2 geführt, zwischen denen die Erdschiene E liegt; aus jeder Schiene treten Spitzen bis nahe an die daneben liegende Schiene hervor. An L_1 und L_2 sind je eine Feder f_1 und f_2 angebracht, welche jede durch einen an einer Säule s befestigten und über eine kleine Rolle gelegten dünnen Draht d gehoben erhalten werden. Der nach L_1 kommende Telegraphirstrom geht daher über f_1, d_1 und s_1 durch den Telegraphen nach s_2, d_2, f_2 und L_2. Schmelzt dagegen ein Blitz den Draht d_1 oder d_2 ab, so fällt die Feder f_1 oder f_2 auf einen Ambos a_1 oder a_2 herab und da a_1 mit L_2, a_2 mit L_1 unmittelbar verbunden ist, so schaltet der Blitzableiter beim Abschmelzen eines Drahtes den Telegraph selbstthätig aus.

8. Das für die Ingenieure der indischen Linie bestimmte Reisegalvanoskop ist mit einer zweckmässigen Arretur versehen, welche zugleich ein leichtes und bequemes Herausnehmen der Nadel gestattet. Die Nadelaxe ist nämlich in die beiden Wangen a und b eines kleinen Rahmens eingelagert, und zwar in a in einem ovalen Loche, in b in einem länglichen, von der Seite herein schief nach unten gehenden Schlitze; die Axe legt sich mit ihrer oberen Seite an die unten abgerundeten Enden eines zweiten, im Gehäuse fest liegenden zweiten Rahmens an, so lange eine an dem die beiden Wangen a und b verbindenden Querstücke des ersten Rahmens befestigte und mit ihren Enden sich gegen den zweiten Rahmen stützende Feder f sich selbst überlassen wird. Dabei ist dann die Nadel arretirt. Schraubt man dagegen den ersten Rahmen mit seinem Querstücke gegen den zweiten herab, so senkt sich zugleich die Nadel und wird frei, während die Feder f sich durchbiegt und stärker spannt. In dieser Lage lässt sich zugleich die Axe leicht aus ihren Lagern ausheben.

9. Das Taschengalvanoskop im Etui ist in einem dosenförmigen Gehäuse so angebracht, dass es bequem in die Tasche gesteckt werden kann; seine Axe ist in 4 Steinen gelagert.

10. Das submarine Relais für Wechselströme besitzt entweder einen kräftigen Elektromagnet, welcher durch einen starken Localstrom erzeugt wird, oder einen durch ein System permanenter Magnete kräftig influenzirten Magnet. Der Nordpol dieses aufrechtstehenden Magnetes ragt durch ein in dem entsprechend verlängerten Südpole befindliches Loch, dessen Weite etwas grösser ist, als die Dicke des Nordpols, hindurch, und in dem Zwischenraume zwischen den beiden Polen schwebt eine kleine am Ende von 3 längeren Messingdrähten a, b_1 und b_2 auf-

gehängte Spule, in welche der Linienstrom durch die beiden Drähte b_1 und b_2 ein- und austritt und welche dann je nach der Richtung des Linienstromes in dem magnetischen Felde zwischen jenen beiden Magnetpolen sich hebt oder senkt, dabei aber den durch den mittleren Drath a zugeführten Localstrom in der einen oder andern Richtung durch einen polarisirten Schreibapparat sendet. An der Spule ist nämlich ein Aluminiumbügel angebracht, in welchem ein oben in einer Spitze, unten in einer ebenen Fläche endender Contactstift befestigt ist, welchem oben ein Contact mit ebener Fläche, unten ein Contact mit Spitze gegenübersteht. Die Bewegung der Spule mit ihrem Bügel lässt sich ausserdem auch unmittelbar durch eine Lupe beobachten, deren Visur auf den Contact am Bügel eingestellt ist. Dieses Relais zeichnet sich durch seine grosse Empfindlichkeit aus, welche es der Leichtigkeit des als Relaishebel dienenden Theils und dem Umstande verdankt, dass sich der Elektro- oder permanente Magnetismus jenes aufrechtstehenden Magnetes beliebig verstärken lässt.

11. Mittels seines Abkürzungsrelais beabsichtigt v. Hefner-Alteneck eine Erhöhung der Sprechgeschwindigkeit durch Kabel zu erzielen. Die Spulen des Elektromagnetes M dieses Relais bieten dem Strome einen sehr grossen Widerstand (1780 S. E.) und sind einerseits mit der Axe des Tasters, andererseits mit der Erde leitend verbunden; von zwei Batterien ist der Kupferpol der einen B_1 mit dem Arbeitscontacte, der Zinkpol der anderen B_2 mit dem Ruhecontacte des Tasters verbunden, während die anderen beiden Pole zur Erde abgeleitet sind. Demnach durchläuft der Strom von B_2 in der Ruhelage des Tasters die Spulen des Relais, zieht dessen Anker A an und legt den Ankerhebel auf die untere, ebenfalls mit der Erde verbundene Stellschraube s_1; da nun an den Ankerhebel zugleich auch das Kabel geführt ist, so kann jetzt ein aus dem Kabel kommender Strom über die Contactschraube s_1 zur Erde gelangen. Beim Niederdrücken des Tasters kommt derselbe erst zum Schweben; dabei wird B_2 unterbrochen, der Anker A fällt durch die Wirkung einer Spannfeder ab, und der Ankerhebel legt sich an die obere mit der Tasteraxe verbundene Stellschraube s_2; legt sich dann endlich der Tasterhebel auf den Arbeitscontact auf, so wird die Batterie B_1 geschlossen, deren Strom verzweigt sich aber von der Tasteraxe aus und es geht der eine Zweig über die Contactschraube s_2 und den Ankerhebel in das Kabel, der andere Zweig durch die Spulen von M. Der letztere Zweigstrom von B_1 durchläuft aber die Spulen in anderer Richtung als vorher der Strom der Batterie B_2; die magnetische Polarität wird also in den Elektromagnetkernen (durch Null hindurch) umgekehrt und es verfliesst daher eine gewisse Zeit, bevor der Anker angezogen wird und der Ankerhebel sich wieder an die Schraube s_1 anlegt, dabei aber, selbst wenn der Tasterhebel noch auf dem Arbeitscontact liegt, den

Strom von B_1 unterbricht und das Kabel entladend mit der Erde in Verbindung setzt.

12. Bei dem lautlosen Taster liegen beide Contacte für den Tasterhebel auf starken, sich nur unmerklich durchbiegenden Contactfedern; dazu ist der Hub des Tasterhebels sehr klein und infolge dessen ist das Aufschlagen dieses Hebels auf die Contacte dem Ohre kaum vernehmbar. Damit der Telegraphirende den Hub und dadurch die Schrift nicht verändern kann, sind unter den beiden Contactfedern kleine Schrauben eingeschraubt, auf die sich die Contactfedern endlich, bei ihrer stärksten Durchbiegung, auflegen.

13. Die verschiedenen ausgestellten Kurbelumschalter zeigen eine neue Einrichtung zur grösseren Sicherstellung eines guten Contactes. Die Kurbel ist nämlich mittels eines Schlitzes auf die Kurbelaxe aufgesteckt, so dass sie sich gegen diese ein ziemliches Stück verschieben kann; in den leeren Raum des Schlitzes ist aber eine Spiralfeder eingelegt, welche sich mit dem einen Ende gegen die Axe, mit dem andern gegen die innere Wand des Schlitzes anlegt und somit die Kurbel mit dem entgegengesetzten Ende des Schlitzes fest an die Axe heranzieht. Wenn sich nun die Kurbel an den festliegenden, zum Theil auch federnden Contacten hinbewegt, so wird durch deren Druck gegen die Kurbel die Spiralfeder zusammengedrückt, die Kurbel giebt nach und wird endlich in ihrer richtigen Stellung festgehalten; während der ganzen Bewegung aber erhält die Feder einen sichern Contact zwischen der Kurbel und ihrer Axe.

14 und 15. Unter dem Namen Normal-Farbschreiber und Normal-Reliefschreiber wurden der Morse-Farb- und Stiftschreiber in der jetzt von der deutschen Reichsverwaltung angenommenen Form vor Augen geführt. Bei dem grossen Bedarfe an ganz gleichgebauten Apparaten können die einzelnen Theile unter möglichster Vermeidung von Handarbeit fabrikmässig mechanisch hergestellt werden. In welcher Weise dies geschieht, macht ein Glaskasten ersichtlich, in welchem die einzelnen Theile auf den verschiedenen Fabrikationsstufen nebeneinander liegen.

Das Schreibrädchen des Farbschreibers wird zwar immer noch vom Triebwerk mit umgedreht, es wird aber nicht mehr auf einer durch ein Universalgelenk mit dem Triebwerke verbundenen Welle angebracht. Die Papierrolle liegt unter dem Apparate in einem Kasten, weil bei dieser Lage der Scheibe die Papierführung einfacher ist. Die Elektromagnetkerne lassen sich durch eine Schraube auf und nieder bewegen, und so kann ihre Stellung gegen den Anker der Stromstärke entsprechend regulirt werden.

Die Stiftschreiber haben die Papierrolle immer oben und zwar entweder, wie bisher gewöhnlich, eine einfache Rolle, oder mit ihrem Fuss

in eine Führung auf dem Apparatkasten einschiebbare doppelte Papierrolle, welche eine schnellere und leichtere Einführung eines neuen Papierstreifens gestattet, wenn jener der ersten Rolle zu Ende geht. Die beiden Rollen sitzen dann auf einem horizontalen Querstücke am obern Ende des aufrechtstehenden Trägers; der obere Theil des Trägers aber ist selbst um eine verticale Axe drehbar, schnappt jedoch in den beiden richtigen Stellungen der ersten und der zweiten Rolle durch sein Gewicht ein, während er in den Zwischenstellungen nicht stehen bleibt.

Beide Normalschreiber sind mit einem sich selbst regulirenden Windflügel ausgerüstet.

C. Vollständige Telegraphen-Einrichtungen.

16. Für die Morse'schen Eisenbahnstationstelegraphen sind die zu einer Station gehörigen Apparate (Farb- oder Stiftschreiber, Relais, Taster, Galvanoskop, Blitzableiter) auf einem gemeinschaftlichen Grundbrete festgeschraubt, welches in eine Vertiefung des Apparattisches eingesetzt wird. Dabei sind behufs schneller und einfacher Auswechselung eines solchen Apparatsatzes die Leitungsdrähte nicht unmittelbar nach Klemmschrauben an den einzelnen Apparaten geführt, sondern mit schneidenförmigen, in jener Vertiefung des Tisches befindlichen Ständern verbunden, auf welche sich beim Einsetzen des Grundbretes in die Vertiefung die sogenannten Federschlussklemmen (nach Frischen) auflegen und die nöthigen Apparatverbindungen herstellen. So lange dagegen das Grundbret aus der Vertiefung ausgehoben ist, stellt eine ausserdem noch vorhandene Federschlussklemme die kurze Verbindung zwischen den in die Station einmündenden (Luft- und Erd-) Leitungen her; beim Wiedereinsetzen des Grundbretes aber wird diese kurze Verbindung selbstthätig wieder gelöst. Unter der Tischplatte des Apparattisches befindet sich zum Theil noch ein Schränkchen zur Aufnahme der Batterien.

17. Der Wärterstationsapparatsatz besteht aus Farbschreiber, Schlüssel, Galvanoskop und Umschalter, welche in einem verschliessbaren Schutzkasten verwahrt sind. Der Elektromagnet des zunächst für Ruhestrom bestimmten Farbschreibers hat 2 aufrechtstehende Schenkel, deren Kerne seitwärts zu einander zugewandten Schuhen verlängert sind; der Anker aber ist durch eine Schraube unterhalb des Ankerhebels fest gemacht und liegt auch noch unterhalb der Schuhe. Der Ruhestrom zieht also den Anker an die Schuhe empor, bei Unterbrechung des Stroms fällt dagegen der Anker nach unten ab und drückt das Schreibrädchen gegen den Papierstreifen.

Wird der Anker nicht auf der Unterseite, sondern auf der obern Seite des Ankerhebels und oberhalb der Schuhe festgeschraubt, so kann der Farbschreiber sofort mit Arbeitsstrom arbeiten.

18. Die für vorübergehenden Dienst bestimmten Eisenbahnwärterbudentelegraphen sind erst seit etwa ½ Jahr entstanden und auf mehreren Eisenbahnen bereits eingeführt. Der eiserne Anker der horizontalen Elektromagnete ist bei diesen Telegraphen in ähnlicher Weise wie zuerst bei dem Siemens'schen Zeigerapparat mit Selbstunterbrechung und später auch bei dem Siemens'schen Dosenrelais zwischen die Elektromagnetpole gelegt; ein seitwärts vom Anker auslaufender Arm trägt das Schreibrädchen oder Farbscheibchen und an einer Rückverlängerung dieses Armes heftet sich die Abreissfeder an. Der ganze Apparatsatz ist in einen hölzernen Kasten eingeschlossen, welcher sich ganz auseinanderschlagen und dessen Thür sich um eine horizontale Axe um 90° umklappen lässt und dann als Schreibpult dienen kann; dabei ist die untere Thürhälfte doppelt, und es bleibt der innere Theil stehen, während der äussere sich mit umklappt. Beim Schliessen des Kastens legt sich eine Metallschiene an der Thür an 2 Federschlussklemmen an und schaltet den Apparat unter Herstellung eines kurzen Schlusses der Linie aus letzterer aus; beim Oeffnen der Thür wird dieser kurze Schluss durch die Federn beseitigt und der Apparat zugleich eingeschaltet.

Der erste der ausgestellten Apparate schreibt mit einem trockenen Farbscheibchen (aus Stiftblau), welches sich bei jeder Unterbrechung des Ruhestromes durch sein Gewicht und die Wirkung der Abreissfeder auf den Papierstreifen auflegt, von diesem aber infolge der Ankeranziehung wieder abgehoben wird, sobald der Strom wieder geschlossen wird. Das Farbscheibchen wird durch das von einem Gewicht getriebene Räderwerk des Apparates in beständige Umdrehung versetzt. Der Farbschreiber des zweiten Apparates besitzt ein Schreibrädchen, das in ein Gefäss mit flüssiger Farbe taucht und von unten nach oben gegen den Streifen bewegt wird. Der Farbschreiber des dritten, mit einem Wecker ausgerüsteten Apparates schreibt ebenfalls mit flüssiger Farbe und ist mit Selbstauslösung versehen. Die Apparate schalten sich aber bei diesem Telegraph beim Oeffnen und Schliessen des Kastens nicht selbstthätig ein und aus, vielmehr muss die Einschaltung mit der Hand mittels eines Schiebers bewerkstelligt werden; allein so lange der Schieber so steht, dass der Farbschreiber eingeschaltet ist, kann der Kasten nicht geschlossen werden. Der Wecker ist kein elektrischer, sondern ein mechanischer, und weckt so lange, als das Laufwerk des Farbschreibers läuft.

19. Von den transportabeln Telegraphen enthält der kleinere auf der indischen Linie verwendete einen transportabeln Farbschreiber, dessen Schreibrädchen in ein Farbegefäss eintaucht, und eine an den Telegraphensäulen zu befestigende Einschaltevorrichtung, mittels deren der Apparat z. B. in eine Glockenleitung eingeschaltet werden kann. Dieser Farbschreiber besitzt aber kein Laufwerk, viel-

mehr wird bei ihm der Streifen mit der Hand bewegt. Bei einem andern, in Russland gebräuchlichen Apparatsatze ist der transportable Farbschreiber nebst Schlüssel und Galvanoskop in einen Kasten eingeschlossen und der Papierstreifen wird durch eine Schneide am Ankerhebel gegen das von einer Farbwalze mit Farbe gespeiste Farbscheibchen bewegt. Der dritte Apparatsatz, ebenfalls mit Einschaltevorrichtung, hat einen Farbschreiber für flüssige Farbe, aber das Farbegefäss desselben wird während des Transportes vom Apparate getrennt und, durch eine Lederklappe verschlossen, am Kasten befestigt.

D. Die Feuer-Telegraphen.

20. Der automatische Feuermelder hat eine etwas vortheilhaftere Form erhalten, und es sind am Boden des Schränkchen, in dem er eingeschlossen ist, zwei metallene Schneiden angebracht worden, auf welche sich das Gewicht, wenn es ganz abläuft, aufsetzt und so die Linie kurz schliesst, um eine etwaige Unterbrechung der Linie durch das Schrifträdchen unmöglich zu machen. Der Farbschreiber für die Spritzen-, Wach- und Centralstationen hat die schon in 17. beschriebene Einrichtung des Elektromagnetes und ist mit einer eigenthümlichen Weckerausschaltung (mittels eines Fusstrittes, anstatt durch Stöpselung) versehen. Ausser dem Farbschreiber und Wecker gehört zur Ausrüstung der Stationen noch Taster, Bussole und Umschalter.

E. Magneto-elektrische Zeigertelegraphen.

21. Der magneto-elektrische Zeigertelegraph ist nicht nur in seiner älteren Form (Modell 1857) in pultförmigem Kasten, sondern auch in einer neuern sehr handlichen Form ausgestellt, bei welcher der Zeiger sich über einem kleineren Zifferblatte dreht, das in das grössere, über welchem die Kurbel des Inductors läuft, eingesetzt ist. Dem einen dieser neueren Zeigertelegraphen ist ein Wecker, welcher auf Wechselströme anspricht, und ein Zwischenwecker (für ein an einer Stelle zwischen 2 Stationen zu gebendes Signal) beigegeben, welcher nur auf gleichgerichtete Ströme anspricht, welche man dadurch erhält, dass man die zwischen diesen liegenden entgegengesetzten Inductionsströme nicht in die Leitung eintreten lässt. Der andere ist transportabel und für Kriegszwecke zu benützen, daher in feldmässiger Verpackung. Bei einem kleinen Magnetzeiger mit blos einem Zifferblatt und um dasselbe herumstehenden Tasten endlich ist der Inductor entweder für Hand- oder für Fussbetrieb eingerichtet; jede niedergedrückte Taste wird durch eine an ihr angebrachte Schulter unter Mitwirkung einer Scheibe, auf welche eine Feder wirkt, so lange niedergedrückt erhalten, bis eine andere Taste niedergedrückt wird; endlich wird auch bei diesem Zeigerapparate die den Eintritt der Inductionsströme in die Leitung vermittelnde (mit einer Ab-

reissfeder versehene) Contactfeder von einem auf derselben Axe mit ihr steckenden Arme infolge der zwischen beiden durch Federkraft erzeugten Reibung gegen den Arbeitscontact gedrückt, während der Arm selbst durch ein eigenthümliches Gesperre mit einem von der Inductoraxe aus umgedrehten Rade verbunden ist, in dessen Stifte sich ein (auf einem an jenem Arme angebrachten Winkelhebel sitzender) um eine Axe etwas drehbarer Kegel einlegt, bis der andere Arm des Winkelhebels an den Schaft der niedergedrückten Taste stösst und dadurch der Kegel ausgehoben und nun durch eine auf seinen Rücken (ähnlich wie die Feder eines Einschlagmessers) wirkende Feder in eine Lage gebracht wird, in welcher er die Stifte des Rades frei an sich vorüber lässt.

F. Zug-Signal- und Zug-Controlapparate.

22. Der Zug-Signalapparat wird zur Benutzung durch die Fahrenden im Innern der Eisenbahnwagen angebracht. Eine straffe Leine läuft an der Innenseite der Decke jedes Wagens zwischen zwei Leisten hin, welche jedoch mit Papier überklebt sind. An einer Stelle in der Mitte jedes Coupés fehlen die Leisten, so dass man die Leine von der Seite her erfassen kann. Geschieht dies und erfolgt dann ein kräftiger Ruck an der Leine, so wird an beiden Enden des Wagens zugleich nicht nur je ein in horizontaler Lage arretirter Flügel mechanisch ausgelöst und in aufrechte Stellung gebracht, sondern auch ein Ruhestrom unterbrochen und dadurch ein elektrischer Wecker mit Selbstunterbrechung eingeschaltet; der Ruhestrom geht durch die Windungen des Wecker-Elektromagnets und dann nach einer Stellschraube, an welche sich der Anker in seiner Ruhelage anlegt, so dass bei der Unterbrechung dieses Stromes der abfallende Anker einen anderen Schluss der Batterie herstellt, in welchen der Anker selbst mit eingeschaltet ist.

23. Der Zug-Controlapparat soll die Fahr- und Aufenthaltszeit der Eisenbahnzüge registriren. Zu diesem Zwecke ist ein schwerer Körper beweglich aufgehängt, so dass er durch die Wagenerschütterung während des Fahrens in Erzitterung versetzt wird. Die Erzitterung theilt sich mechanisch einem Stift-Schreibhebel mit, welcher durch dieselbe Zeichen in einen Papierstreifen eindrückt. Dieser Papierstreifen wird aber, bevor er durch eine richtig gehende Uhr an der Schreibspitze vorübergeführt wird, erst mit einer Reihe von Führungslöchern versehen und dann auf

24. dem zugehörigen Papierstreifen-Numerirapparate mit den Stunden- und Minutenzahlen bedruckt. Die grössere Druckscheibe dieses Apparates ist am Umfange ausser mit den Stiften, welche in die Führungslöcher eingreifen, noch mit den Minutentypen 10, 20, 30, 40, 50 besetzt; an der Stelle, wo „60“ stehen würde, befindet sich ein Ausschnitt für eine kleinere Scheibe, welche auf ihrem Umfange die

Stundentypen I, II, III bis XII zeigt. Die kleinere Scheibe dreht sich bei jeder Umdrehung der grösseren genau um ein Zwölftel und bietet dann dem Streifen stets die betreffende Stundenziffer an der Stelle dar, wo in der grösseren Scheibe „60“ stehen würde.

G. Eisenbahn-Signalwesen.

25. Die Wecker für Batteriestrom mit Selbstunterbrechung, mit oder ohne Selbstausschaltung, werden entweder auf einer Stütze befestigt oder auf den Tisch gestellt; zum Theil sind sie in einen Mahagoni-Theilkasten eingeschlossen, welcher sich ganz auseinander nehmen lässt. Die Holzsockel der Kästen dieser Wecker sind so gearbeitet und die Apparattheile darauf so angeordnet, dass ein Trocknen und Schwinden des Holzes auf die Stellung des Ankers und dessen Spiel keinen Einfluss ausübt. Es sind nämlich die Schenkel des Elektromagnets an dem oberen Querstücke eines auf dem Sockel festgeschraubten gusseisernen Rahmens mittels zweier Schrauben befestigt; der vor den Polen des Elektromagnets hängende plattenförmige Anker schwingt um zwei im oberen Ende der seitlichen Ständer des Rahmens liegende Schraubenspitzen; die Abreissfeder des Ankers aber ist an einem Messingbügel angeheftet, welcher durch ein Loch in der Ankerplatte selbst und in dem Querstück des gusseisernen Rahmens hindurchreicht und mittels einer Schraube in dem letzteren verstellt und befestigt werden kann. Zum Zweck der Selbstausschaltung ist an der Ankerplatte eine Feder angebracht, welche bei ruhendem Anker an einer Stellschraube s_1 anlegt und durch diese durchgebogen wird; wird dagegen der Anker angezogen, so verlässt die Feder die Schraube s_1, richtet sich dabei gerade und legt sich schliesslich an eine zweite Stellschraube s_2 an; im ersteren Falle geht der Strom vom Anker nach s_1 und durch die Elektromagnetwindungen nach s_2, im zweiten vom Anker gleich nach s_2.

26. Die Wecker für Inductionsströme werden mittels Magnetinductoren betrieben. Bei ihnen ist der eine Pol des Elektromagnets schuhartig seitlich verlängert und inducirt den (polarisirten) Anker, dessen um Schraubenspitzen sich drehender Hauptkörper den Elektromagnetkernen parallel liegt, während von ihm ein Fortsatz zwischen die freien Enden der Kerne hineinragt und von ihnen hin und her geworfen wird, wobei der mit seinem Stiel ebenfalls am Hauptkörper sitzende Hammer abwechselnd an zwei Glocken schlägt. Diese Wecker lassen sich hängend, stehend oder seitlich an einer Wand befestigen.

27. Neben einer eisernen Läutebude mit einer Glocke und Signalscheibe und einer andern mit zwei Glocken, mit Wechselstromauslösung und mit der älteren, von Frischen vorgeschlagenen Hilfssignaleinrichtung stehen zwei neuere Eisenbahnläutesäulen, deren Anordnung von Hefner-Alteneck angegeben hat. Bei den einfacheren Läutewerken ist dem

Anker des Elektromagnetes, an dessen Verlängerung die Nase sitzt, woran der Auslösehebel des Läutewerks hängt, noch eine Remanenzfeder beigegeben, auf welche sich der das Werk wieder einrückende Hebel auflegt, um den Anker, falls derselbe durch den remanenten Magnetismus der Elektromagnetkerne zurückgehalten würde, von den Kernen loszureissen, damit er den Auslösehebel sicher fängt. Die neueren Läutesäulen sind mit dem Einradläutewerke ausgerüstet, welches blos ein Rad und das treibende Gewicht, sonst aber kein Räderwerk enthält. Das ganze Werk ist von einem cylindrischen Blechmantel eingeschlossen, welcher sich behufs einer Revision des Werkes an 3 Führungsrippen bequem herabziehen lässt. Die Glocke hängt oberhalb eines an den cylindrischen sich anschliessenden kegelförmigen Mantels, welcher mit 2 Erkern versehen ist, aus deren einem der Hammer vortritt, um die Glocke zu treffen. Auf diese Weise ist der ganz unter Dach befindliche Hammer gegen das Einfrieren gesichert. Der Hammer wird von Vorsprüngen an dem Rade mit seiner aufrechtstehenden Axe in ähnlicher Weise wie der Wecker an Schwarzwälder Uhren hin und her geworfen. Die Auslösung des Werkes erfolgt erst durch eine grössere Reihe (21) auf einander folgender Ströme von wechselnder Richtung, wodurch ein zufälliges Auslösen des Werkes, z. B. durch Gewitter, nahezu unmöglich gemacht wird. Das treibende Gewicht sinkt im Innern der Säule herab, die Säule selbst aber setzt sich als Rohr von ungefähr derselben Länge, wie die Säule, in die Erde fort; dieses Erdrohr vergrössert die Fallhöhe für das Gewicht und bildet zugleich das Fundament.

Die eine der ausgestellten Läutesäulen mit Wechselstromauslösung enthält ausser einem Blitzableiter noch eine neue Hilfssignaleinrichtung. Auf die Axe des Einradläutewerks sind nämlich 8 Schliessungsräder aufgesteckt, welche an ihrem Umfange mit verschieden gestellten, dem zu gebenden Hilfssignale entsprechenden Vorsprüngen und Einschnitten versehen sind. Der in der Leitung vorhandene galvanische Ruhestrom ist geschlossen, so lange der längere Arm eines Winkelhebels in einem der Einschnitte liegt, weil dann der den Contact machende kürzere Arm auf seinem Ambosse aufliegt, von dem er aber abgehoben wird, sobald der längere Arm auf einen Vorsprung aufläuft. Für gewöhnlich ruht der längere Arm auf einer Stelle der Axe neben den Schliessungsrädern und hält dabei den Stromkreis geschlossen. Mit den zu gebenden 8 Hilfssignalen sind 8 Schlüssel bezeichnet, die sich nur dadurch von einander unterscheiden, dass ihre Bärte in verschiedenen Abständen vom Ende des Schaftes sitzen. Wird ein solcher Schlüssel gerade so weit in das Schlüsselloch gesteckt, dass er in diesem herumgedreht werden kann, so wirkt der Schaft auf einen Seitenarm des Winkelhebels und dreht diesen gerade so weit um eine horizontale Axe, dass sein längerer Arm auf das zu diesem Schlüssel gehörige Schliessungsrad zu liegen kommt,

während beim Umdrehen des Schlüssels der Bart auf einen Riegel wirkt und durch diesen das Triebwerk ausrückt, so dass nun das Hilfssignal von dieser Säule aus in die Leitung gegeben und von Morse-Apparaten auf den Stationen derselben niedergeschrieben werden kann und so lange fortgegeben wird, bis der Schlüssel wieder umgedreht und herausgezogen wird. Die Hilfssignale werden auf der nämlichen Leitung gegeben, welche auch zum Läuten benutzt wird; damit dies geschehen kann, wird der Ruhestrom beim Umdrehen des Inductors durch diesen selbstthätig ausgeschaltet.

28. Bei den Magnetinductoren für Läutewerke liegt die Inductionsrolle (der bekannte Cylinderinductor) zwischen den Schenkeln von 4, 6, 12 oder 18 Hufeisenmagneten und sendet bei ihrer Umdrehung entweder Wechselströme oder, bei Unterdrückung der Ströme der einen Richtung, gleichgerichtete Ströme in 1 bis 4 Leitungen, und zwar durch die Vermittelung von 1 bis 4 Drucktasten, welche zur Sicherung einer guten Körperverbindung insofern eine neue Einrichtung zeigen, als die sehr massigen, mit je einer Leitung verbundenen Tastenkörper sich an den Umfang eines stärkeren isolirten Cylinders anlegen und im Ruhezustande zugleich durch Federwirkung an je einen, leitend mit je einem Apparate in Verbindung stehenden, schwächeren Metallcylinder oder eine Schiene herangezogen werden, wogegen sie beim Niederdrücken sich am Umfange des isolirten Cylinders fortwälzen und endlich mit ihrem hinteren Theile an einen ihnen allen gemeinschaftlichen schwächern Metallcylinder anlegen, welchem ein von dem Inductor kommender Draht beim Drehen des Inductors die Ströme zuführt und von welchem sie jetzt durch den Tastenkörper hindurch in die Leitung eintreten, während sie auf der andern Seite des Inductors durch einen Draht in die Erde gelangen.

H. Eisenbahn-Blocksignalsystem.

Die zu Anfang December 1870 in Berlin behufs einer Berathung über die Einführung von Blocksignalen tagende Conferenz von Eisenbahntechnikern stellte gewisse Normen für die Einführung dieser Signale auf. Zugleich tauchten manche begründete Einwürfe gegen die von Siemens & Halske in einem im October desselben Jahres erlassenen Circulare beschriebenen und im Versammlungslocal der Conferenz zur Ansicht und Prüfung ausgestellten Blockapparate auf. Infolge dessen liessen Siemens & Halske den mit vorgeschlagenen optisch-elektrischen selbstthätigen Blockapparat fallen und entwarfen auf Anregung des Oberinspectors Pörsch in Dresden Einrichtungen, welche dem Blockwärter das Geben elektrischer Signale erst ermöglicht, wenn derselbe vorher das betreffende optische Signal gegeben hat. Dabei wurde zugleich der elektrische Blocksignalapparat in einer jenen Einwürfen und den aufgestellten

Normen Rechnung tragenden Weise umgestaltet. Von diesen Umänderungen machten Siemens & Halske in einem Rundschreiben vom 1. März 1871 Mittheilung. Seitdem vervollkommneten sie ihre Blocksignale noch nach zwei Richtungen hin: 1. brachten sie die Semaphoren-Winden anstatt in elektrische (mittels Contacten erzielte), in mechanische Abhängigkeit von der Stellung des Tableau im Blockapparat, so dass der Blockwärter mit dem Deblockiren der hinter ihm gelegenen Strecke sich sein eben gegebenes optisches Haltsignal absolut feststellt; 2. ferner ermöglichten sie auf derselben Leitung, welche schon für die Blocksignale benutzt wird, ein Vorwärtswecken, d. h. eine Anmeldung des kommenden Zugs auf der in der Richtung des Zuges nächstfolgenden Station durch Klingelsignale, welche mit gleichgerichteten Inductorströmen gegeben werden und die Blocksignale ganz unverändert und unberührt lassen, da für diese Wechselströme benutzt werden.

29. Von den in Wien ausgestellten, eine zusammenhängende Linie bildenden 5 Blocksignalapparaten für eine (zweigeleisige) Eisenbahn sind die beiden äussersten als Bahnhofsapparate anzusehen, die übrigen drei sind mit (imitirten) Semaphoren versehen und mit Semaphorenarretirung ausgerüstet; der mittelste gilt als Zwischenstation, die beiden anderen als Bahnhofsdeckungsapparate. In der inneren Einrichtung stimmen die 5 Apparate, deren jeder in einen eisernen Schutzkasten eingeschlossen ist, überein, nur dass bei den Bahnhofsapparaten die durch die Semaphoren bedingten Einrichtungen fehlen. Jeder Kasten enthält zwei Apparatsätze, den einen für die nach der einen Richtung (auf dem einen Geleise), den andern für die nach der andern Richtung (auf dem andern Geleise) verkehrenden Züge. Die elektrischen Ströme für die Blocksignale werden von jeder Blockstation nach der in Bezug auf die Zugrichtung vorhergehenden oder rückwärts gelegenen Nachbarstation gesendet; infolge dessen wird das elektrische Haltsignal, welches eine mit „Halt“ beschriebene rothe Scheibe vor einem Fenster des Kastens sichtbar werden lässt, auf jeder Blockstation durch die Wechselströme erzeugt, welche nach der vorhergehenden Station gesendet werden, um daselbst das dort noch stehende Haltsignal zu beseitigen, d. h. anstatt der rothen Scheibe eine weisse, mit „Frei“ beschriebene erscheinen zu lassen; deshalb müssen in jedem Elektromagnet zwei verschiedene Wege für diese beiden durch ihn gehenden Ströme vorhanden sein, was leicht dadurch zu erreichen ist, dass entweder der eine Schenkel des Elektromagnetes in den einen, der andere in den andern Stromweg eingeschaltet wird, oder dass man jeden Schenkel mit einer doppelten Umwickelung versieht, von denen die eine dem einen, die andere dem andern Stromwege angehört. Die rothe und weisse Scheibe bilden das untere und obere Feld eines um eine horizontale Axe drehbaren Sectors, welcher sich durch sein eigenes Gewicht von oben nach unten,

durch ein unter gewissen Umständen auf denselben sich aufsetzendes Uebergewicht (oder in den neueren Apparaten durch ein das Uebergewicht ersetzendes Kästchen mit einer Feder) von unten nach oben zu drehen strebt, dies aber nur kann, wenn der als Echappement für den Sector dienende polarisirte Anker des Elektromagnetes durch eine längere Reihenfolge von Wechselströmen hin und her bewegt wird, wobei er zugleich einen Klöppel abwechselnd an 2 Glocken anschlagen lässt. Dadurch ist zugleich (wie bei 27.) das unbeabsichtigte Umstellen der Blocksignale z. B. bei Gewittern nahezu unmöglich gemacht. Die Kurbel des Inductors steht etwa in der Mitte der einen Kastenwand heraus; die Kurbeln der beiden Semaphorenwinden, mittels deren die beiden Semaphorenflügel, deren jeder zu je einer Zugrichtung gehört, dem Haltsignale entsprechend in die horizontale Lage oder dem Freisignale entsprechend schräg nach oben geneigt eingestellt werden, stehen zu beiden Seiten aus dem unteren Theil des Kastens vor. Auf jede Windenaxe ist eine Scheibe aufgesteckt, welche an der bei gegebenem Haltsignale nach oben gekehrten Stelle mit einem Ausschnitte versehen ist. Soll ein elektrisches Signal zum Deblockiren der vorhergehenden Station gegeben werden, so muss durch einen Knopf auf der Oberseite des Kastens eine Stange niedergedrückt werden, um im Innern des Kastens einen Contacthebel umzulegen, welcher bisher die in der der Zugrichtung entgegengesetzten Richtung von der Blockstation auslaufende Leitung durch den nach derselben Seite hin gelegenen Elektromagnet hindurch mit der Erde verband, jetzt aber, dieselbe Leitung durch den nach der Zugrichtung hin gelegenen Elektromagnet und den Inductor hindurch mit der Erde verbinden soll, damit auf der eigenen Station das elektrische Haltsignal, auf der vorhergehenden Station das Freisignal erscheint. Nun legt sich aber der Contacthebel auf eine zweite Stange, welche mit ihrem untern Ende auf einen durch eine kräftige Feder nach oben gedrückten Sperrkegel wirkt; dieser Sperrkegel aber stemmt sich gegen die auf der Windenaxe sitzende Scheibe und kann nur dann dem durch den Knopf auf den Contacthebel ausgeübten Drucke nachgeben, wenn der Ausschnitt der Scheibe nach oben liegt, d. h. wenn das optisch-mechanische Haltsignal (der Semaphorenflügel) gezogen ist. Somit kann jede Blockstation, wenn sie einen Zug an sich vorüberfahren lässt, die vorhergehende nicht eher deblockiren, bis sie sich selbst blockirt hat. Wird aber der in der Zugrichtung gelegene Knopf niedergedrückt, so legt sich ein lose an seiner Stange sitzendes und bisher auf einem Stifte der Stange ruhendes Uebergewicht auf einen Stift an einem Fortsatze des in seiner unteren Stellung befindlichen Sectors und letzterer geht beim Umdrehen des Inductors schrittweise in die Höhe, es erscheint also auch das elektrisch-optische Haltsignal. Dabei schnappt zugleich bei Beginn der Stromsendung durch Feder-

wirkung ein Hebel sperrend über einer Schulter an der untern Stange ein und hält durch diese Stange auch den Sperrkegel in der Windenscheibe fest, so dass der Blockwärter das Semaphoren-Haltsignal jetzt nicht wieder abstellen kann. Jener Sperrhebel ging ferner an der halb ausgeschnittenen Axe des Sectors vorüber und wird dann seinerseits bei der weiteren Drehung desselben von der Axe hinter derselben festgehalten. Der Contacthebel dagegen wird beim Loslassen des Knopfes nach Vollendung des elektrischen Haltsignals von einer kräftigen Feder an den ersten Contact zurückgeführt und nimmt dabei die obere Stange und durch diese auch das Uebergewicht wieder mit in die Höhe. Ist endlich der Zug auf der nächsten Station angelangt, so gehen die von dieser Station gesendeten Deblockirungsströme (wie schon erwähnt, auf einem andern Wege als die Blockirungsströme) durch den Elektromagnet des noch auf „Halt“ stehenden Sectors, lassen das Echappement spielen und der Sector geht, da das Uebergewicht nicht mehr auf ihm lastet, durch sein eigenes Gewicht nieder; infolge dessen zieht eine Feder den Sperrhebel an der dazu jetzt wieder in die richtige Stellung gelangten halbausgeschnittenen Axe vorbei in die Ruhelage zurück, die untere Stange kann daher in die Höhe gehen, die kräftige Feder am Sperrkegel hebt diesen aus der Scheibe aus und der Blockwärter kann jetzt auch seinen Semaphorenflügel mittels der Winde in die schräge Freistellung drehen.

Ausser der auf der Inductoraxe aufschleifenden und die Wechselströme aufnehmenden Feder schleift auf dieser Axe, und zwar an einer Stelle, wo die halbe Axe aus einem isolirenden Material hergestellt ist, noch eine zweite Feder auf, mittels deren also nur gleichgerichtete Ströme, entweder positive oder negative, von dem Inductor entsendet werden können. Dies geschieht, sobald der eine oder der andere Leitungszweig an der Stelle, wo er in die Blockstation eintritt, durch Niederdrücken des einen (und zwar des nach ihm hin gelegenen), von zwei Knöpfen von dem nach dem Contacthebel führenden Drahte gelöst und dafür unmittelbar mit einem nach jener zweiten Schleiffeder laufenden Drahte verbunden wird. Diese gleichgerichteten Ströme lassen dann auf der vorwärtsliegenden Station nur einen Wecker ertönen und melden so in dieser Station im Voraus einen nach ihr von der telegraphirenden Station abgehenden Zug an, worin eben das Vorwärtswecken besteht.

Selbstverständlich dürfen auf einer und derselben zwischen 2 Blockstationen enthaltenen Leitungsstrecke nicht gleichzeitig in beiden Richtungen Ströme gesendet werden.

Etwas anders gestaltet sich das Telegraphiren zwischen dem Bahnhofsapparate und dem zugehörigen Bahnhofsdeckungsapparate. Zwischen diesen beiden Apparaten ist eine doppelte Leitung gespannt. Die beiden Signale in der Ausfahrtsrichtung sind für gewöhnlich weiss, die

beiden in der Einfahrtsrichtung roth, der Bahnhof also für einfahrende Züge gesperrt, damit er zum Rangiren der Züge u. s. w. zu freier Verfügung steht. Beim Ausfahren drückt der Bahnhofsinspector nach dem Vorläuten auf der 2. Leitung den in der Ausfahrtsrichtung gelegenen Knopf, dreht den jetzt mit der ersten Leitung verbundenen Inductor; dadurch wird sein Ausfahrtssignal roth, der Zug fährt bis zum Deckungsapparate, hier zieht der Wärter das Semaphorensignal, drückt den in der Fahrtrichtung gelegenen Knopf dreht, den auf die zweite Leitung eingeschalteten Inductor; dadurch wird sein Signal roth, sein Flügel festgestellt und das Signal im Bahnhofsapparate wieder weiss. Beim Einfahren findet der Zug im Bahnhofsdeckungs- und im Bahnhofsapparate die Signale roth und bei ersterem den Flügel auf „Halt" festgestellt; der Deckungssignalwärter muss daher, bevor er dem Zuge das Einfahren in den Bahnhof gestatten kann, einen zur zweiten Leitung gehörigen Knopf drücken, den Inductor drehen und so beim Bahnhofsinspector läuten; will der Inspector den Zug in den Bahnhof einfahren lassen, so drückt er den in der Zugrichtung gelegenen Knopf und dreht den jetzt mit der zweiten Leitung verbundenen Inductor; dadurch werden die beiden rothen Signale in weisse umgewandelt und der Flügel der Deckungsstation wird beweglich; der Deckungssignalwärter giebt das Flügelsignal „Frei", der Zug fährt ein; darauf stellt dieser Wärter den Flügel wieder auf „Halt", drückt seinen in der Einfahrtsrichtung gelegenen Knopf und dreht den Inductor, wodurch er durch die jetzt in die erste Leitung gesendeten Ströme auf der vorhergehenden Blockstation das rothe Signal wieder weiss, sein und das Bahnhofssignal dagegen wieder roth macht, woraus der Inspector zugleich ersieht, dass der Flügel des Deckungssignals wieder auf „Halt" feststeht.

Um auch ein Ueberholen des einen Zuges durch einen zweiten in einer Blockstation nicht auszuschliessen, ist an dem Signalkasten für jede Richtung eine verschlossene Klappe vorhanden, mittels deren der Blockstations- (Bahnhofs-) Vorstand die elektrischen Signale mechanisch umwandeln kann. Ist z. B. der erste Zug in der Station eingetroffen, so blockirt sich dieselbe und deblockirt die vorhergehende; der erste Zug bleibt in der Station liegen, der zweite fährt ein; der Vorstand verwandelt sein „Halt" in „Frei", lässt den zweiten Zug fahren, blockirt sich wieder und deblockirt die vorhergehende Station; hat der zweite Zug die nächste Station erreicht, so deblockirt diese diejenige, in welcher der erste Zug noch hält; dieses „Frei"-Signal verwandelt der Vorstand wieder in „Halt" und lässt den ersten Zug abfahren.

30. Mittels des vollständigen Weichen-Centralapparates mit Weichen-Blockapparat, mit Blocksignal-Apparaten mit imitirten Semaphoren, endlich mit Weichenriegeln und Weichenhebeln ausgerüstet (System Frischen), werden in verwandter Weise,

wie bei den einfachen Blocksignalapparaten, durch einander ergänzende elektrische und mechanische Wirkungen und Sperrungen von einer Centralstelle aus die verschiedenen Semaphoren- und elektrischen Signale und die Weichen eines Bahnhofs eingestellt und in ihrer Stellung festgemacht; es ist zugleich aber auch dafür gesorgt, dass nach Einstellung eines Signals oder einer Weiche keine anderen Signale und Weichen gestellt werden können, welche den schon gestellten widersprechen und dadurch Anlass zu einem Unfall geben könnten. Mit der Verwickelung und Verallgemeinerung der Aufgabe wird natürlich auch der Apparat, durch welchen sie gelöst werden soll, umfänglicher und verwickelter, und obgleich der Grundgedanke und der zu seiner Durchführung benutzte Mechanismus eine Anwendung für alle möglichen, irgendwo wirklich vorkommenden Fälle und Anforderungen des Betriebes gestattet, so muss doch jeder einzelne Apparat dem besonderen Falle, für welchen er bestimmt ist, besonders angepasst und den eben vorliegenden Bedürfnissen entsprechend eingerichtet werden. Der ziemlich grosse ausgestellte Apparat soll folgenden Bedingungen genügen: 1. stehen die ausserhalb des Bahnhofs gelegenen (Einfahrts-) Signale auf „Halt", dann sollen die im Innern des Bahnhofs liegenden Signale dem Bahnhofsvorstand zur freien Verfügung stehen (z. B. zum Rangiren der Züge), jedoch soll dabei ebenfalls ein Zusammenstoss zweier Züge und dergleichen unmöglich gemacht sein; 2. bevor ein äusseres Signal auf „Frei" gestellt werden kann, müssen vorher alle den einfahrenden Zug möglicherweise gefährdenden Signale und Weichen im Bahnhof nicht nur richtig eingestellt, sondern auch in ihrer richtigen Stellung festgestellt werden, während alle anderen Weichen und Signale dem Vorstand zu freier Verfügung bleiben; 3. nach Einziehung des äusseren „Frei"-Signals und der Feststellung desselben auf „Halt" kann die Lösung der innerhalb des Bahnhofs liegenden Signale und Weichen von der Centralstelle jederzeit erfolgen. Die äusseren Signale sind dabei als gewöhnliche Blocksignalapparate mit Semaphorenarretirung vorausgesetzt; die inneren können vom Centralapparate aus unmittelbar gezogen werden. Die Weichen bedingen eine mechanische Verbindung mit einem neben dem Weichenhebel aufgestellten elektrischen Signalkästchen einerseits für elektrische Lösung des „Halt"-Signals und andererseits behufs der mechanischen Lösung desselben vom Centralapparate aus die Verbindung mit einer einfachen Kettentrommel.

31. Der ausgestellte elektrische Weichenblockapparat mit in der Blockleitung zum Einfahrtssignale liegenden Unterbrechungscontacten findet bei mehreren hinter einander liegenden, aber zusammengehörigen Weichen (einer Weichenstrasse) Verwendung. Denn von den Weichen einer solchen Weichenstrasse bedarf nicht jede, sondern nur die letzte eines die Einfahrt gestattenden elektrischen Signalkästchen

(wie es in 30. erwähnt wurde); die anderen Weichen dagegen werden mit Unterbrechungscontacten in der Weise versehen, dass nur bei richtiger Stellung und Feststellung der sämmtlichen Weichen eine ununterbrochene elektrische Leitung vom Centralapparate nach der Einfahrtsweiche hergestellt ist und also auch nur in diesem Falle das elektrische Signal von dieser Weiche nach dem Centralapparate gegeben werden kann.

32. Der ausgestellte vollständige Bahnhofsdeckungsapparat, bestehend aus einem Blocksignalapparat mit Wechselarretirung der Semaphorenwinden und einem Blocksignalapparat mit Arretirungsschieber als Bahnhofsapparat (System Frischen), ist für den Fall berechnet, dass 2 Geleise I und II in ein drittes III sich vereinigen. Der Arretirungsschieber gestattet dabei bei der ersten Stellung nur die Ertheilung des Einfahrtssignals an einen aus dem Geleise I kommenden Zug, bei seiner zweiten Stellung nur an einen aus dem Geleise II kommenden Zug; der Schieber wird zugleich in beiden Fällen nach Absendung des Signals festgehalten, bis der Zug auf dem Geleise III in den Bahnhof gelangt ist. Durch die Wechselarretirung der Semaphorenwinden aber wird es dem Weichen- und Signalwärter zugleich unmöglich gemacht, dass er den zweiten Flügel zum Signal „Frei“ stellt, so lange der erste noch auf „Frei“ steht, und umgekehrt; diese Arretirung wird einfach durch einen Stift vollzogen, welcher durch eine Schraube beim Drehen der Kurbel der einen Semaphorenwinde bewegt wird und sich infolge dessen sperrend in die andere Kurbel einlegt.

I. Dynamoelektrische Maschinen und elektrische Beleuchtungseinrichtungen.

33. Die mit einem parabolischen Spiegel auf einem Kugelstative versehene, sich selbst regulirende elektrische Lampe für Wechselströme steht auf einem Dreifusse. Die Wechselströme soll eine besonders für die Erzeugung elektrischen Lichts gebaute magnetoelektrische Maschine liefern. Durch die Anwendung von Wechselströmen gestaltet sich die Verbrennung der Kohlenspitzen sehr günstig. Die Lampe enthält kein Räderwerk, sondern nur ein Rad R mit feinen rechteckigen Zähnen; auf seine Axe sind die beiden Kohlenspitzenträger aufgeschraubt, von denen jedoch der eine die Mutter für eine rechtsgängige, der andere für eine linksgängige Schraubenspindel enthält, so dass sich die beiden Träger bei der Umdrehung der Axe auf dieser entweder einander entgegen oder von einander weg schrauben. In das Rad R können sich nun zwei Sperrklinken einlegen, welche jede auf eine Axe am Ende eines als polarisirter Anker für je einen Elektromagnet E_1 oder E_2 dienenden Stahl- oder Eisenstäbchens aufgesteckt sind und gegen deren

Rückseite sich eine Feder anlegt. Magnetisirt werden die beiden Stäbchen durch 2 kräftige Stahlmagnete. Durch je eine auf dasselbe wirkende Spiralfeder wird jedes Stäbchen an die eine der beiden Stellschrauben herangezogen, welche seine Schwingungen begrenzen, und kann daher überhaupt durch die Wechselströme nur zu Schwingungen zwischen den Elektromagnetpolen veranlasst werden, wenn diese Ströme eine so grosse Stärke erreicht haben, dass die durch sie auf die Stäbchen ausgeübte Anziehung die Federspannung zu überwinden vermag. Nun sind die Umwindungen desjenigen Elektromagnets E_2, welcher durch die von ihm bewegte Sperrklinke das Rad R so dreht, dass sich die Kohlenspitzen von einander entfernen, unmittelbar in den Stromkreis eingeschaltet, in welchem der Lichtbogen enthalten ist, und bestehen aus wenigen Lagen dicken Drahtes. Die aus vielen Lagen dünnen Drahtes gebildeten Umwindungen des die Kohlenspitzen einander nähernden Elektromagnetes E_1 dagegen sind in einen Nebenschluss des Lichtbogens eingeschaltet, welcher einen viel grössern Widerstand bietet, als jener Stromkreis des Lichtbogens selbst. Wenn sich nun die Kohlenspitzen einander nähern oder von einander entfernen, so wird der Widerstand in dem letztern Stromkreise kleiner oder grösser, der Widerstand in der Nebenschliessung dagegen bleibt unverändert und es wird daher gleichzeitig der durch jenen Stromkreis gehende Zweigstrom stärker oder schwächer, und der Zweigstrom in der Nebenschliessung schwächer oder stärker. Wenn also die Entfernung der Kohlenspitzen über ein gewisses, durch die Federspannung der polarisirten Anker regulirbares Mass hinaus ändert, so muss der eine oder der andere Elektromagnet zur Wirkung kommen, und zwar immer derjenige, welcher die aufgetretene Unrichtigkeit in der Entfernung der Kohlenspitzen wieder beseitigt und dieselben wieder auf die ursprüngliche Entfernung von einander zurückführt. Damit die ruhende Sperrklinke nicht etwa die arbeitende in der Umdrehung des Rades R hindere, wird jede Sperrklinke, sobald sich ihr Anker der Ruhelage nähert, dadurch aus den Zähnen des Rades R ausgehoben, dass sie mit einer schiefen Fläche auf einen am Gestell sitzenden Stift aufläuft.

34. Eine zweite, nach den Angaben von Hefner-Alteneck's construirte, selbstthätige elektrische Lampe für gleichgerichtete und für Wechselströme ist noch einfacher. Bei ihr sind die beiden Kohlenspitzen auf 2 Haltern angebracht, welche auf den einander zugewandten Seiten ihrer verticalen Schenkel mit Zahnstangen versehen sind und mit diesen auf entgegengesetzten Seiten in zwei kleine, auf dieselbe Axe fest aufgesteckte Räder eingreifen, also durch die Räder in entgegengesetztem Sinne bewegt werden. Dabei ist das eine Rädchen, und zwar dasjenige, welches beim Arbeiten mit gleichgerichteten Strömen den mit dem positiven Pole verbundenen (obern) Kohlenspitzenhalter

aufnehmen soll, etwa doppelt so gross als das andere, weil bei diesen Strömen die mit dem positiven Pole verbundene Spitze ungefähr doppelt so rasch abbrennt, als die mit dem negativen Pole verbundene; beim Arbeiten mit Wechselströmen dagegen brennen beide Spitzen gleich rasch ab und werden daher mit einem und demselben Rädchen zum Eingriff gebracht; dadurch behält der elektrische Lichtbogen seine Lage im Raume unverändert bei. Das Uebergewicht der obern Spitze und ihres Halters über die untere veranlasst die Spitzen beständig, sich einander mit einer durch einen Windflügel regulirten Geschwindigkeit zu nähern; kommen sie aber einander zu nahe, so wird der Strom so kräftig, dass ein in den Lichtbogenstromkreis eingeschalteter Elektromagnet seinen, von einer Spiralfeder gegen die Ruhe-Stellschraube gezogenen Anker anzuziehen vermag, wobei eine am obern Ende des Ankerhebels angebrachte Sperrklinke in ein Sperrrad eingreift, dasselbe um einen Zahn umdreht, dann aber sogleich wieder zurückgeht, da der Ankerhebel inzwischen einen den Elektromagnet umgehenden kurzen Stromschluss hergestellt hat. Beim Zurückgehen wird die Sperrklinke durch einen am Gestell befestigten Stift, an dem sie mit einer schiefen Fläche aufläuft, aus den Zähnen des Sperrrades ausgehoben. Das Sperrrad überträgt seine Drehung durch ein Zwischenräderpaar auf die in die erwähnten Zahnstangen eingreifenden Räder und entfernt durch diese die Spitzen ein wenig von einander. Nach dem Rückgange des Ankerhebels in die Ruhelage nimmt der Strom seinen Weg wieder durch den Elektromagnet und das Spiel wiederholt sich, bis endlich der Strom zu schwach wird, weil die Spitzen wieder in die richtige Entfernung von einander gebracht sind. Damit der Elektromagnet nicht auch den Windflügel in einer seiner gewöhnlichen Bewegung entgegengesetzten Richtung umdrehen muss, ist dessen Treibrad nur lose auf die Axe des Sperrrades aufgesteckt und wird mit dem Sperrrade nur für die Bewegung in dem einen Sinne durch einen sich in dieses einlegenden Sperrkegel gekuppelt. Beim Arbeiten mit Wechselströmen bewirken diese schon den Hin- und Rückgang des Ankers, wäre also der kurze Schluss zu entbehren. Diese Lampe (wie auch die vorhergehend erwähnte) regulirt trotz ihrer Einfachheit und Uebersichtlichkeit den Abstand der Kohlenspitzen sehr genau, was namentlich mit daher rührt, dass der Anker nicht zwei Ruhelagen (der Anziehung und des Abfallens) und zwei diesen entsprechend verschiedene Stromstärken und Lichtbogenlängen hat, letztere vielmehr blos durch das Anziehen des Ankers bedingt sind, welchem unmittelbar von selbst das Abfallen folgt. Auch ist keine Feder in dem Apparate vorhanden, welche während der Benutzung der Lampe von Zeit zu Zeit aufgezogen werden müsste. Der dafür angewendete Contact aber braucht nicht gereinigt zu werden, da an ihm keine oder nur sehr schwache Funken überspringen.

35. Die zweite der vorstehend beschriebenen Lampen wird täglich in der Maschinenhalle bei der Entwickelung elektrischen Lichtes mittels einer dynamoelektrischen Maschine zur Erzeugung starker gleichgerichteter Ströme (System von Hefner-Alteneck) benutzt. Diesen neuen Inductor kann man sich aus dem Gramme'schen entstehend denken, wenn man bei letzterem den ringförmigen Anker in der Richtung seiner Drehaxe flächenartig sich erweitern lässt und dann die Umwindungen des Kerns nicht mehr in die innere Oeffnung des Ringes hinein und durch dieselbe hindurch führt, vielmehr die Oeffnung selbst mit der Masse des Ankers ausfüllt, den ringförmigen Anker also durch einen massiven Cylinder ersetzt und die Windungen nun über diesen Cylinder hinweggehen lässt; dabei muss man den erregenden Elektromagnet ebenfalls in der Axenrichtung erweitern und verdoppelt ihn dabei zugleich. Auf diese Weise ist der an sich unwirksame innere Theil der Drahtwindungen in Wegfall gebracht und dadurch das Ganze wesentlich verkleinert worden; man kann dabei ferner zugleich auch den Anker und die ihn umgebenden Windungen auf besondere Axen stecken, indem man die massive Ankeraxe durch die hohle Axe der Windungen hindurchsteckt. Der letztere Vorzug der neuen Maschine vor der von Gramme fällt besonders bei grösseren Maschinen sehr ins Gewicht, weil man bei diesen die für ihren Betrieb erforderliche bedeutende mechanische Leistung wesentlich vermindert, wenn man die zu bewegende Masse dadurch, dass man den Anker selbst stillstehen lässt und nur die Windungen allein um ihn herum bewegt, auf die denkbar kleinste Grösse herabdrückt. Demnach sind über den massiven cylindrischen Kern oder Anker des von Hefner-Alteneck'schen Inductors eine Anzahl von Systemen von Drahtwindungen, und zwar der Länge nach (in Meridionalebenen, nicht in Ebenen, welche auf der Axe senkrecht stehen) gewickelt, in ähnlicher Weise wie bei dem Siemens-schen Cylinderinductor mit I-förmigem Kern; dabei ist aber jedes System mit den beiden benachbarten, um einen kleinen Winkel gegen das erstere geneigten Systemen leitend verbunden, so dass die ganze Umhüllung eine einzige geschlossene Leitung bildet. Von den Grenzstellen zwischen jedem Paar der Windungssysteme laufen Kupferstreifen aus und sind auf der cylindrischen Axe des Ankers als Meridiane angeordnet; auf den Kupferstreifen aber schleifen zwei sich diametral gegenüberstehende Contacte P_1 und P_2, welche demnach beständig mit einigen der Systeme in Berührung stehen. Der Anker mit seinen Windungen liegt innerhalb eines plattenförmigen Doppelelektromagnetes, dessen Pole mit hohlcylindrischen Flächen dem Anker und seinen Windungen ebenfalls in einem (aber unter etwa 90° gegen den Durchmesser der Contacte verstellten) Durchmesser gegenüberstehen. Dieser Doppelmagnet wird indess nicht durch einen seine Umwindungen durchlaufen-

den Batteriestrom magnetisch erregt, sondern durch den von ihm selbst vermöge seines remanenten Magnetismus ursprünglich inducirten Strom, wie dies auch früher schon bei dem Siemens'schen dynamoelektrischen Inductor geschah und noch geschieht, welchen Siemens unter Anderem zur Minenzündung verwendet, wobei der Strom nach einer zweimaligen Umdrehung der Inductorkurbel in die Leitung durch die hintereinander in die Leitung eingeschalteten 3 bis 4 Patronen derselben Mine gesendet wird, um dieselbe entweder durch einen überspringenden Funken oder durch Erglühen eines Drahtes zu entzünden. Wird nun der Anker sammt seiner Drahthülle oder auch nur die letztere allein um die beiden gemeinschaftliche Axe gedreht, so sucht nach den Gesetzen der Induction der äussere Elektromagnet in der Drahtumhüllung zwei entgegengesetzte Ströme zu induciren, die sich immer an den Stellen begegnen, an welchen (eben aus diesem Grunde) die beiden Contacte P_1 und P_2 angebracht wurden. Werden also an diesen Stellen die Drahtwindungen durch die Kupferstreifen und die Contacte P_1 und P_2 an eine die beiden Contacte P_1 und P_2 mit einander verbindende Leitung gelegt, so wird diese Leitung von einem aus der Vereinigung der sich bei P_1 und P_2 begegnenden Ströme entstehenden continuirlichen Strome durchlaufen, dessen Richtung mit der Umdrehungsrichtung der Drahthülle wechselt, wenn die Polarität des erregenden Magnetes die nämliche bleibt.

Ausser dieser grössern Maschine in der Maschinenhalle stehen zwei kleinere derartige Maschinen in dem eigentlichen Industriepalaste. Zwei combinirte dynamoelektrische Lichtmaschinen aber, welche auf einer Locomobile montirt und feldmässig ausgerüstet sind, wurden wiederholt zur Beleuchtung der Kuppel des Centralbaues verwendet. Bei dieser Doppelmaschine macht der Anker der kleinern Maschine etwa 1600, der Anker der grössern etwa 800 Umdrehungen in einer Minute; die Durchmesser der Riemenscheiben sind beziehungsweise 10 und 21,5 cm. Die kleinere Maschine magnetisirt den Elektromagnet der grössern Maschine. Diese wenig Raum einnehmende Maschine liefert ein Licht von 2500 bis 3000 Normalkerzen, während die viel grössere magnetoelektrische Maschine der Alliance-Compagnie in Paris nur ein Licht von 500 Kerzen liefert und mittels eines galvanischen Stroms von 60 Bunsen'schen Elementen nur eine Lichtstärke von 300 Kerzen erzielt wurde.

K. Die drei neuesten Telegraphen.

Die drei neuesten der ausgestellten Telegraphen verfolgen ein und dasselbe Ziel: die Herstellung einer automatischen Schnellschrift, und lassen die Weiterentwickelung des nämlichen Grundgedankens erkennen. Alle drei entziehen die Zeichengebung der Hand des Telegraphisten und übertragen sie einer Maschine, welche nicht wie die

Hand, bald mit mehr, bald mit weniger Geschicklichkeit begabt und ausserdem der Ermüdung ausgesetzt ist, vielmehr mit stets gleicher Regelmässigkeit die Zeichen absendet und mit einer Geschwindigkeit, welche nur durch die Fähigkeit der Linie, elektrische Ströme aufzunehmen, einer Beschränkung unterworfen ist. Alle drei Apparate sind daher mit einer Claviatur ausgestattet, auf welcher der Telegraphist nur immer die mit dem zu telegraphirenden Buchstaben oder sonstigen Zeichen beschriebene Taste mit dem Finger niederzudrücken hat. Bei den bisherigen automatischen Telegraphen wurde das abzutelegraphirende Telegramm entweder in einem Papierstreifen ausgestanzt, was zuerst Bain 1846 versuchte, und später Siemens (1853) und Wheatstone in weit vollkommenerer Weise mechanisch ermöglichten, oder aus einzelnen Typen zusammengesetzt, wie es zuerst Morse 1832 und mit besserem Erfolge Siemens (1862) zu thun sich bemühten. Dabei ist also stets ausser dem eigentlichen, das Telegramm wirklich absendenden Schriftgeber noch ein Vorbereitungsapparat nöthig, und gerade diese Vorbereitung des Telegramms ist weit umständlicher und aufhältlicher, als die eigentliche Beförderung desselben. Daher ist es ein wesentlicher Vorzug der 3 neuesten von Siemens & Halske gebauten automatischen Telegraphen, dass sie die Vorbereitung und Absendung in unmittelbarer Folge in einem und demselben Apparate gestatten. Dabei ist jedoch der gebende Theil des Apparates ohne Zusammenhang mit dem vorbereitenden; der Telegraphist kann zwischen dem Greifen der einzelnen Tasten längere oder kürzere Zeit verstreichen lassen, ohne Rücksicht auf die Länge der einzelnen telegraphischen Zeichen; denn der Apparat bereitet jedes Zeichen in der nämlichen Zeit vor und lässt auch den vorgeschriebenen Zwischenraum zwischen den einzelnen Zeichen in stets gleicher Grösse erscheinen, während die grösseren Zwischenräume am Ende eines Wortes durch Niederdrücken einer besondern weissen Taste erzeugt werden; der Telegraphist kann eine gewisse Anzahl von Tasten in Vorrath niederdrücken, welche der Apparat dann nach und nach abtelegraphirt, nur darf die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher die Tasten gegriffen werden, die Telegraphirgeschwindigkeit nicht überschreiten, auf welche der Apparat eben eingestellt ist. Da ferner die Geschwindigkeit des Telegraphirens, namentlich auf Unterseelinien, bei Verwendung von lauter kurzen Strömen wesentlich grösser ist als beim Telegraphiren mit Strömen von verschiedener Länge, so musste darnach getrachtet werden, dass zur Schriftbildung blos Ströme von gleicher Länge benutzt werden konnten. Um endlich ein Uebersetzen des Telegramms aus einer Chifferschrift in die gewöhnliche Buchstabenschrift und ein dadurch bedingtes Um- und Abschreiben desselben unnöthig zu machen, war die Aufgabe dahin zu erweitern, dass der Empfangsapparat das Telegramm selbst in gewöhnlicher Druckschrift auf einen Papierstreifen aufdruckte. Die

letztere Aufgabe löst Siemens mit seinem neuesten Schnelldrucker, welcher erst Anfang August fertig wurde und auf der Ausstellung erschien.

36. Den Dosenschnellschriftgeber für Morseschrift hat von Hefner-Alteneck entworfen. Die Tastatur enthält 49 Tasten in 7 treppenförmig über einander liegenden Reihen, und zwar sind die Buchstaben auf die Tasten so vertheilt, dass bei ungezwungener Lage der beiden Hände die am häufigsten vorkommenden Buchstaben am bequemsten zu greifen sind. Der ganze Apparat (ohne Lesepult) ist nur 21 cm. breit, 33 cm. lang und 29 cm. hoch, die Tastatur je 20 cm. lang und breit. Er lässt sich ebensowohl für gleichgerichtete Ströme, wie für Wechselströme, mit oder ohne Entladung der Leitung zur Erde, einrichten, je nachdem die Beschaffenheit der Linie, für welche er bestimmt ist, das Eine oder das Andere wünschen lässt. Im erstern Falle ist als Empfangsapparat ein guter Farbschreiber verwendbar und könnte der Dosenschriftgeber in einer damit besetzten Linie ohne Weiteres an Stelle des Morsetasters eingeschaltet werden.

Den Htheil des Apparates bildet eine auf eine horizontale Axe aufgesteckte cylindrische Dose; diese ist an ihrem ganzen Umfange mit dicht neben einander liegenden Stiften besetzt, welche sich mit einiger Reibung in ihrer Längsrichtung, d. h. parallel zur Dosenaxe ein wenig verschieben lassen. Aus diesen Stiften werden die zu der automatischen Beförderung nöthigen Typen dadurch gebildet, dass eine bestimmte Anzahl derselben und in der entsprechenden Weise gruppirt beim Niederdrücken irgend einer Taste verschoben werden; beim Telegraphiren mit gleichgerichteten Strömen (wofür der ausgestellte Schriftgeber bestimmt war) stehen dann die Stifte auf einer und derselben Seite der Dose vor, und zwar liefert 1 verschobener Stift (zwischen 2 nicht verschobenen) einen Morsepunkt, 3 verschobene (zwischen 2 nicht verschobenen) einen Morsestrich; die unverschobenen dagegen geben die Zwischenräume zwischen den einzelnen Punkten und Strichen und den ganzen Buchstaben oder Worten; so sind z. B. die einzelnen Punkte und Striche durch je einem Stifte entsprechende Zwischenräume von einander getrennt. Das Vorstossen der Stifte besorgen 19 Stösser, welche mit den Tasten nach dem zuerst von Siemens bei seinem Tastenschriftlocher zum Vorlochen der Papierstreifen verwertheten Grundgedanken verbunden sind. Es steht nämlich jede der Tasten mit je einem von 49 verticalen, dicht nebeneinander stehenden Blechstreifen der Art in Verbindung, dass letzterer beim Niederdrücken der Taste mit der einen verticalen Kante voran ein Stück vorgeschoben wird. Quer vor den vorangehenden Kanten dieser 49 Blechstreifen liegen 19 dünne horizontale Bleche, deren jedes, wenn es von einem der verticalen Bleche vorwärts geschoben wird, auf den einen Arm eines verticalen Hebels wirkt, dessen zweiter Arm dann mittels des an ihm befestigten Stössers den gerade vor diesem liegenden

Stift der Dose ein Stück aus dieser heraustreten macht. Damit nun die verticalen Bleche nicht stets alle horizontalen vorwärtsschieben, sind in den ersteren an der den letzteren zugewandten Kante verschieden lange und verschieden vertheilte Lücken eingefeilt, so dass die zwischen den Lücken stehen gebliebenen Zähne gerade nur diejenigen horizontalen Bleche treffen und vorwärtsschieben, deren Verschiebung zur Bildung des auf der eben niedergedrückten Taste geschriebenen Schriftzeichens erforderlich ist.

Beim Vorstossen der Stifte trifft ferner der erste derselben gegen die geneigte Fläche eines kleinen Sperrkegels, welcher sich in seiner Ruhelage in einen an der Dose befestigten Zahnkranz mit schrägen Zähnen einlegt und so die Dose hindert, sich, dem Zuge eines durch ein Räderwerk auf die Dose wirkenden Gewichtes (oder einer Feder) folgend, umzudrehen; wenn dagegen ein vortretender Stift den Sperrkegel aus den Zähnen des Zahnkranzes aushebt, so wird die Dose frei, dreht sich sprungweise gerade um die Länge des eben mittels der Stifte vorbereiteten Schriftzeichens nebst dem hinter demselben nöthigen Zwischenraume und bringt dadurch zugleich wieder frische, noch unverschobene Stifte vor die Stösser. Zu diesem Zwecke ist die erwähnte geneigte Fläche des Sperrkegels breiter, als die innerhalb eines Schriftzeichens vorkommenden, an der Dose durch nicht verschobene Stifte wiedergegebenen Zwischenräume; der Sperrkegel kann daher der Wirkung der ihn gegen den Zahnkranz drückenden kleinen Feder nicht früher nachgeben und sich wieder in die Zähne einlegen, als bis sämmtliche verschobene Stifte, d. h. das ganze eben vorbereitete Schriftzeichen an seiner geneigten Fläche vorübergegangen sind. Eine weitere Verbreiterung dieser Fläche sorgt endlich noch für die Zugabe des vorgeschriebenen Zwischenraums hinter dem Schriftzeichen. Hält der Telegraphist die Taste niedergedrückt, so hindern die zur Verschiebung der Stifte in die Dose hineingetretenen Stifte die Umdrehung der Dose doch nicht, weil sie etwas beweglich gemacht und an ihrem vordern Ende so geführt sind, dass sie schräg seitlich etwas ausweichen können.

Beim Niederdrücken der weissen Taste, welche, da sie blos einen Zwischenraum erzeugen soll, keine Stifte verschieben darf, wird die Drehung der Dose auf andere, rein mechanische Weise durch die Taste hervorgebracht.

Zum Abtelegraphiren der vorbereiteten Schriftzeichen dient ein zwischen zwei Contactschrauben hin- und hergehender, dem gewöhnlichen Morse-Taster ganz entsprechender zweiarmiger Contacthebel, welcher durch eine Spannfeder mit dem einen, federnden Arme an die Ruhecontactschraube herangedrückt wird. Zu diesem Zwecke läuft vor der Dose an der Seite derselben, auf welcher die Stifte vorstehen, ein Arm oder Zeiger um, welcher mit seiner nachgiebig gemachten, schräg abgestumpf-

ten Spitze die verschobenen Stifte an ihrer nach innen liegenden Rundung überstreicht, dabei in radialer Richtung hin- und hergeht und diese Schwingungen auf einen kleinen (in der auf ein und dieselbe Axe mit der Dose aufgesteckten Nabe des Zeigers befestigten) Winkelhebel überträgt, welcher seinerseits durch einen in der hohlen Zeiger- und Dosenaxe liegenden Stift auf den vor dem Ende dieser Axe liegenden Arm des Contacthebels wirkt und letzteren zwischen der Ruhe- und Arbeitscontactschraube hin- und herbewegt. Jeder einzelne vorgeschobene Stift lässt also einen kurzen, je drei hintereinander liegende Stifte lassen einen langen Strom in die Leitung senden; durch ersteren schreibt der Empfangsapparat einen Punkt, durch letzteren einen Strich.

Dazu ist aber noch nöthig, dass der Zeiger über die Stiftenreihe, welche sich ja beim Niederdrücken der Tasten selbst sprungweise bewegt, mit relativ gleicher Geschwindigkeit hinläuft. Deshalb ist die Dose nebst dem an ihr befestigten, sie treibenden Rade nur lose auf ihre im Gestell gelagerte Axe aufgesteckt, während der Zeiger, ein innerhalb der Dose gelegenes Zahnrad (welches durch mehrere in den Seitenwänden der Dose gelagerte Räder und Triebe mit einem ebenfalls fest an der Dose gelagerten Windflügel in Eingriff steht) und das eine Ende einer genügend gespannten Feder fest mit der Axe verbunden sind. In der Ruhelage hält diese Feder, deren anderes Ende am Gestell befestigt ist, den Zeiger gegen einen Anschlag fest, welcher dicht hinter der Stelle liegt, wo die Verschiebung der Stifte durch die Tasten bewirkt wird. Die sprungweise Drehung der Dose entfernt den Zeiger von diesem Anschlage und spannt so die Feder, welche dann in verhältnissmässig langsamer, gleichförmiger Bewegung den Zeiger an den vorgeschobenen Stiften vorbei gegen den Anschlag zurückführt, wobei sie durch jenes auf der Axe festsitzende Zahnrad den Windflügel in Umdrehung versetzt; die Geschwindigkeit der Zurückführung wird durch die Stellung des Windflügels bedingt und regulirt. Kurz bevor die verschobenen Stifte der Dose bei deren fortgesetzter sprungweiser Drehung wieder an die Stelle kommen, wo sie den Stössern gegenüberstehen, streifen sie an eine schräge Fläche des Gestells an und werden durch diese in ihre Ruhelage zurückgeführt. Ist der durch ein sehr rasches Greifen der Tasten erzielte Vorrath an vorbereiteten Schriftzeichen so gross, dass er fast die ganze Dose erfüllt und der Zeiger sich der zuletzt erwähnten schrägen Fläche nähert, so mahnt eine ertönende Warnglocke den Telegraphist, eine Pause zu machen.

Ein geübter Telegraphist wird leicht 5 Tasten in der Secunde greifen können; dies gäbe bei entsprechender Einstellung des gebenden Apparates und unter Einrechnung der erforderlichen Zwischenräume 300 Zeichen in 1 Minute. Wären nun zur vollständigen Erledigung eines Telegramms durchschnittlich 200 Buchstaben (33 Worte) auf der

Leitung hin und her zu befördern, so könnte man in der Stunde 90 Telegramme befördern, d. h etwa das Doppelte der mittleren Leistung des Telegraphen von Hughes. Als grösste, mittels automatischer Telegraphen erreichte Geschwindigkeit nennt man 74 Alphabete in der Secunde.

37. Der etwas früher als der Dosenschriftgeber entstandene Kettenschnellschriftgeber enthält anstatt der Dose eine Gliederkette ohne Ende mit 180 Gliedern von 2,5mm. Länge und in jedem derselben einen metallenen Stift, welcher sich seiner Länge nach in dem Gliede mit einiger Reibung nach links oder rechts verschieben lässt, weil der Kettenschriftgeber zur Erzeugung von Punkten in 2 Zeilen (Steinheilscher Schrift) bestimmt ist. Die Verschiebung der Stifte wird übrigens beim Niederdrücken der Tasten in ganz ähnlicher Weise durch eine Art von Scheeren bewirkt und natürlich sind 2 Contacthebel vorhanden, von denen der eine durch die rechts vorstehenden Stifte positive, der andere durch die links vorstehenden Stifte negative Ströme in die Leitung sendet. Diese Ströme von verschiedener Richtung schreiben in einem polarisirten Doppelschreiber die Zeichen des Steinheil'schen Alphabetes. Die Vorbereitung der abzutelegraphirenden Schriftzeichen erfolgt an einer Stelle, wo die Kette über ein Rad läuft, das Abtelegraphiren an einer andern Stelle, wo die Kette über ein zweites, mit einem Windflügel verbundenes Rad läuft; gleich hinter dieser Stelle werden die abtelegraphirten Stifte durch 2 an den beiden Seiten der Kette anstreifende Rollen wieder in ihre Ruhelage zurückversetzt. Dieser Kettenschriftgeber wird weder durch ein Gewicht, noch durch eine Feder getrieben, sondern es wird beim Niederdrücken einer Taste zugleich der erforderliche Anstoss zur Bewegung übertragen.

38. Der Schnelldrucker ist ein Typendrucktelegraph, welcher das auf einer Claviatur abgespielte und dadurch auf einer Dose mittels links und rechts aus derselben hervorgestossener Stifte vorbereitete Telegramm automatisch abtelegraphirt. Das Einstellen des Typenrades wird durch positive und negative Ströme von gleicher Länge bewirkt, von denen die einen durch die rechts aus der Dose vorstehenden, die anderen durch die links vorstehenden Stifte in die Leitung gesandt werden. Dabei ist aber ein doppeltes Echappement an dem Typenrade angebracht, und zwar dreht das durch die Ströme der einen Richtung bewegte Echappement das Typenrad sprungweise um je vier Buchstaben auf einmal fort, das durch die entgegengesetzt gerichteten Ströme bewegte Echappement dagegen lässt es nur Schritte von je einem Buchstaben machen. Da nun die Ziffern und sonstigen Zeichen gar nicht mit in die Claviatur und auf das Typenrad aufgenommen worden sind, sondern durch Buchstaben ausgedrückt werden sollen, welche in ein im Voraus bestimmtes Zeichen eingeschlossen werden, ist es möglich geworden, das Typenrad durch höchstens 8 Ströme auf jedes Schriftzeichen einzustel-

len. Dabei musste aber das 27. Feld des Typenrades leer bleiben, weil in der gewählten Weise 27 Schritte durch 8 Ströme nicht gemacht werden können, sondern erst durch 9 (6 Schritte zu je 4 und 3 Schritte zu 1 Buchstaben). Es bleiben demnach 31 Felder des Typenrades zum Geben von 29 Buchstaben und Zeichen verfügbar, weil das 30. Feld für das Einschlusszeichen der Ziffern und das 31. Feld für den durch die weisse Taste zu telegraphirenden Zwischenraum aufgespart werden muss. Dadurch, dass das Typenrad nach jedem Abdruck auf den Ausgangs- oder Nullpunkt zurückgeführt wird, ist zugleich verhütet, dass durch ein sich einschleichendes falsches Zeichen die noch nachfolgenden ebenfalls falsch gemacht werden. Die Leistungsfähigkeit dieses Schnelldruckers ist eine bedeutende, weil bei zweckmässiger Vertheilung der Punktgruppen unter die Buchstaben im Durchschnitt zur Einstellung des Typenrades nur 3 bis 4 kurze Ströme erforderlich sind* und das Drucken und die Zurückführung des Typenrades auf den Nullpunkt fast augenblicklich erfolgt.

* Unter den Typendrucktelegraphen ist mir keiner bekannt, der mit ebenso wenig Strömen die Einstellung bewerkstelligt; für den Hughes'schen rechnet man bei einem im Fingersatz geübten Telegraphist im Mittel 17 bis 18 Schritte zur Einstellung. Noch weniger Ströme zwar (nämlich höchstens 4), aber nicht weniger Schritte braucht Régnard zur Einstellung des Zeigers an seinen Zeigertelegraph (vergl. *Du Moncel, exposé des applic. de l'electr. II,* S. 77), dessen Zeiger über die in 7 Reihen angeordneten 25 Buchstaben des Zifferblattes mittels zweier, von 2 durch Elektromagnete beeinflusster Uhrwerke bewegter Kurbeln durch positive Ströme in verticaler, durch negative in horizontaler Richtung verschoben wird, und zwar um einen Schritt bei der Stromgebung und einen Schritt bei der Stromunterbrechung. Eine ungerade Schrittzahl in der einen oder andern Richtung kann dabei nur durch eine längere Dauer des letzten Stromes erzielt werden, also nicht in beiden Richtungen zugleich ausgeführt werden. Ein drittes Uhrwerk führt den Zeiger schliesslich nach jedem Zeichen wieder in die Ruhelage zurück.

Verzeichniss der Abbildungen auf Taf. VI, Fig. 1 — 7.

Figg. 1 und 2 gehören zum Universalwiderstandskasten (Nr. 3); Fig. 1 ist eine Skizze der Einschaltung für die Messung von Batteriewiderständen und Fig. 2 zeigt die Anordnung der einzelnen Theile des Universalwiderstandskastens und dessen Verwendung zur Messung eines Batteriewiderstandes r.

Fig. 3 macht die Einschaltung des Submarin-Relais (Nr. 10) in den Stromkreis der Localbatterie $B_1 B_2$ anschaulich; der Draht hh führt durch den Schreibapparat S nach dem Draht a und dem Bügel der Spule; letztere schliesst die Batteriehälfte B_1 oder B_2 durch c oder d, wenn sich ihr Contactstift s an den Contact s_1 oder s_2 anlegt.

Fig. 4 erläutert die Einschaltung des Abkürzungsrelais (Nr. 11) und der Batterien B_1 und B_2 zwischen Erde und Kabel.

Fig. 5 zeigt die Verbindung des Wecker-Elektromagnetes M im Zug-Signalapparate (Nr. 22) mit dem (Unterbrechungs-) Taster T und der Batterie B. Dabei ist $gaTbcMde$ der Ruhestromkreis, $gfscMde$ der Weckerstromkreis mit Selbstunterbrechung.

In Fig. 6 ist die Einschaltung eines Weckers mit Selbstunterbrechung und Selbstausschaltung (Nr. 25) skizzirt.

Fig. 7 zeigt die wesentlichsten Theile des Dosenschnellschriftgebers (Nr. 36), nämlich die Dose D mit den Stiften s und dem Arme i mit dem auf den Contacthebel C wirkenden Hebel O, ferner einen Stösser n am Hebel H, die 19 horizontalen Bleche Q, einen der 49 verticalen Blechstreifen S und eine Taste T.

XVII.

Grundzüge einer neuen Moleculartheorie unter Voraussetzung Einer Materie und Eines Kraftprincipes.

Von

O. Simony,

Stud. phil. in Wien.

(Hierzu Taf. VI, Fig. 8—10.)

§ 1.

Die theoretische Erklärung der an der Materie auftretenden chemischen Erscheinungen nöthigt zu der Annahme, dass diese aus discreten, mechanisch und chemisch untheilbaren Elementen von endlicher Grösse, aus Atomen bestehe. Dieselbe Voraussetzung liegt der dynamischen Gastheorie und der Undulationstheorie zu Grunde; sie kann, abgesehen von ihrer philosophischen Begründung, auch als physikalisch berechtigt angesehen werden.

Sind die Atome mechanisch und chemisch untheilbare Körper, so müssen sie ein constantes Volumen und eine unveränderliche Gestalt besitzen. Denn die Variabilität eines oder beider genannten Attribute würde die Möglichkeit einer Volumvergrösserung oder Verkleinerung involviren, welche nur durch die weitere Annahme erklärt werden könnte, dass auch das Atom aus discreten Theilchen bestehe, welche im ersten Falle von einander entfernt, im zweiten einander genähert würden, und so zu einem *regressus in infinitum* führen.

Aus der Unveränderlichkeit des Volumens und der Gestalt eines gegebenen Atoms folgt weiter, dass der von der letzteren begrenzte Raum durch dessen Substanz continuirlich ausgefüllt wird. Denn beständen innerhalb des Atoms leere Räume, so müssten hinlänglich grosse äussere Kräfte an beiden genannten Eigenschaften desselben Veränderungen hervorrufen.

Bezüglich des die einzelnen Atome Bildenden können also keine qualitativen Unterschiede existiren, insofern jede qualitative Verschiedenheit

zweier materieller Substanzen als solcher in letzter Linie lediglich durch eine verschiedene räumliche Gestaltung und Vertheilung ihrer Elemente bedingt wird; — alle Atome bestehen daher aus derselben Substanz.

Aber die Annahme von Atomen an und für sich genügt nicht, wenn aus ihrer Existenz Erscheinungen resultiren sollen; zur Erklärung der letzteren muss zu dieser ersten Hypothese noch die zweite hinzugefügt werden, dass die Atome das Vermögen besitzen, auf einander einzuwirken, d. h. dass ihnen von der Zeit unabhängige Kräfte innewohnen, aus deren Wechselwirkung schliesslich die Totalität der physikalischen und chemischen Erscheinungen hervorgeht.

Um uns über deren mathematischen Ausdruck im Allgemeinen ein Urtheil zu bilden, berücksichtigen wir zunächst, dass zwischen irgend zwei gegebenen Atomcomplexen von den Massen M_1, M_2, deren Massenmittelpunkte sich in der Entfernung R von einander befinden, eine anziehende Kraft von der Grösse

$$K = k\frac{M_1 M_2}{R^2} \tag{1}$$

wirksam erscheint. Diese Formel gilt, unseren Erfahrungen zufolge, wenigstens für solche R, welche im Vergleich zu den Dimensionen der wirkenden Complexe sehr gross sind; denn alle kosmischen Bewegungen, für welche diese Bestimmung stattfindet, werden durch die Annahme derselben genau bestimmt.

Die Erfahrung lehrt ferner, dass die Elemente jedes festen Atomcomplexes ihre einmal angenommenen Lagen verschiebenden Kräften gegenüber zu behaupten suchen, indem sie Versuchen, ihre gegenseitigen Distanzen zu vergrössern oder zu verkleinern, einen Widerstand entgegensetzen. Bei hinlänglicher Grösse der verschiebenden Kraft ist es übrigens möglich, durch eine bleibende Volumvergrösserung oder Verkleinerung die Elemente des gegebenen Complexes in neue Lagen überzuführen, welche sie dann einer weitergehenden Verschiebung (in positivem oder negativem Sinne) gegenüber in analoger Weise zu behaupten suchen, derselben im ersten Falle einen schwächeren (im Vergleiche zu ihren früheren Rückwirkungen), im zweiten einen stärkeren Widerstand entgegensetzend. Aber beide Processe haben ihre Grenze; kein fester Körper kann unter ein bestimmtes Volumen zusammengedrückt oder, ohne seinen Aggregatzustand zu ändern, über ein bestimmtes Volumen ausgedehnt werden. Die Grösse des Intervalles beider Grenzzustände hängt von seiner chemischen Zusammensetzung, also schliesslich von den Dimensionen der ihn bildenden Atome ab.

Da das allgemeine Gravitationsgesetz bezüglich der absoluten Grösse der wirkenden Massen keine beschränkenden Voraussetzungen macht, so muss es auch für irgend zwei gegebene Atome gelten, vorausgesetzt, dass die Entfernung ihrer Massenmittelpunkte im Vergleiche zu ihren räumlichen Dimensionen sehr gross ist. Nach unseren früheren Schlüssen sind alle

Atome homogene Körper von gleicher Dichte, ihre Massenmittelpunkte sind also durch die Bestimmungsstücke ihrer geometrischen Gestalt eindeutig determinirt. Nehmen wir ferner die irgend ein Atom bildende Quantität der Materie als Masseneinheit an, so erscheint auch die Masse jedes andern Atomes in Bezug auf jenes Einheitsatom als Quotient ihrer Volumina vollständig bestimmt. Bezeichnen wir also in diesem Sinne mit m_1, m_2 die Massen irgend zweier gegebenen Atome und die Entfernung ihrer Massenmittelpunkte mit r, so können wir für relativ sehr grosse Werthe von r die zwischen den Atomen thätige Kraft

$$K = \varepsilon \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{2}$$

setzen, wo ε ein vor der Hand noch unbestimmter Proportionalitätsfactor ist.

Lassen wir jedoch diese beschränkende Voraussetzung bezüglich r fallen, so muss diese Formel durch jene zweite Reihe von Thatsachen eine wesentliche Erweiterung erfahren. Den erwähnten Erfahrungen zufolge erscheint nämlich die zwischen zwei Atomen thätige Kraft anziehend oder abstossend, je nachdem wir eine durch frühere Wechselwirkung derselben gewonnene Gleichgewichtsdistanz vergrössern oder verkleinern. Die Anzahl dieser Distanzen ist endlich und steht in unmittelbarem Zusammenhange mit den Atomdimensionen. Je kleiner für irgend zwei gegebene Atome eine dieser Distanzen ist, desto intensiver erscheint die Kraftwirkung für Nachbarwerthe von r. Hieraus folgt:

Der allgemeine Ausdruck für K besteht aus zwei Factoren; der erste hat den Werth $\frac{\varepsilon m_1 m_2}{r^2}$, der zweite ist gleichfalls eine Function von r, hängt aber zugleich von den Dimensionen der wirkenden Atome ab. Er besitzt somit die allgemeine Form $\varphi(r, \alpha)$. Diese Function charakterisirt sich durch folgende Eigenschaften:

1. Sie ist eine innerhalb der Werthreihe, welche r überhaupt durchlaufen kann, continuirliche Function dieser Variabelen; denn eine etwaige Discontinuität derselben wäre mit der Stetigkeit jeder materiellen Bewegung unvereinbar.

2. Bezeichnet r_k den Werth irgend einer der erwähnten Gleichgewichtsdistanzen, h eine der Bedingung

$$0 < h < r_k - r_{k+1}$$

Genüge leistende Grösse, so muss $\varphi(r_k + h, \alpha)$ positiv, $\varphi(r_k - h, \alpha)$ negativ sein. Da jedoch der Uebergang vom Negativen in das Positive für eine continuirliche Function der das Intervall von $r_k - h$ bis $r_k + h$ stetig durchlaufenden Variabelen r nur mittels des Durchganges durch den Werth Null möglich ist, so muss für ein endliches ganzzahliges Werthsystem von k die allgemeine Relation

$$\varphi(r_k, \alpha) = 0$$

bestehen. Die Function $\varphi(r, \alpha)$ ist also eine periodische.

3. Für relativ sehr grosse Werthe von r muss sich $\varphi(r, \alpha)$ ohne merklichen Fehler durch die Einheit ersetzen lassen, also auch das Argument dieser Function sich gleichzeitig einer Constanten nähern, welcher Bedingung die allgemeine Annahme

$$\varphi(r, \alpha) = \varphi\left(\frac{\alpha}{r^n}\right)$$

genügt.

Da im Allgemeinen unter einer Reihe gleichwerthiger Hypothesen die einfachste die grösste Wahrscheinlichkeit besitzt, so ist der wahrscheinlichste Werth von n die Einheit, mit gleichzeitiger Berücksichtigung aller drei Eigenschaften somit der definitive Werth von φ

$$\varphi(r, \alpha) = \cos\frac{\alpha}{r}. \tag{3}$$

Ehe wir den allgemeinen Ausdruck für K discutiren können, sind zum Abschlusse unserer Vorbemerkungen noch drei Fragen zu erörtern, welche die Gestalt der Atome, die Bedeutung der Grössen α, ε und die Ableitung des Gravitationsgesetzes als einer nothwendigen Folge der Atomwirkungen betreffen.

Um über die erste Frage einen Aufschluss zu erhalten, berücksichtigen wir, dass die chemische Zerlegung gleicher Volumina desselben chemisch zusammengesetzten Körpers bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur erfahrungsgemäss stets dieselbe Trennungsarbeit erfordert. Ist der untersuchte Körper speciell eine binäre Verbindung erster Ordnung, so besteht irgend ein Molekül desselben aus zwei Atomen der sie bildenden Elemente, welche an irgendwelchen Oberflächentheilen an einander haften; aber auch alle übrigen Moleküle des gegebenen Complexes zeigen dieselbe Zusammensetzung, so dass lediglich die jedesmalige Lage der Berührungsstellen, verglichen mit jenen an dem zuerst betrachteten Moleküle, in der mannichfaltigsten Weise variiren kann. Ist nun die zur Auflösung gleicher Mengen dieser Moleküle nöthige Trennungsarbeit constant, so muss die zur Trennung irgend zweier ein Molekül bildenden Atome nöthige Kraft von der Lage ihrer Berührungsstellen unabhängig, ihre Wechselwirkung daher für alle Berührungsstellen dieselbe sein. Bezeichnen demnach δ, ϱ, ϱ' für irgend ein zweiatomiges Molekül den Abstand ihrer Massenmittelpunkte und die Distanzen eines in deren Verbindungslinie liegenden Berührungspunktes von jenem des ersten und zweiten Atomes, ferner δ', ϱ, ϱ'' die analogen Grössen für denselben Oberflächenpunkt des ersten und einen beliebigen andern Oberflächenpunkt des zweiten Atomes, so ist der analytische Ausdruck jener Eigenschaft

$$K = K' \text{ oder } \frac{\varphi(\delta, \alpha)}{\delta^2} = \frac{\varphi(\delta', \alpha)}{\delta'^2},$$

woraus allgemein

$$\delta = \delta' \text{ oder } \varrho' = \varrho''$$



folgt. Alle Atome besitzen also eine kugelförmige Gestalt, so dass die Grenzen für r, wenn ϱ, ϱ' die Radien der wirkenden Atome repräsentiren, im Allgemeinen

$$\varrho + \varrho' = \delta \text{ und } \infty$$

sind.

Die nächste, die Bedeutung von α und ε betreffende Frage löst sich in sehr einfacher Weise. Nehmen wir in der Verbindungslinie ihrer Massenmittelpunkte einen fixen Punkt O als Anfangspunkt der Zählung an, bezeichnen die Abstände des ersten und zweiten Atoms von demselben zu irgend einer Zeit t mit r_1 und r_2, die Constanten der Kraftäusserung des ersten Atoms auf das zweite mit $\alpha_{1,2}$, $\varepsilon_{1,2}$, des zweiten auf das erste mit $\alpha_{2,1}$, $\varepsilon_{2,1}$, so bestehen die Gleichungen

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} = \frac{\varepsilon_{2,1} m_1 m_2}{(r_2 - r_1)^2} \cos \frac{\alpha_{2,1}}{r_2 - r_1},$$

$$m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = -\frac{\varepsilon_{1,2} m_1 m_2}{(r_2 - r_1)^2} \cos \frac{\alpha_{1,2}}{r_2 - r_1}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d^2 (m_1 r_1 + m_2 r_2)}{dt^2} = \frac{m_1 m_2}{(r_2 - r_1)^2} \left(\varepsilon_{2,1} \cos \frac{\alpha_{2,1}}{r_2 - r_1} - \varepsilon_{1,2} \cos \frac{\alpha_{1,2}}{r_2 - r_1} \right),$$

also, da aus der Wechselwirkung der Bestandtheile eines materiellen Systems keine beschleunigende Kraft für seinen Schwerpunkt resultiren kann:

$$\varepsilon_{2,1} \cos \frac{\alpha_{2,1}}{r_2 - r_1} - \varepsilon_{1,2} \cos \frac{\alpha_{1,2}}{r_2 - r_1} = 0$$

oder

$$(\varepsilon_{2,1} - \varepsilon_{1,2}) + \frac{(\varepsilon_{1,2}\, \alpha_{1,2}^2 - \varepsilon_{2,1}\, \alpha_{2,1}^2)}{2!\,(r_2 - r_1)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^n (\varepsilon_{2,1}\, \alpha_{2,1}^{2n} - \varepsilon_{1,2}\, \alpha_{1,2}^{2n})}{(2n)!\,(r_2 - r_1)^{2n}} + \ldots = 0$$

für alle zwischen δ und ∞ liegenden Werthe von $r_2 - r_1$.

Diese Gleichung wird nur dann identisch erfüllt, wenn $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,1}$, $\varepsilon_{1,2}$, $\varepsilon_{2,1}$ einem der Bedingungssysteme

$$\text{A)} \begin{cases} \alpha_{1,2} = \alpha_{2,1} \\ \varepsilon_{1,2} = \varepsilon_{2,1} \end{cases}, \qquad \text{B)} \begin{cases} \alpha_{1,2} = -\alpha_{2,1} \\ \varepsilon_{1,2} = \varepsilon_{2,1} \end{cases}$$

Genüge leisten.

Da ferner r eine positive Strecke vorstellt, und nach allgemeinen Homogenitätsgesetzen Zähler und Nenner des Argumentes von $\cos \frac{\alpha}{r}$ gleichartig und von gleicher Dimension sein müssen, so können nur die Bedingungen A) erfüllt werden. Hieraus folgt, wenn wir das zwei Atomen zugehörige α kurz deren Charakteristik nennen:

Die Charakteristik zweier Atome ist eine positive, symmetrische Function ihrer Radien von der Dimension 1.

Um die allgemeine Bedeutung von ε kennen zu lernen, berücksichtigen wir, dass, wenn r das Intervall von 0 bis ∞ stetig durchläuft, für einen zwischen diesen Grenzen liegenden Werth desselben, r_ε, die Gleichung

$$4)\qquad \frac{mm'}{r_\varepsilon^2}\cos\frac{\alpha}{r_\varepsilon}=1$$

erfüllt werden wird. Setzt man

$$r_\varepsilon=\frac{\alpha}{x},\quad \frac{\alpha^2}{mm'}=\mu,$$

so kann x aus der einfacheren Gleichung

$$x^2\cos x=\mu$$

in jedem speciellen Falle durch Anwendung bekannter Näherungsmethoden berechnet werden. Seine allgemeine Form ist

$$x=2k\pi\pm\xi,\quad 0<\xi<\frac{\pi}{2},$$

und der ihr entsprechende Werth von r_ε

$$5)\qquad r_\varepsilon=\frac{\alpha}{2k\pi\pm\xi}.$$

Ist μ so klein, dass wir seine dritte und höhere Potenzen ohne merklichen Fehler vernachlässigen dürfen, so können wir, mit Zuhilfenahme der durch Reversion der Reihe

$$x^2-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{1}{24}x^6-\tfrac{1}{720}x^8+\ldots=\mu$$

für x erhaltenen allgemeinen Formel

$$x=\sqrt{\mu+\tfrac{1}{2}\mu^2+\tfrac{11}{24}\mu^3+\tfrac{47}{90}\mu^4+\ldots}$$

die Gleichung 5) durch den Näherungswerth

$$6)\qquad r_\varepsilon=(1-\tfrac{1}{4}\mu-\tfrac{13}{96}\mu^2)\sqrt{mm'}$$

ersetzen. — Substituiren wir nun r_ε für r in dem allgemeinen Ausdrucke für K, so wird

$$K=\varepsilon,$$

d. h.: ε ist die Kraft, welche beide Atome auf einander ausüben würden, wenn sich ihre Massenmittelpunkte in der Entfernung r_ε befänden. Seine Bedeutung ist eine concrete, wenn r_ε zwischen δ und ∞ liegt; für $r_\varepsilon<\delta$ erscheint ε in ähnlicher Weise als eine abstracte Grösse, wie z. B. der Elasticitätsmodul für die meisten elastischen Körper.

Alles Bisherige kurz zusammenfassend, können wir also als einfachste* Hypothese über die Constitution der materiellen Körperwelt und die in derselben auftretenden chemischen und physikalischen Erscheinungen die folgende aufstellen:

Es giebt nur Eine durch unveränderliche Atome unveränderlich existirende Materie, welche das Substrat aller

---

* Den zweiten Rang nimmt in dieser Hinsicht die Annahme

$$K=\frac{\varepsilon mm'}{r^2}\cdot\frac{r}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{r}=\frac{\varepsilon mm'}{\alpha r}\sin\frac{\alpha}{r}$$

ein.

chemischen und physikalischen Erscheinungen bildet. Atome sind chemisch und mechanisch untheilbare Kugeln von unveränderlicher Gestalt und constantem Volumen, deren Substanz den durch die erstere begrenzten Raum continuirlich ausfüllt. Es existiren daher so viele chemische Grundstoffe, als Atome von verschiedenen Radien.

Zwischen irgend zwei Atomen von den Massen m, m' und den Radien ϱ, ϱ', deren Centren sich in der Distanz r befinden, ist eine Kraft von der Form

$$K = \frac{\varepsilon m m'}{r^2} \cos \frac{\alpha}{r} \tag{7}$$

wirksam. Insofern α lediglich Function von ϱ, ϱ' ist, hat jedes gegebene Atom bezüglich desselben Einheitsatomes seine specifische Wirkungsweise.

Untersuchen wir nun noch schliesslich die Wechselwirkung, welche der Formel 7) zufolge zwei Atomcomplexe in einer relativ sehr grossen Entfernung ihrer Massenmittelpunkte auf einander äussern. Es ist sofort klar, dass, wenn wir allgemein in

$$K = \frac{\varepsilon m m'}{r^2} - \frac{\alpha^2 \varepsilon m m'}{2 r^4} + \ldots$$

alle Glieder, welche die vierte und höhere Potenzen von r im Nenner enthalten, vernachlässigen können, in dem übrig bleibenden Ausdrucke

$$K = \frac{\varepsilon m m'}{r^2}$$

auch ε von α unabhängig wird und dann seiner Bedeutung nach mit k in 1) zusammenfällt.

Wir setzen ferner voraus, dass der erste Complex a Atome von den Massen $m_1, m_2 \ldots m_a$, der zweite deren b von den Massen $m'_1, m'_2 \ldots m'_b$ enthalte, und dass die Abstände der einzelnen Atomcentren des ersten von allen Atomcentren des zweiten Complexes durch das Werthsystem

$$\begin{array}{l} r_{1,1},\ r_{1,2} \ldots r_{1,b}, \\ r_{2,1},\ r_{2,2} \ldots r_{2,b} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ r_{a,1},\ r_{a,2} \ldots r_{a,b} \end{array}$$

repräsentirt seien. Endlich seien beide Complexe auf ein fixes, dreiaxiges Coordinatensystem bezogen, die Coordinaten der Atommittelpunkte für den ersten Complex $x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \ldots x_a, y_a, z_a,$

und jene für den zweiten:

$$x'_1, y'_1, z'_1;\ x'_2, y'_2, z'_2;\ \ldots x'_b, y'_b, z'_b.$$

Wir erhalten dann für die Componenten der Beschleunigungen aller Atommittelpunkte des ersten Complexes infolge der Kraftwirkungen aller Elemente des zweiten die drei Gleichungssysteme:



$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{k\, m_1 m'_1}{r^3_{1,1}} (x'_1 - x_1) + \frac{k\, m_1 m'_2}{r^3_{1,2}} (x'_2 - x_1) + \ldots + \frac{k\, m_1 m'_b}{r^3_{1,b}} (x'_b - x_1),$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{k\, m_2 m'_1}{r^3_{2,1}} (x'_1 - x_2) + \frac{k\, m_2 m'_2}{r^3_{2,2}} (x'_2 - x_2) + \ldots + \frac{k\, m_2 m'_b}{r^3_{2,b}} (x'_b - x_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_a \frac{d^2 x_a}{dt^2} = \frac{k\, m_a m'_1}{r^3_{a,1}} (x'_1 - x_a) + \frac{k\, m_a m'_2}{r^3_{a,2}} (x'_2 - x_a) + \ldots + \frac{k\, m_a m'_b}{r^3_{a,b}} (x'_b - x_a);$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{k\, m_1 m'_1}{r^3_{1,1}} (y'_1 - y_1) + \frac{k\, m_1 m'_2}{r^3_{1,2}} (y'_2 - y_1) + \ldots + \frac{k\, m_1 m'_b}{r^3_{1,b}} (y'_b - y_1),$$

$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{k\, m_2 m'_1}{r^3_{2,1}} (y'_1 - y_2) + \frac{k\, m_2 m'_2}{r^3_{2,2}} (y'_2 - y_2) + \ldots + \frac{k\, m_2 m'_b}{r^3_{2,b}} (y'_b - y_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_a \frac{d^2 y_a}{dt^2} = \frac{k\, m_a m'_1}{r^3_{a,1}} (y'_1 - y_a) + \frac{k\, m_a m'_2}{r^3_{a,2}} (y'_2 - y_a) + \ldots + \frac{k\, m_a m'_b}{r^3_{a,b}} (y'_b - y_a);$$

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{k\, m_1 m'_1}{r^3_{1,1}} (z'_1 - z_1) + \frac{k\, m_1 m'_2}{r^3_{1,2}} (z'_2 - z_1) + \ldots + \frac{k\, m_1 m'_b}{r^3_{1,b}} (z'_b - z_1),$$

$$m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{k\, m_2 m'_1}{r^3_{2,1}} (z'_1 - z_2) + \frac{k\, m_2 m'_2}{r^3_{2,2}} (z'_2 - z_2) + \ldots + \frac{k\, m_2 m'_b}{r^3_{2,b}} (z'_b - z_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_a \frac{d^2 z_a}{dt^2} = \frac{k\, m_a m'_1}{r^3_{a,1}} (z'_1 - z_a) + \frac{k\, m_a m'_2}{r^3_{a,2}} (z'_2 - z_a) + \ldots + \frac{k\, m_a m'_b}{r^3_{a,b}} (z'_b - z_a).$$

Repräsentirt ferner $r_{c,d}$ den kleinsten, $r_{e,f}$ den grössten Werth von r für unsere zwei Complexe, so können wir

$$r_{1,1},\ r_{1,2} \ldots r_{a,b}$$

unmittelbar durch irgend einen zwischen $r_{c,d}$ und $r_{e,f}$ liegenden Werth r_m ersetzen; denn für irgend ein einem der drei Gleichungssysteme entnommenes Glied

$$\frac{M}{r^3_{p,q}}$$

folgt aus den Gleichungen

$$\frac{M}{r^3_{p,q}} = \frac{M}{(r_m \pm \mu_{p,q})^3} = \frac{M}{r^3_m} \mp \frac{3\,M\mu_{p,q}}{r^4_m} \pm \ldots$$

unter unserer ursprünglichen Voraussetzung über jedes r die Näherungsformel

$$8) \qquad \frac{M}{r^3_{p,q}} = \frac{M}{r^3}.$$

Die Anwendung von 8) auf das erste System liefert die Relationen



$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{k m_1}{r_m^3} (m'_1 x'_1 + m'_2 x'_2 + \ldots + m'_b x'_b) - \frac{k m_1 x_1}{r_m^3} (m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_b),$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{k m_2}{r_m^3} (m'_1 x'_1 + m'_2 x'_2 + \ldots + m'_b x'_b) - \frac{k m_2 x_2}{r_m^3} (m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_b)$$

. . . .

$$m_a \frac{d^2 x_a}{dt^2} = \frac{k m_a}{r_m^3} (m'_1 x'_1 + m'_2 x'_2 + \ldots + m'_b x'_b) - \frac{k m_a x_a}{r_m^3} (m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_b),$$

aus deren Addition die Formel

$$\frac{d^2 (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_a x_a)}{dt^2} = \frac{k (m_1 + m_2 + \ldots + m_a)(m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_b)}{r_m^3}$$
$$\times \left(\frac{m'_1 x'_1 + m'_2 x'_2 + \ldots + m'_b x'_b}{m'_1 + m'_2 + \ldots + m'_b} - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_a x_a}{m_1 + m_2 + \ldots + m_a} \right)$$

hervorgeht. Führen wir nach Vollendung der analogen Rechnungen für das zweite und dritte System in den Resultaten die Bezeichnungen M_1, M_2 für die Gesammtmassen des ersten und zweiten Complexes und die Coordinaten ihrer Massenmittelpunkte ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' ein, so gehen sie in die Formeln

$$M_1 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{k M_1 M_2}{r_m^3} (\xi' - \xi),$$

$$M_1 \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \frac{k M_1 M_2}{r_m^3} (\eta' - \eta),$$

$$M_1 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \frac{k M_1 M_2}{r_m^3} (\zeta' - \zeta)$$

über. Die zweite Wurzel aus der Summe der Quadrate dieser Gleichungen liefert rechts einen dem Abstande beider Massenmittelpunkte R äquivalenten Factor, links das Product aus der Masse des ersten Complexes und der Beschleunigung ihres Schwerpunktes in der Richtung von R, d. h. die aus der Wirkung des zweiten auf den ersten Complex resultirende Kraft K. Dieselbe besitzt, da nach 8) $\frac{1}{r_m^3}$ durch $\frac{1}{R^3}$ ersetzt werden kann, demnach einen mit 1) real und formal übereinstimmenden Werth, womit das Gravitationsgesetz bewiesen ist.

Die Aufstellung der drei Gleichungssysteme schliesst allerdings die Voraussetzung in sich, dass die Abstände der Atome eines und desselben Complexes unverändert bleiben, dass also dessen Elemente keine beschleunigende Wirkung aufeinander ausüben. Aber auch wenn diese beschränkende Annahme nicht gilt, bleiben die Schlussformeln vollkommen giltig. Denn da diese Beschleunigungen nur aus Kräften von der allgemeinen Form 7) hervorgehen können, so heben sich deren Componenten bei einer über alle Elemente des betreffenden Complexes ausgedehnten Summirung ihrer Bewegungsgleichungen für jede der drei Coordinatenaxen paarweise auf.

Gehen wir nun zur Betrachtung des allgemeinen Ausdruckes für K über.

§ 2.

Da für ein und dasselbe Atompaar nur r variirt, so genügt es zu einer klaren Einsicht in die allgemeine Wirkungsweise dieser Kraft, wenn wir r das Intervall von ∞ bis zu seinem kleinsten möglichen Werthe $\delta = \varrho + \varrho'$ continuirlich durchlaufen lassen und gleichzeitig die correspondirende Werthreihe von K untersuchen, welche durch die Formel 7) geliefert wird.

Für alle r, welche zwischen ∞ und $\frac{2\alpha}{\pi}$ liegen, findet eine anziehende Wirkung statt; für beide Grenzwerthe wird $K=0$, weil im ersten Falle der erste, im zweiten der zweite Factor von K verschwindet. Weil ferner mit abnehmendem r $\frac{\varepsilon m m'}{r^2}$ stetig wächst, $\cos\frac{\alpha}{r}$ stetig abnimmt, muss für einen zwischen ∞ und $\frac{2\alpha}{\pi}$ liegenden Werth von r ϱ_0 die Attraction zu einem Maximum werden. Zur Auffindung desselben bilden wir den ersten und zweiten Differentialquotienten von K nach r:

$$\frac{dK}{dr} = \frac{\varepsilon m m'}{r^3}\left(\frac{\alpha}{r}\sin\frac{\alpha}{r} - 2\cos\frac{\alpha}{r}\right),$$

$$\frac{d^2K}{dr^2} = \frac{\varepsilon m m'}{r^4}\left(6\cos\frac{\alpha}{r} - 6\frac{\alpha}{r}\sin\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha^2}{r^2}\cos\frac{\alpha}{r}\right).$$

Für $r=\varrho_0$ muss $\frac{dK}{dr}$ verschwinden, d. h. die Gleichung

$$\frac{\alpha}{\varrho_0}\, tg\, \frac{\alpha}{\varrho_0} = 2$$

oder nach der Substitution $\frac{\alpha}{\varrho_0} = \zeta_0$

$$\zeta_0\, tg\, \zeta_0 = 2$$

bestehen, aus welcher sich ζ_0 als eine zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegende Irrationalzahl ergiebt. Der ihr entsprechende Werth von r:

$$\varrho_0 = \frac{\alpha}{\zeta_0},$$

verwandelt den zweiten Differentialquotienten von K in

$$\frac{d^2K}{dr^2_{r=\varrho_0}} = -\frac{\varepsilon m m'}{\varrho_0^4}\left(6 + \frac{\alpha^2}{\varrho_0^2}\right)\cos\frac{\alpha}{\varrho_0},$$

ist also, da $\cos\frac{\alpha}{\varrho_0} = \cos\zeta_0$ positiv ist, das gesuchte Maximum.

Für das nächste Intervall von $\frac{2\alpha}{\pi}$ bis $\frac{2\alpha}{3\pi}$ ist K negativ; seine beiden Factoren nehmen numerisch anfänglich gleichzeitig zu, so dass zwischen $\frac{2\alpha}{\pi}$ und $\frac{\alpha}{\pi}$ kein Minimum von K liegt. Nimmt jedoch r unter $\frac{\alpha}{\pi}$ ab, so

wird der absolute Werth von $\cos\frac{\alpha}{r}$ bei stetiger Grössenzunahme von $\frac{\varepsilon m m'}{r^2}$ wieder kleiner; zwischen $\frac{\alpha}{\pi}$ und $\frac{2\alpha}{3\pi}$ existirt also ein Werth von r, ϱ_1, welcher sich nach Auflösung der Gleichung

$$(\pi+\zeta_1)\, tg\, \zeta_1 = 2, \quad 0 < \zeta_1 < \frac{\pi}{2}$$

in der Form

$$\varrho_1 = \frac{\alpha}{\pi+\zeta_1}$$

darstellt und, da durch seine Substitution in $\frac{d^2K}{dr^2}$ $\cos(\pi+\zeta_1)$ negativ wird, ein erstes Minimum von K, d. h. einen Punkt grösster Abstossung zwischen $\frac{2\alpha}{\pi}$ und $\frac{2\alpha}{3\pi}$ markirt. Im Abstande $\frac{2\alpha}{3\pi}$ wird K dann zum dritten Male gleich Null.

Befinden sich also allgemein die Massenmittelpunkte beider Atome in den Distanzen ∞, $\frac{2\alpha}{\pi}$, $\frac{2\alpha}{3\pi}$, so üben sie aufeinander keine beschleunigende Wirkung aus. Der erste Fall kann, streng genommen, in der Wirklichkeit nie eintreten; wir müssen also die der Entfernung $\frac{2\alpha}{\pi}$ entsprechende Lage der Atomcentren als erste und zwar als stabile Gleichgewichtslage bezeichnen, weil einerseits jede innerhalb der Grenzen $\frac{2\alpha}{\pi}$ und ∞ liegende Vergrösserung, andererseits jede zwischen $\frac{2\alpha}{\pi}$ und $\frac{2\alpha}{3\pi}$ mögliche Verkleinerung ihres Abstandes eine Rückkehr in dieselbe zur Folge hat. Erhält ferner r den Werth $\frac{2\alpha}{3\pi}$, so entspricht dieser Distanz gleichfalls eine Gleichgewichtslage, aber jede auch noch so geringe Verschiebung bewirkt sofort eine bleibende Ortsveränderung des Atoms; wir können sie kurz als erste labile Gleichgewichtslage bezeichnen.

Der weitere Gang dieser Untersuchung ist nunmehr völlig klar und liefert in algebraischer Fassung folgendes Schema:

$$r = \infty, \quad K = 0;$$

$$\infty > r > \frac{\alpha}{\zeta_0}, \quad K \text{ pos. zun.};$$

$$r = \varrho_0 = \frac{\alpha}{\zeta_0}, \quad K = \frac{\varepsilon m m'}{\alpha^2}\zeta_0^2 \cos\zeta_0 \text{ (1. Max.)};$$

$$\varrho_0 > r > \frac{2\alpha}{\pi}, \quad K \text{ pos. abn.};$$

$$r = r_0 = \frac{2\alpha}{\pi}, \quad K = 0 \text{ (1. stab. Gleichgew.)}.$$

$$r_0 > r > \frac{\alpha}{\pi + \zeta_1}, \quad K \text{ neg. zun.};$$

$$r = \varrho_1 = \frac{\alpha}{\pi + \zeta_1}, \quad K = -\frac{\varepsilon m m'}{\alpha^2}(\pi + \zeta_1)^2 \cos\zeta_1 \text{ (1. Min.)};$$

$$\varrho_1 > r > \frac{2\alpha}{3\pi}, \quad K \text{ neg. abn.};$$

$$r = r_1 = \frac{2\alpha}{3\pi}, \quad K = 0 \text{ (1. lab. Gleichgew.)}.$$

$$r_1 > r > \frac{\alpha}{2\pi + \zeta_2}, \quad K \text{ pos. zun.};$$

$$r = \varrho_2 = \frac{\alpha}{2\pi + \zeta_2}, \quad K = \frac{\varepsilon m m'}{\alpha^2}(2\pi + \zeta_2)^2 \cos\zeta_2 \text{ (2. Max.)};$$

$$\varrho_2 > r > \frac{2\alpha}{5\pi}, \quad K \text{ pos. abn.};$$

$$r = r_2 = \frac{2\alpha}{5\pi}, \quad K = 0 \text{ (2. stab. Gleichgew.)}.$$

$$r_2 > r > \frac{\alpha}{3\pi + \zeta_3}, \quad K \text{ neg. zun.};$$

$$r = \varrho_3 = \frac{\alpha}{3\pi + \zeta_3}, \quad K = -\frac{\varepsilon m m'}{\alpha^2}(3\pi + \zeta_3)^2 \cos\zeta_3 \text{ (2. Min.)};$$

$$\varrho_3 > r > \frac{2\alpha}{7\pi}, \quad K \text{ neg. abn.};$$

$$r = r_3 = \frac{2\alpha}{7\pi}, \quad K = 0 \text{ (2. lab. Gleichgew.)}$$

. . . .

Allgemein:

$$r_{2k-1} > r > \frac{\alpha}{2k\pi + \zeta_{2k}}, \quad K \text{ pos. zun.};$$

$$r = \varrho_{2k} = \frac{\alpha}{2k\pi + \zeta_{2k}}, \quad K = \frac{\varepsilon m m'}{\alpha^2}(2k\pi + \zeta_{2k})^2 \cos\zeta_{2k} \text{ [}(k+1)^{\text{tes}} \text{ Max.]};$$

$$\varrho_{2k} > r > \frac{2\alpha}{(4k+1)\pi}, \quad K \text{ pos. abn.};$$

$$r = r_{2k} = \frac{2\alpha}{(4k+1)\pi}, \quad K = 0 \text{ [}(k+1)^{\text{tes}} \text{ stab. Gleichgew.]}.$$

$$r_{2k} > r > \frac{\alpha}{(2k+1)\pi + \zeta_{2k+1}}, \quad K \text{ neg. zun.};$$

$$r = \varrho_{2k+1} = \frac{\alpha}{(2k+1)\pi + \zeta_{2k+1}}, \quad K = -\frac{\varepsilon m m'}{\alpha^2}[(2k+1)\pi + \zeta_{2k+1}]^2 \cos\zeta_{2k+1} \text{ [}(k+1)^{\text{tes}} \text{ Min.]};$$

$$\varrho_{2k+1} > r > \frac{2\alpha}{(4k+3)\pi}, \quad K \text{ neg. abn.};$$

$$r = r_{2k+1} = \frac{2\alpha}{(4k+3)\pi}, \quad K = 0 \text{ [}(k+1)^{\text{tes}} \text{ lab. Gleichgew.]}$$

. . . .

Irgend ein diesem Werthsysteme angehöriges ζ, ζ_n wird durch die Gleichung

$$(n\pi + \zeta_n)\, tg\, \zeta_n = 2, \quad 0 < \zeta_n < \frac{\pi}{2}$$

eindeutig bestimmt.

Eine einfache Rechnung lehrt, dass für $tg\,\zeta_6$, $tg\,\zeta_7 \ldots tg\,\zeta_n$ mit genügender Annäherung unmittelbar ζ_6, $\zeta_7 \ldots \zeta_n$ gesetzt werden können, indem diese Grössen, in Theilen des Radius 1 ausgedrückt, sämmtlich kleiner als 0,12217 sind, und $tg(0,12217) = 0,12278$ erst in der vierten Decimale von ihrem Argumente differirt. Für $n > 5$ liefert somit die erste Wurzel der Gleichung

$$\zeta_n^2 + n\pi\zeta_n = 2,$$

$$\zeta_n \doteq \frac{\sqrt{n^2\pi^2 + 8} - n\pi}{2}$$

bereits einen brauchbaren Näherungswerth für ζ_n.

Die den Anfangswerthen von n entsprechenden ζ sind unmittelbar aus ihren transcendenten Bestimmungsgleichungen zu rechnen und besitzen die Werthe

$$\zeta_0 = 1,0769\ldots, \qquad \zeta_3 = 0,2048\ldots,$$
$$\zeta_1 = 0,5021\ldots, \qquad \zeta_4 = 0,1560\ldots,$$
$$\zeta_2 = 0,2952\ldots, \qquad \zeta_5 = 0,1257\ldots.$$

Aus dem obigen Schema folgt ausserdem für die successiven Distanzen der ersten stabilen Gleichgewichtslage von der zweiten, a_1, der zweiten von der dritten, $a_2 \ldots$, der ersten labilen Gleichgewichtslage von der zweiten, b_1, der zweiten von der dritten, $b_2 \ldots$, das Gleichungssystem

$$a_1 = \frac{8\alpha}{5\pi}, \qquad b_1 = \frac{8\alpha}{21\pi},$$

$$a_2 = \frac{8\alpha}{45\pi}, \qquad b_2 = \frac{8\alpha}{77\pi},$$

$$a_3 = \frac{8\alpha}{117\pi} \qquad b_3 = \frac{8\alpha}{165\pi}$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$a_{k+1} = \frac{8\alpha}{(4k+1)(4k+5)\pi} \qquad b_{k+1} = \frac{4\alpha}{(4k+3)(4k+7)\pi}$$

$$\ldots\ldots; \qquad \ldots\ldots;$$

ferner für die Längen der einzelnen Attractionsstrecken l_1, $l_2 \ldots l_{k+2} \ldots$ und der ihnen entsprechenden Repulsivstrecken λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_{k+2} \ldots$

$$l_1 = \infty, \qquad \lambda_1 = \frac{4\alpha}{3\pi},$$

$$l_2 = \frac{4\alpha}{15\pi}, \qquad \lambda_2 = \frac{4\alpha}{35\pi},$$

$$l_3 = \frac{4\alpha}{63\pi} \qquad \lambda_3 = \frac{4\alpha}{99\pi}$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$l_{k+2} = \frac{4\alpha}{(4k+3)(4k+5)\pi} \qquad \lambda_{k+2} = \frac{8\alpha}{(4k+5)(4k+7)\pi}$$

$$\ldots\ldots; \qquad \ldots\ldots;$$

endlich bezüglich der relativen Verhältnisse der aufeinander folgenden ϱ, r, a, b, l, λ:

$$\frac{1}{\varrho_0} : \frac{1}{\varrho_1} : \frac{1}{\varrho_2} \ldots = \zeta_0 : (\pi + \zeta_1) : (2\pi + \zeta_2) \ldots,$$

$$\frac{1}{r_0} : \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} \ldots = 1 : 3 : 5 \ldots,$$

$$a_1 : a_2 : a_3 \ldots = 1 : \tfrac{1}{9} : \tfrac{5}{117} \ldots,$$

$$b_1 : b_2 : b_3 \ldots = 1 : \tfrac{3}{11} : \tfrac{7}{55} \ldots,$$

$$l_1 : l_2 : l_3 \ldots = \infty : \tfrac{1}{15} : \tfrac{1}{63} \ldots,$$

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 \ldots = 1 : \tfrac{3}{35} : \tfrac{1}{33} \ldots,$$

Bereits unsere einleitenden Betrachtungen haben gezeigt, dass die Elemente, durch welche die Materie für uns existirt, an sich betrachtet, nur Grössenunterschiede zeigen, durch diese jedoch nothwendig ihre verschiedene Wirkungsweise demselben Einheitsatome gegenüber begründet wird. Lassen wir nun, die Existenz einer endlichen Anzahl chemischer Grundstoffe — jeden derselben aus einer endlichen Menge congruenter Atome bestehend gedacht — voraussetzend, ihre Elemente nach diesem Kraftgesetze aufeinander einwirken, so entwickelt sich einerseits eine Fülle verschiedener Complexe, andererseits eine Mannichfaltigkeit von lediglich durch die ursprünglichen räumlichen Positionen ihrer Elemente bedingten Bewegungen.

Das erste Moment führt zu der Frage nach den Bedingungen, unter welchen in jedem speciellen Falle aus einer gegebenen Anzahl gleicher oder verschiedener Atome sich derartige Complexe bilden können, welche charakteristischen Eigenschaften sie besitzen und von welchem Standpunkte eine natürliche Classification derselben möglich ist. Dieser Gesichtspunkt wird, von gegebenen räumlichen Positionen der in Betracht gezogenen Atome ausgehend, vorwaltend an statische Verhältnisse anknüpfen und schliesslich zu einer Theorie der chemischen Verbindungen im weitesten Sinne des Wortes führen.

Der zweite mögliche Gesichtspunkt ergiebt sich, wenn wir, die specielle chemische Beschaffenheit der betreffenden Complexe erst in zweiter Reihe berücksichtigend, die ihnen allen gemeinsamen temporären Erscheinungsformen betrachten, d. h. ihre möglichen Bewegungsweisen studiren, insofern diese zufolge unserer Organisation entweder noch unmittelbar als Bewegungen ihrer discreten Elemente oder ganzer Gruppen derselben oder endlich ihrer Totalität erfasst werden. Ihm entspringt, wie jenem ersten Gesichtspunkte, eine Classification der Complexe nach ihrer chemischen Beschaffenheit und ihren Gleichgewichtsfiguren, eine Classification ihrer Wirkungen als einer Reihe verschiedener Bewegungsformen, welche, obgleich aus einem obersten Kraftprincipe ihren Ursprung nehmend, dennoch in sinnlich getrennten Wahrnehmungsgebieten ihren empirischen Ausdruck finden.

Die einfachste Methode, beiden Gesichtspunkten gerecht zu werden, besteht darin, mit der Untersuchung des einfachsten Complexes, eines Atompaares, zu beginnen und mit stetiger Bezugnahme auf die durch die physikalische und chemische Erfahrung uns aufgenöthigten Begriffe stufenweise zu complicirteren Complexen vorzuschreiten, bis sich schliesslich nicht mehr begrifflich neue, sondern nur Verallgemeinerungen der bereits gefundenen Beziehungen ergeben. Geht aus diesen Verallgemeinerungen einerseits die Möglichkeit sämmtlicher bis jetzt bekannter physikalischen und chemischen Erscheinungsreihen hervor, und lassen sich andererseits die bisher gefundenen und durch die Erfahrung bestätigten Gesetze derselben logisch streng ableiten, so hat unsere Hypothese ihren Zweck erfüllt.*

§ 3.

Die Untersuchung der bezüglich eines Atompaares möglichen Verhältnisse veranlasst vor Allem die Frage, unter welchen Bedingungen zwei Atome sich im Gleichgewichte befinden. Denken wir uns in dem Mittelpunkte des ersten Atoms den Ursprung eines rechtwinkligen dreiaxigen Coordinatensystems und bezeichnen die Coordinaten des zweiten Atomcentrums mit x, y, z, so lautet die allgemeine Gleichung, welche x, y, z im Falle des Gleichgewichts erfüllen müssen:

$$9) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2_p.$$

Construiren wir also um den Coordinatenursprung ein System concentrischer Kugelflächen mit den Halbmessern $r_0, r_1, r_2 \ldots r_p \ldots$, welche kurz als erste, zweite, dritte ... $(p+1)^{\text{te}}$ Gleichgewichtssphäre bezeichnet werden mögen, so gilt mit Rücksicht auf § 2 Folgendes:

Genügt der Quotient aus der Charakteristik zweier Atome, α, und der kleinsten möglichen Entfernung ihrer Centren, δ, der allgemeinen Relation

$$10) \qquad \frac{\alpha}{\delta} = (2p+1)\frac{\pi}{2} + \sigma, \quad 0 < \sigma < \pi,$$

so besitzen dieselben zwischen $r = \infty$ und $r = \delta$ $p+1$ Gleichgewichtssphären, d. h. sie verbleiben in Ruhe, so oft der Mittelpunkt des einen Atoms in irgend einem Oberflächenpunkte einer Gleichgewichtssphäre des andern liegt. Ihr Gleichgewicht ist stabil oder labil, je nachdem der Index dieser Sphäre (bei einer jener in § 2 gleichen Zählweise) gerade oder ungerade ist.

Uebrigens erscheint die Stabilität für keinen Werth von r als eine unbedingte; denn befindet sich das Atompaar allgemein in der $(m+1)^{\text{ten}}$ stabilen Gleichgewichtslage $(r_{2m} > \delta)$, so darf — soll überhaupt eine Rückkehr in dieselbe erfolgen — der Abstand beider Mittelpunkte, r_{2m}, durch

* Dass dieselbe jede lediglich materialistische Weltanschauung ausschliesst, wird von dem Verfasser in einer eigenen Abhandlung nachgewiesen werden.

eine wie immer hervorgerufene Verschiebung eines oder beider Atome weder auf $r_{2m} + l_{m+1}$ vergrössert, noch bis $r_{2m} - \lambda_{m+1}$ verkleinert werden.

Im ersten Falle bleiben die Atome in der gewonnenen m^{ten}, im zweiten in der $m+1^{ten}$ labilen Gleichgewichtslage.

Eine den Abstand der Atome noch über die angeführten Grenzen vergrössernde oder verkleinernde Verschiebung führt sie analog in die m^{te} oder $m+2^{te}$ stabile Gleichgewichtslage über.

Da mit wachsendem m die ihm zugehörigen l, λ fortwährend abnehmen, so veranlassen gleiche Verschiebungen um so eher einen Wechsel der Gleichgewichtslagen, je grösser der Index der letzteren ist.

Nur auf der Oberfläche einer Gleichgewichtssphäre kann ein Atom ohne Störung des Gleichgewichts und ohne Arbeitsleistung um jede beliebige Strecke verschoben werden.

Es bietet nun keine Schwierigkeiten dar, diese Erscheinungen mit Hilfe einiger empirischer Begriffe kurz zusammenzufassen, indem die auf S. 464 erwähnten empirischen Thatsachen dem eben Gesagten zufolge bereits für diesen elementaren Complex ihre Giltigkeit haben. Wir erhalten so den Satz:

Ein aus zwei beliebigen Atomen gebildetes materielles System kann sich in einer endlichen Anzahl stabiler Gleichgewichtsdistanzen seiner Bestandtheile Bewegungskräften gegenüber, welche deren Abstand zu vergrössern oder zu verkleinern suchen, entweder vollkommen elastisch oder dehnbar oder zusammendrückbar verhalten.

Insofern bei der Verschiedenheit von α und δ für verschiedene Atome zugleich die Zahl der jedesmaligen stabilen Gleichgewichtsdistanzen und die zugehörigen l, λ vielfachen Aenderungen unterliegen, zeigen verschiedene Complexe in verschiedenen Gleichgewichtslagen denselben Bewegungskräften gegenüber charakteristische Elasticitätsverhältnisse. Nur die relativen Verhältnisse der aufeinander folgenden ϱ, r, a, b, l, λ sind völlig unabhängig von α und δ.

Alle bisherigen Schlüsse wurden unter der Voraussetzung abgeleitet, dass $\frac{\alpha}{\delta}$ für kein Atompaar kleiner als $\frac{\pi}{2}$ wird. Findet dieser Fall statt, so kann nur für $r = \delta$ ein Gleichgewichtszustand eintreten, woran sich von selbst die Frage knüpft, welche Verhältnisse diesem Werthe im Allgemeinen entsprechen.

Besitzt r den Werth δ, so sind nur vier Fälle denkbar:

1. K positiv,
2. K gleich Null durch Uebergang aus dem Positiven,
3. K negativ,
4. K gleich Null durch Uebergang aus dem Negativen.

Welcher derselben eintritt, hängt von dem Argumente der periodischen Function ab; im ersten, zweiten und vierten Falle bleiben die sich berüh-



renden Atome mit einander verbunden — sie bilden ein zweiatomiges Molekül; im dritten Falle erfolgt augenblickliche Trennung derselben. Diese Verhältnisse erlauben eine doppelte Gliederung, je nachdem wir sie auf zwei congruente Atome desselben Elementes oder auf ein zwei verschiedenen Grundstoffen entnommenes Atompaar anwenden, und lassen sich in folgenden Sätzen ausdrücken:

Ein Atom ist in Bezug auf ein zweites Atom desselben oder eines zweiten chemischen Elementes chemisch verwandt oder chemisch inactiv, je nachdem ihr charakteristischer Quotient die Form

$$\frac{\alpha}{\delta} = 2n\pi \pm \tau, \quad 0 < \tau \leqq \frac{\pi}{2} \tag{11}$$

oder

$$\frac{\alpha}{\delta} = (2n + \tfrac{1}{2})\,\pi + \tau', \quad 0 < \tau' < \pi \tag{12}$$

besitzt. Während also die zweite Relation eine chemische Verbindung derselben unmöglich macht, begründet das Zutreffen der ersten für zwei congruente Atome eine allotrope Modification erster Ordnung desselben Elements, für zwei verschiedene Atome eine binäre Verbindung erster Ordnung dieser heterogenen Grundstoffe.

Ein so entstandenes zweiatomiges Molekül ist dann stabil oder labil, je nachdem in 11) τ kleiner oder gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Dasselbe wird daher, wenn nicht speciell

$$\frac{\alpha}{\delta} = (2n - \tfrac{1}{2})\,\pi \tag{13}$$

ist, jedem Versuche, es zu zerlegen, einen gewissen Widerstand entgegensetzen, indem alle Verschiebungen seiner Atome innerhalb der Grenzen ihrer letzten Attractionsstrecke ihren ursprünglichen Zusammenhang nur temporär aufheben können. Hieraus folgt:

Die bleibende Auflösung eines zweiatomigen Moleküls erfordert zur Ueberwindung des Verbindungswiderstandes seiner Bestandtheile eine endliche Trennungsarbeit, deren Grösse von der jedesmaligen Lage ihres Berührungspunktes unabhängig ist. Ihr absoluter Werth erscheint, weil zugleich mit τ veränderlich, für verschiedene Verbindungen verschieden und liefert somit ein Mass zur Beurtheilung des Grades der chemischen Affinität ihrer Atome.

Es erübrigt jetzt noch die Betrachtung der für ein Atompaar möglichen Bewegungserscheinungen, welche aus gegebenen räumlichen Positionen seiner Bestandtheile hervorgehen können. Dieselben finden durch die Lösung zweier Probleme ihre Erledigung, deren analytische Untersuchung den Inhalt der zwei folgenden Paragraphen bildet.



§ 4.

A. Die Mittelpunkte zweier Atome von den Massen m_1, m_2 und der Charakteristik α befinden sich ursprünglich in irgend einer stabilen Gleichgewichtslage, so dass sie anfänglich von einem fixen Punkte O ihrer verlängerten Centrallinie die Abstände ϱ_1, ϱ_2 besitzen und deren Differenz die allgemeine Relation

$$14)\qquad \varrho_2 - \varrho_1 = \frac{2\alpha}{(4k+1)\pi} = \varkappa$$

befriedigt. Für $t=0$ erhält ihre Distanz infolge einer relativ sehr kleinen Verschiebung σ_2 des zweiten Atomcentrums in der Richtung der Centrale den Werth $\varkappa + \sigma_2$; welche Bewegungserscheinungen zeigen beide Atome zu irgend einer Zeit t?

Bezeichnen wir die diesem Zeitpunkte entsprechenden variabeln Verschiebungen des ersten und zweiten Atoms mit s_1 und s_2, so bestehen für dieselben die Gleichungen

$$15)\qquad \left\{ \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} &= \frac{\varepsilon m_1 m_2}{(\varkappa + s_2 - s_1)^2} \cos \frac{\alpha}{\varkappa + s_2 - s_1}, \\ m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} &= -\frac{\varepsilon m_1 m_2}{(\varkappa + s_2 - s_1)^2} \cos \frac{\alpha}{\varkappa + s_2 - s_1}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus folgt, da s_1, s_2 zu Beginn der Zeit t constant sind, also $\frac{ds_1}{dt}$, $\frac{ds_2}{dt}$ für $t=0$ verschwinden, durch zweimalige Integration ihrer Summe

$$16)\qquad m_1 s_1 + m_2 s_2 = m_2 \sigma_2.$$

Andererseits liefert die Subtraction der durch m_1, m_2 dividirten Bewegungsgleichungen unter Einführung der Abkürzungen

$$17)\qquad s_2 - s_1 = \xi, \quad m_1 + m_2 = M;$$

$$18)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\varepsilon M}{(\varkappa+\xi)^2} \cos \frac{\alpha}{\varkappa+\xi}.$$

Bei der Kleinheit von ξ können seine zweite und höhere Potenzen vernachlässigt werden; wir dürfen demnach

$$\frac{1}{(\varkappa+\xi)^2} \text{ durch } \frac{1}{\varkappa^2} - \frac{2\xi}{\varkappa^3}$$

und, da $\cos\frac{\alpha}{\varkappa} = 0$, $\sin\frac{\alpha}{\varkappa} = 1$ sind:

$$\cos\frac{\alpha}{\varkappa+\xi} = \cos\left(\frac{\alpha}{\varkappa} - \frac{\alpha\xi}{\varkappa^2}\right) \text{ durch } \frac{\alpha}{\varkappa^2}\xi$$

ersetzen und erhalten dann die einfache Gleichung

$$19)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\alpha\varepsilon M}{\varkappa^4}\xi,$$

deren allgemeines Integral bekanntlich die Form

20) $$\xi = A \cos \mu t + B \sin \mu t, \quad \mu = \frac{\sqrt{\alpha \varepsilon M}}{\varkappa^2}$$

besitzt und unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$$\xi = \sigma_2, \quad \frac{d\xi}{dt} = 0 \text{ für } t = 0$$

als zweite Bestimmungsgleichung für s_1, s_2 liefert

21) $$s_2 - s_1 = \sigma_2 \cos \mu t.$$

Die Auflösung der Gleichungen 16) und 21) führt zu den Resultaten

$$s_1 = \frac{m_2 \sigma_2}{M}(1 - \cos \mu t), \quad s_2 = \frac{(m_2 + m_1 \cos \mu t)}{M} \sigma_2,$$

durch deren Differentiation wir zugleich zur Kenntniss der den Verschiebungen s_1, s_2 entsprechenden Geschwindigkeiten v_1, v_2 gelangen. So ergeben sich die Formeln

22) $$\begin{cases} s_1 = \dfrac{2 m_2 \sigma_2}{M} \sin^2 \dfrac{\mu}{2} t, & v_1 = \dfrac{m_2 \mu \sigma_2}{M} \sin \mu t; \\ s_2 = \sigma_2 \left(1 - \dfrac{2 m_1}{M} \sin^2 \dfrac{\mu}{2} t\right), & v_2 = -\dfrac{m_1 \mu \sigma_2}{M} \sin \mu t. \end{cases}$$

Aus 19) und 22) lassen sich folgende Consequenzen ziehen:

Ertheilt man einem Atom eines in Ruhe befindlichen Atompaares eine relativ sehr kleine Verschiebung in der Richtung seiner Centrallinie, so ist die derselben entgegenwirkende Kraft ihrem absoluten Werthe gerade, der vierten Potenz des ursprünglichen Abstandes der Atome verkehrt proportional.

Da der Coefficient von ξ aus zwei Theilen, einem von den Radien und Massen der wirkenden Atome abhängigen, für dasselbe System constanten Factor

$$\frac{\varepsilon M \pi^4}{16 \alpha^3}$$

und einer Function des Index der betreffenden stabilen Gleichgewichtslage

$$(4k + 1)^4$$

besteht, so erfüllen die gleichen Verschiebungen ξ aus den aufeinanderfolgenden $r_0, r_2, r_4 \ldots r_{2k} \ldots$ entsprechenden Kräfte $K_0, K_2, K_4 \ldots K_{2k} \ldots$ die Proportionen

23) $$K_0 : K_2 : K_4 \ldots : K_{2k} \ldots = 1 : 625 : 6561 \ldots : (4k + 1)^4 \ldots.$$

Sich selbst überlassen, vollführen beide Atome Schwingungen von gleicher Dauer τ, folglich auch in gleicher Zahl n nach den Formeln

24) $$\tau = \frac{2\pi}{\mu}, \quad n = \frac{\mu}{2\pi},$$

die Schwingungsanzahl wächst also mit $\varkappa$ im verkehrten quadratischen Verhältnisse.

Die aus den Gleichungen 22) für die numerischen Maxima und Minima der Grössen $s_1, s_2; v_1, v_2; s'_1, s''_1; s'_2, s''_2; v'_1, v''_1; v'_2, v''_2$ ableitbaren Ausdrücke

$$25)\quad \left\{\begin{array}{ll} s'_1=\dfrac{2m_2\sigma_2}{M},\ s''_1=0; & v'_1=\dfrac{m_2\mu\sigma_2}{M},\ v''_1=0;\\[2ex] s'_2=\sigma_2,\ s''_2=\dfrac{m_2-m_1}{M}\sigma_2; & v'_2=\dfrac{m_1\mu\sigma_2}{M},\ v''_2=0 \end{array}\right.$$

lehren ferner, dass die mit dem Schwerpunkte des Systems um

$$26)\qquad S=\frac{m_2}{M}\sigma_2$$

verschobenen stabilen Gleichgewichtslagen zugleich die durch die Maxima der Geschwindigkeiten v'_1, v'_2 charakterisirten Schwingungscentren beider Atome und deren Amplituden s'''_1, s'''_2 zu beiden Seiten dieser Centren gleich sind.

Jene die allgemeinen Bewegungsphasen derselben bestimmenden Relationen erhalten daher ihre einfachste Gestalt, wenn wir die Schwingungen des ersten und zweiten Atoms durch ihre periodisch sich ändernden Entfernungen d_1, d_2 von jenen Schwingungscentren charakterisiren und die Zeiten erst von dem Momente an zählen, in welchem das zweite Atom seinen Schwingungsmittelpunkt mit der positiven Geschwindigkeit v'_2 passirt. So ergeben sich die endgiltigen Formeln*

$$27)\quad \left\{\begin{array}{lll} d_1=s'''_1\sin\dfrac{2\pi}{\tau}(t'-t''), & t'=t-\dfrac{3\pi}{2\mu}, & s'''_1=\dfrac{m_2}{M}\sigma_2;\\[2ex] d_2=s'''_2\sin\dfrac{2\pi}{\tau}t', & t''=\tfrac{1}{2}\tau=\dfrac{\pi}{\mu}, & s'''_2=\dfrac{m_1}{M}\sigma_2. \end{array}\right.$$

Die den Bewegungsphasen des zweiten Atoms für

$$t'=0,\quad \frac{\tau}{4},\quad \frac{\tau}{2},\quad \frac{3\tau}{4}\ldots$$

correspondirenden des ersten finden also erst für

$$t'=\frac{\tau}{2},\quad \frac{3\tau}{4},\quad \tau,\quad \frac{5\tau}{4}\ldots$$

---

* Aehnliche Resultate liefern, wenn a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 die ursprünglichen Coordinaten der Atome, $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Componenten der relativ sehr kleinen Verschiebung σ_2 des zweiten sind, deren Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=-a\Omega,\quad \frac{d^2\eta}{dt^2}=-b\Omega,\quad \frac{d^2\zeta}{dt^2}=-c\Omega,$$

$$\Omega=\frac{\alpha\varepsilon M}{\varkappa^6}(a\xi+b\eta+c\zeta),$$

in welchen a, b, c; ξ, η, ζ die Differenzen a_2-a_1, b_2-b_1, c_2-c_1; $\xi_2-\xi_1$, $\eta_2-\eta_1$, $\zeta_2-\zeta_1$ vorstellen. Die linearen Schwingungen beider Atome finden in der durch die Relationen

$$x'=\frac{a+\alpha_2}{c+\gamma_2}z'+\frac{a_1(c_2+\gamma_2)-c_1(a_2+\alpha_2)}{c+\gamma_2},$$

$$y'=\frac{b+\beta_2}{c+\gamma_2}z'+\frac{b_1(c_2+\gamma_2)-c_1(b_2+\beta_2)}{c+\gamma_2}$$

statt, und ihre Amplituden verhalten sich verkehrt wie die Massen der wirkenden Atome, so dass bezüglich des ersten Atoms einerseits eine Verspätung der Schwingungsphasen um $\frac{\tau}{2}$, andererseits eine Veränderung ihrer Amplituden eintritt.

Für $m_1 > m_2$ findet eine Schwächung, für $m_1 < m_2$ eine Verstärkung derselben statt und nur bei congruenten Atomen pflanzen sich die Bewegungsphasen ungeschwächt fort.

Wir können aber nach den Gleichungen 27) denselben Bewegungszustand auch dadurch hervorrufen, dass wir für $t' = 0$ dem ersten Atom die Geschwindigkeit $-v'_1$, dem zweiten v'_2 in der Richtung der Centrallinie, dem ganzen System also die lebendige Kraft

$$28)\qquad \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2} = \frac{2\pi^2}{\tau^2}(m_1 s'''^2_1 + m_2 s'''^2_2) = C$$

ertheilen. Den allgemeinen Werthen von v_1, v_2:

$$v_1 = -\frac{2\pi}{\tau} s'''_1 \cos\frac{2\pi}{\tau} t', \quad v_2 = \frac{2\pi}{\tau} s'''_2 \cos\frac{2\pi}{\tau} t',$$

entspricht als gesammte lebendige Kraft des Systems zu derselben Zeit t' der Werth

$$29)\qquad \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{2\pi^2}{\tau^2}(m_1 s'''^2_1 + m_2 s'''^2_2) \cos^2\frac{2\pi}{\tau} t'.$$

Die von $t' = 0$ bis $t' = t'$ durch die periodischen Verschiebungen beider Atome geleistete Arbeit hat, da nach 19) die irgend einer relativ sehr kleinen Verschiebung d einer Masse m entgegenwirkende Kraft gleich $-m\mu^2 d$ ist, die Grösse

---

bestimmten Geraden statt, welche die Punkte (a_1, b_1, c_1) und $(a_2 + \alpha_2, b_2 + \beta_2, c_2 + \gamma_2)$ mit einander verbindet.

Die Coordinaten ihrer Schwingungscentren erhalten nach Einführung des Winkels λ, welchen die Verbindungslinie der Punkte (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) mit σ_2 bildet, die Werthe

$$x'_1 = a_1 + \frac{m_2}{M}\frac{a\sigma_2\cos\lambda}{\varkappa}, \quad x'_2 = a_2 + \alpha_2 - \frac{m_1}{M}\frac{a\sigma_2\cos\lambda}{\varkappa},$$

$$y'_1 = b_1 + \frac{m_2}{M}\frac{b\sigma_2\cos\lambda}{\varkappa}, \quad y'_2 = b_2 + \beta_2 - \frac{m_1}{M}\frac{b\sigma_2\cos\lambda}{\varkappa},$$

$$z'_1 = c_1 + \frac{m_2}{M}\frac{c\sigma_2\cos\lambda}{\varkappa}, \quad z'_2 = c_2 + \gamma_2 - \frac{m_1}{M}\frac{c\sigma_2\cos\lambda}{\varkappa},$$

liegen also im Abstande $\varkappa$ von einander.

Endlich folgen für ihre auf diese Punkte bezogenen Verschiebungen die Formeln

$$d_1 = \frac{m_2}{M}\sigma_2\cos\lambda\sin\frac{2\pi}{\tau}(t' - t''), \quad d_2 = \frac{m_1}{M}\sigma_2\cos\lambda\sin\frac{2\pi}{\tau}t',$$

deren Gleichartigkeit mit den Ausdrücken in 27) evident ist.

30)
$$\Pi = \int_0^{t'} m_1 \mu^2 d_1 d(d_1) + \int_0^{t'} m_2 \mu^2 d_2 d(d_2)$$
$$= \frac{\mu^2}{2} (m d_1^2 + m_2 d_2^2) = \frac{2\pi^2}{\tau^2} (m_1 s'''^2_1 + m_2 s'''^2_2) \sin^2 \frac{2\pi}{\tau} t'.$$

Somit resultirt aus 28), 29) und 30)

31)
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \Pi = C,$$

d. h.: die bei der Fortpflanzung der Schwingungsphasen des zweiten Atoms auf das erste bei einer Verschiedenheit ihrer Massen auftretende Schwächung oder Verstärkung ihrer Amplituden erfolgt stets nach dem Gesetze der Erhaltung der Kraft.

Was schliesslich die mittleren Energien i_1, i_2 des ersten und zweiten Atoms während einer Schwingungsdauer anbelangt, so liefert die Anwendung der Gleichungen

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \cos^2 \frac{2\pi}{\tau} t' \, dt' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du = \tfrac{1}{2},$$
$$m_1 s''_1 = m_2 s''_2$$

für dieselben die einfachen Beziehungen

32)
$$i_1 = \frac{\pi^2}{\tau^2} m_1 s'''^2_1, \quad i_2 = \frac{\pi^2}{\tau^2} m_2 s'''^2_2, \quad i_1 : i_2 = s'''_1 : s'''_2,$$

d. h.: die Schwingungsintensitäten beider Atome verhalten sich wie ihre Amplituden.

Die Formeln 19) bis 31) wurden unter der Annahme abgeleitet, dass K für $\varrho_2 - \varrho_1$ verschwindet, und verlieren ihre Giltigkeit, wenn $\varkappa = \delta$ ist und K einen positiven Werth besitzt. — Die zur Bestimmung von ξ dienende Differentialgleichung erhält in diesem Falle die Form

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{\varepsilon M}{\delta^2} \cos\frac{\alpha}{\delta} - \frac{\varepsilon M}{\delta^3}\left(\frac{\alpha}{\delta}\, tg\, \frac{\alpha}{\delta} - 2\right) \cos\frac{\alpha}{\delta}\, \xi.$$

Da δ, soll das Atompaar wenigstens Eine stabile Gleichgewichtslage besitzen, stets kleiner als $\frac{2\alpha}{\pi} = 0{,}6366\alpha$ bleiben muss, $\frac{\alpha}{\delta}\, tg\, \frac{\alpha}{\delta}$ aber für alle zwischen 0 und $0{,}9286\alpha$ liegenden Werthe von δ grösser als 2 ist, so dürfen wir den Coefficienten von ξ als eine wesentlich positive Grösse betrachten, d. h. in der abgekürzten Relation

33)
$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2\xi}{dt^2} = -a^2 - b^2\xi, \\ & a^2 = \frac{\varepsilon M}{\delta^2} \cos\frac{\alpha}{\delta}, \quad b^2 = \frac{\varepsilon M}{\delta^3}\left(\frac{\alpha}{\delta}\, tg\, \frac{\alpha}{\delta} - 2\right) \cos\frac{\alpha}{\delta} \end{aligned} \right.$$

b als eine reelle Zahl voraussetzen. Die Integration derselben liefert unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen für $t=0$

$$\xi=\sigma_2, \quad \frac{d\xi}{dt}=0:$$

$$\xi=\left(\sigma_2+\frac{a^2}{b^2}\right)\cos bt-\frac{a^2}{b^2},$$

also in Combination mit der Formel 16) für $s_1, v_1; s_2, v_2$ die Ausdrücke

$$34)\quad \begin{cases} s_1= \frac{2m_2}{M}\left(\sigma_2+\frac{a^2}{b^2}\right)\sin^2\frac{b}{2}t, & v_1= \frac{bm_2}{M}\left(\sigma_2+\frac{a^2}{b^2}\right)\sin bt, \\ s_2=\sigma_2-\frac{2m_1}{M}\left(\sigma_2+\frac{a^2}{b^2}\right)\sin^2\frac{b}{2}t, & v_2=-\frac{bm_1}{M}\left(\sigma_2+\frac{a^2}{b^2}\right)\sin bt. \end{cases}$$

Dieselben gelten, weil ξ bei der Unveränderlichkeit von δ nie negativ werden kann, nur so lange, als t die Bedingung

$$35)\quad \begin{cases} 0<t<\frac{1}{2}\tau, \\ \frac{1}{2}\tau=\frac{1}{b}\arccos\frac{a^2}{a^2+b^2\sigma_2} \end{cases}$$

erfüllt. Für $t=\frac{1}{2}\tau$ stossen beide Atome in ihrem gemeinsamen, durch die ursprüngliche Verschiebung des zweiten um S verrückten Schwerpunkte mit den Geschwindigkeiten c_1 und $-c_2$:

$$36)\quad \begin{cases} c_1=\frac{bm_2}{M}\left(\sigma_2+\frac{a^2}{b^2}\right)\sin\frac{b\tau}{2}=\frac{bm_2}{M}\sqrt{\sigma_2\left(\sigma_2+\frac{2a^2}{b^2}\right)}, \\ c_2=\frac{bm_1}{M}\left(\sigma_2+\frac{a^2}{b^2}\right)\sin\frac{b\tau}{2}=\frac{bm_1}{M}\sqrt{\sigma_2\left(\sigma_2+\frac{2a^2}{b^2}\right)} \end{cases}$$

zusammen. Um ihre Werthe V_1, V_2 am Ende des Stosses zu berechnen, gehen wir auf die allgemein giltigen Fundamentalgleichungen 15) zurück. Aus diesen folgt durch einmalige Integration ihrer Summe zwischen den Grenzen $c_1, V_1; -c_2, V_2$ zunächst

$$37)\quad m_1V_1+m_2V_2=m_1c_1-m_2c_2=0,$$

andererseits mit Rücksicht darauf, dass in der gleichfalls aus 15) resultirenden Gleichung

$$m_1\int_{c_1}^{V_1}\frac{ds_1}{dt}\,\frac{d^2s_1}{dt^2}\,dt+m_2\int_{-c_2}^{V_1}\frac{ds_2}{dt}\,\frac{d^2s_2}{dt^2}\,dt$$

$$=-\varepsilon m_1m_2\int_{\delta_1}^{\delta_2}\frac{1}{(\delta+s_2-s_1)^2}\cos\frac{\alpha}{\delta+s_2-s_1}\,d(\delta+s_2-s_1)$$

die dem Anfange und Ende des Stosses entsprechenden Grenzen δ_1, δ_2, weil δ constant bleibt, einander gleich sind:

38) $$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2},*$$

also nach einem bekannten Verfahren schliesslich

$$V_1 = -c_1, \quad V_2 = c_2.$$

Beginnen wir von diesem Momente an gleichzeitig eine neue Zählung der Zeit, t', und beziehen die neuen Elongationen und Geschwindigkeiten beider Atomcentren auf diesen Stosspunkt, so bestehen für die Werthe $s_1^{(1)}$, $s_2^{(1)}$; $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$ derselben nach dem ersten Stosse die Gleichungen 33) und

$$m_1 s_1^{(1)} + m_2 s_2^{(1)} = 0,$$

die ersten jedoch unter den geänderten Anfangsbedingungen

$$t' = 0, \quad \xi^{(1)} = 0, \quad \frac{d\xi^{(1)}}{dt'} = b\sqrt{\sigma_2\left(\sigma_2 + \frac{2a^2}{b^2}\right)}.$$

Hieraus folgt nach Einführung der Abkürzung

39) $$\sqrt{\sigma_2\left(\sigma_2 + \frac{2a^2}{b^2}\right)} = c:$$

$$\xi^{(1)} = c \sin bt' - \frac{2a^2}{b^2} \sin^2 \frac{bt'}{2}$$

und

40) $$\begin{cases} s_1^{(1)} = -\frac{2m_2}{M}\left(c \cos\frac{bt'}{2} - \frac{a^2}{b^2} \sin\frac{bt'}{2}\right) \sin\frac{bt'}{2}, \\ v_1^{(1)} = -\frac{bm_2}{M}\left(c \cos bt' - \frac{a^2}{b^2} \sin bt'\right); \\ s_2^{(1)} = \frac{2m_1}{M}\left(c \cos\frac{bt'}{2} - \frac{a^2}{b^2} \sin\frac{bt'}{2}\right) \sin\frac{bt'}{2}, \\ v_2^{(1)} = \frac{bm_1}{M}\left(c \cos bt' - \frac{a^2}{b^2} \sin bt'\right). \end{cases}$$

---

* Dieses allgemeine Gesetz gilt, unsere Definition eines Atoms vorausgesetzt, auch für jede andere, in Bezug auf K mögliche Hypothese; wollte man z. B., auf reale Gleichgewichtszustände und eine analytische Erklärung der chemischen Affinität verzichtend, die ersteren insgesammt als scheinbare auffassen, so könnte man direct

$$K = \frac{\varepsilon m_1 m_2}{r^2}$$

annehmen. Denn lassen wir zwei ursprünglich in einem Abstande $r_0 > \delta$ ruhend gedachte Atome nach diesem Gesetze aufeinander einwirken, so wird ihre Centrallinie stetig zwischen r_0 und δ variiren, und das Atompaar, sobald die von $t=0$ bis zu dem Augenblicke τ, wo r zum zweiten Male gleich r_0 ist, verfliessende Zeit

$$\tau = \sqrt{\frac{2r_0}{\varepsilon M}} \int_\delta^{r_0} \frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{r_0 - r}} = r_0 \sqrt{\frac{2r_0}{\varepsilon M}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{\delta(r_0-\delta)}}{r_0} - arc\sin\sqrt{\frac{\delta}{r_0}}\right]$$

jenseits der Grenzen der sinnlichen Wahrnehmung des Beobachters liegt, auf diesen den Eindruck zweier in der Entfernung r_0 scheinbar ruhender Atome machen. Dann aber müssten r_0, m_1, m_2 zwischen engere Grenzen eingeschlossen werden, als es der allgemeine Charakter unserer Untersuchungen gestattet.

Wächst t' auf

$$\frac{1}{b} \, arc\, tg \frac{b^2 c}{a^2} = \tfrac{1}{2} \tau,$$

so verschwinden $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$ und für $t' = \tau$ stossen die Atome mit den Geschwindigkeiten c_1, $-c_2$ zum zweiten Male zusammen. Die weitere Fortsetzung dieser Betrachtungen liefert dann der Reihe nach $s_1^{(2)}$, $s_2^{(2)} \ldots s_1^{(n)}$, $s_2^{(n)} \ldots$ und die zugehörigen $v_1^{(2)}$, $v_2^{(2)} \ldots v_1^{(n)}$, $v_2^{(n)}$ in Function der Zeiten $t'' \ldots t^{(n)} \ldots$, und wir brauchen, um die gesuchte Lösung des gestellten Problems zu finden, nur noch an die Stelle von $t', t'' \ldots t^{(n)} \ldots$ $t - \frac{1}{2}\tau$, $t - \frac{3}{2}\tau \ldots t - (n - \frac{1}{2})\tau \ldots$ zu substituiren. So ergeben sich die allgemeinen Resultate

$$41) \left\{ \begin{aligned} s_1^{(n)} &= -\frac{2m_2}{M} \Big\{ c \cos\frac{b}{2}\left[t - (n - \tfrac{1}{2})\tau\right] \\ &\qquad - \frac{a^2}{b^2} \sin\frac{b}{2}\left[t - (n-\tfrac{1}{2})\tau\right] \Big\} \sin\frac{b}{2}\left[t - (n - \tfrac{1}{2})\tau\right], \\ v_1^{(n)} &= -\frac{b m_2}{M} \Big\{ c \cos b \left[t - (n - \tfrac{1}{2})\tau\right] - \frac{a^2}{b^2} \sin b \left[t - (n - \tfrac{1}{2})\tau\right] \Big\}; \\ s_2^{(n)} &= \frac{2m_1}{M} \Big\{ c \cos\frac{b}{2}\left[t - (n - \tfrac{1}{2})\tau\right] \\ &\qquad - \frac{a^2}{b^2} \sin\frac{b}{2}\left[t - (n-\tfrac{1}{2})\tau\right] \Big\} \sin\frac{b}{2}\left[t - (n - \tfrac{1}{2})\tau\right], \\ v_2^{(n)} &= \frac{2m_1}{M} \Big\{ c \cos b \left[t - (n - \tfrac{1}{2})\tau\right] - \frac{a^2}{b^2} \sin b \left[t - (n - \tfrac{1}{2})\tau\right] \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Ertheilt man also einem Elemente eines zweiatomigen Moleküls eine relativ sehr kleine centrale Verschiebung, so bewegen sich seine Atome, sich selbst überlassen, ungleichförmig beschleunigt gegen einander und stossen in ihrem gemeinsamen, um S verschobenen Schwerpunkte zusammen; ihre Geschwindigkeiten wechseln dann ihr Vorzeichen und ihre Mittelpunkte entfernen sich bis auf die Distanz

$$R = \delta + \sigma_2,$$

für welche v_1, v_2 gleichzeitig verschwinden. Von diesem Momente an durchläuft das Atompaar dieselben Bewegungsphasen in umgekehrter Reihenfolge, so dass nach τ Zeiteinheiten (vom ersten Stosse an gerechnet) ein zweiter Zusammenstoss in demselben Punkte und mit denselben Geschwindigkeiten erfolgt, welche die Atome vor dem ersten Stosse besassen. Da die totale lebendige Kraft dieses Systems durch keinen dieser Zusammenstösse eine Aenderung erfährt [38)], so findet eine unaufhörliche Wiederholung dieser Phasen in gleichen Intervallen τ statt.

Dieselben können, weil sie der letzten Attractivsphäre zweier chemisch verwandten Atome eigenthümlich sind, zum Unterschiede von den früher behandelten intermolecularen* intramoleculare Bewegungen ge-

* Dieser Ausdruck ist insofern berechtigt, als jedes Atom auch als einatomiges Molekül bezeichnet werden kann.



nannt werden; sie charakterisiren sich als periodische Bewegungen mit discontinuirlichen Geschwindigkeitsänderungen

Analoge Betrachtungen gelten natürlich auch für den allgemeinen Fall, in welchem zu Beginn der Zeit t beide Atome relativ sehr kleine Verschiebungen σ_1, σ_2 in ihrer Centrallinie erhielten, der Schwerpunkt des Systems somit um

$$S = \frac{m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2}{M}$$

verschoben wurde. Ihre Ausschläge zu irgend einer Zeit t sind dann

$$d_1 = \frac{m_2 (\sigma_1 - \sigma_2)}{M} \cos \frac{2\pi}{\tau} t, \quad d_2 = \frac{m_1 (\sigma_2 - \sigma_1)}{M} \cos \frac{2\pi}{\tau} t,$$

in welchen Ausdrücken τ denselben Werth wie in 24) besitzt. Hätte man ursprünglich das erste oder zweite Atom allein verschoben, so wären die Bewegungserscheinungen beider Atome durch die respectiven Formeln

$$d_1^{(1)} = \frac{m_2 \sigma_1}{M} \cos \frac{2\pi}{\tau} t, \quad d_2^{(1)} = -\frac{m_1 \sigma_1}{M} \cos \frac{2\pi}{\tau} t,$$

$$d_1^{(2)} = -\frac{m_2 \sigma_2}{M} \cos \frac{2\pi}{\tau} t, \quad d_2^{(2)} = +\frac{m_1 \sigma_2}{M} \cos \frac{2\pi}{\tau} t$$

bestimmt worden. Die Werthe von d_1, d_2 ergeben sich dann aus den einfachen Gleichungen

42) $$d_2 = d_1^{(1)} + d_1^{(2)}, \quad d_1 = d_2^{(1)} + d_2^{(2)}.$$

Ertheilt man also zwei in irgendwelchen stabilen Gleichgewichtslagen befindlichen Atomen gleichzeitig relativ sehr kleine centrale Verschiebungen σ_1, σ_2, so ist der hierdurch hervorgerufene Bewegungszustand eine Folge der Interferenz jener linearen Schwingungen, welche die Verschiebungen σ_1, σ_2 für sich in dem Systeme hervorgerufen hätten.

Die Amplitude der für jedes Atom resultirenden linearen und isochronen Schwingung ist die algebraische Summe seiner den Verschiebungen σ_1, σ_2 für gleiche Zeiten entsprechenden Amplituden.

Entgegengesetzt gerichtete Verschiebungen verstärken sich daher in ihrer Wirkung, gleichgerichtete schwächen einander und veranlassen bei gleicher Grösse überhaupt keine Bewegung der Atome.

§ 5.

B. Eine zweite Reihe von im Allgemeinen bedeutend complicirteren Bewegungserscheinungen zeigt das Atompaar dann, wenn ein Element desselben, z. B. das zweite Atom, zu Beginn der Zeit t eine positive Geschwindigkeit c_2 von endlicher Grösse in der Richtung seiner Centrallinie erhält.

Unter Voraussetzung eines ursprünglichen stabilen Gleichgewichtszustandes und mit Beibehaltung früherer Bezeichnungen bestimmen sich [mit Rücksicht auf 15)] die Geschwindigkeiten beider Atome aus den Gleichungen



$$43)\quad \left\{ \begin{aligned} & m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_2 c_2, \\ & \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\varepsilon M}{r^2} \cos\frac{\alpha}{r}, \end{aligned} \right.$$

in welchen für $\varkappa + s_2 - s_1$ oder $\varkappa + \xi$ kurz r gesetzt wurde. Die mit $2\frac{dr}{dt}dt$ multiplicirte zweite Relation liefert, links von c_2 bis $v_2 - v_1$, rechts von $\varkappa$ bis r integrirt:

$$(v_2 - v_1)^2 = c_2^2 - \frac{2\varepsilon M}{\alpha}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{r}\right).$$

Die Function $\sin\frac{\alpha}{r}$ kann im Allgemeinen alle zwischen $+1$ und -1 liegenden Werthe annehmen; dem ersten Grenzfalle entspricht ein grösster, dem zweiten ein kleinster Werth von $(v_2 - v_1)^2$, und wir werden, je nachdem derselbe negativ, Null oder positiv ist, drei Hauptfälle zu unterscheiden haben.

I. Hauptfall: $0 < c_2 < 2\sqrt{\frac{\varepsilon M}{\alpha}}$.

Erfüllt c_2 diese Bedingung, so wird $(v_2 - v_1)^2$ entweder für positive oder negative Werthe von $\sin\frac{\alpha}{r}$ verschwinden, so dass die Vereinfachung der Discussion anfänglich eine Gliederung dieses Falles in zwei Unterfälle erfordert.

a) $0 < c_2 < \sqrt{\frac{2\varepsilon M}{\alpha}}$.

Da $v_2 - v_1$ für $t = 0$ gleich $+c_2$ sein muss, so gilt für seine allgemeine Bestimmungsgleichung

$$44)\quad v_2 - v_1 = \pm\sqrt{c_2^2 - \frac{2\varepsilon M}{\alpha}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{r}\right)}$$

das obere Zeichen so lange, als die Grösse unter dem Wurzelzeichen positiv bleibt. Demzufolge wächst der Abstand beider Atome unter stetiger Abnahme ihrer relativen Geschwindigkeit bis auf ein Maximum

$$r'_1 = \varkappa + \zeta'_1,$$

für welches $v_2 - v_1$ gleich Null wird. Die zur Bestimmung von ζ'_1 bestehende Relation hat die Form

$$\sin\frac{\alpha}{\varkappa + \zeta'_1} = 1 - \frac{\alpha c_2^2}{2\varepsilon M}$$

oder, nach Anwendung der Formel

$$\sin\frac{\alpha}{\varkappa + \zeta'_1} = \sin\left\{\frac{\alpha}{\varkappa} - \frac{\alpha\zeta'_1}{\varkappa(\varkappa + \zeta'_1)}\right\} = \cos\frac{\alpha\zeta'_1}{\varkappa(\varkappa + \zeta'_1)}:$$

$$\cos\frac{\alpha\zeta'_1}{\varkappa(\varkappa + \zeta'_1)} = 1 - \frac{\alpha c_2^2}{2\varepsilon M}.$$

Hieraus folgt, wenn wir

45) $$\frac{c_2}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{\varepsilon M}} = l$$

setzen und mit γ_1 den in Theilen des Halbmessers 1 auszudrückenden, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen

46) $$\gamma_1 = arc\,cos\,(1-2l^2) = 2\,arc\,sin\,l$$

bezeichnen

47) $$\zeta'_1 = \frac{\gamma_1 \varkappa^2}{\alpha - \gamma_1 \varkappa}, \quad r'_1 = \frac{\alpha \varkappa}{\alpha - \gamma_1 \varkappa}.$$

Im weiteren Verlaufe der Bewegung wird $v_2 - v_1$ negativ, weil der Abstand beider Atomcentren stetig abnimmt, erhält für $r = \varkappa$ sein negatives Maximum $-c_2$ und annullirt sich für einen Minimalwerth von r:

$$r''_1 = \varkappa - \zeta''_1$$

zum zweiten Male. ζ''_1, r''_1 ergeben sich dann mit Berücksichtigung der Formel

$$sin\,\frac{\alpha}{\varkappa - \zeta''_1} = sin\left\{\frac{\alpha}{\varkappa} + \frac{\alpha\zeta''_1}{\varkappa(\varkappa - \zeta''_1)}\right\} = cos\,\frac{\alpha\zeta''_1}{\varkappa(\varkappa - \zeta''_1)}$$

auf ähnliche Art, wie ζ'_1, r'_1 aus der Gleichung

$$cos\,\frac{\alpha\zeta''_1}{\varkappa(\varkappa - \zeta''_1)} = 1 - 2l^2$$

als

48) $$\zeta''_1 = \frac{\gamma_1 \varkappa^2}{\alpha + \gamma_1 \varkappa}, \quad r''_1 = \frac{\alpha \varkappa}{\alpha + \gamma_1 \varkappa}.$$

Diese Ausdrücke besitzen ihre einfachste Gestalt, wenn c_2 speciell der Bedingung

$$c_2 = \sqrt{\frac{2\varepsilon M}{\alpha}}$$

genügt, indem sie für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ in die Formeln

$$\zeta'_1 = \frac{\varkappa^2 \pi}{2\alpha - \varkappa\pi}, \quad r'_1 = \frac{\alpha}{2k\pi};$$

$$\zeta''_1 = \frac{\varkappa^2 \pi}{2\alpha + \varkappa\pi}, \quad r''_1 = \frac{\alpha}{(2k+1)\pi}$$

übergehen. Um also in dem zweiten Unterfalle

b) $$\sqrt{\frac{2\varepsilon M}{\alpha}} < c_2 < 2\sqrt{\frac{\varepsilon M}{\alpha}}$$

die Berechnung der correspondirenden γ_2; ζ'_2, ζ''_2; r'_2, r''_2 zu ermöglichen, müssen zunächst zwei Hilfsgrössen η'_2, η''_2 aus den Gleichungen

$$sin\,\frac{\alpha\eta'_2}{\varkappa'(\varkappa' + \eta'_2)} = 2l^2 - 1, \quad \varkappa' = r'_1;$$

$$sin\,\frac{\alpha\eta''_2}{\varkappa''(\varkappa'' - \eta''_2)} = 2l^2 - 1, \quad \varkappa'' = r''_1$$

bestimmt werden, welche im weiteren Verlaufe der Rechnung zu den Resultaten

49) $$\gamma_2 = arc\sin(2l^2 - 1) = \frac{\pi}{2} - 2\, arc\cos l = \gamma_1 - \frac{\pi}{2};$$

50) $$\zeta'_2 = \frac{\alpha\varkappa'}{\alpha - \gamma_2\varkappa'} - \varkappa, \quad r'_2 = \frac{\alpha\varkappa'}{\alpha - \gamma_2\varkappa'};$$

51) $$\zeta''_2 = \varkappa - \frac{\alpha\varkappa''}{\alpha + \gamma_2\varkappa''}, \quad r''_2 = \frac{\alpha\varkappa''}{\alpha + \gamma_2\varkappa''}$$

führen. — Ziehen wir ferner in beiden Unterfällen die Coexistenz der Relationen 43) und 44) in Betracht, so erhalten wir als erste Darstellungsweise von v_1, v_2 in Function von r

52) $$\begin{cases} v_1 = \dfrac{m_2 c_2}{M} \mp \dfrac{m_2}{M}\sqrt{c_2^2 - \dfrac{2\varepsilon M}{\alpha}\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{r}\right)}, \\ v_2 = \dfrac{m_2 c_2}{M} \pm \dfrac{m_1}{M}\sqrt{c_2^2 - \dfrac{2\varepsilon M}{\alpha}\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{r}\right)}. \end{cases}$$

Hier repräsentirt $\frac{m_2 c_2}{M}$ die constante Geschwindigkeit c, welche der Schwerpunkt des Systems infolge der dem zweiten Atom verliehenen Anfangsgeschwindigkeit c_2 erhielt; die zweiten Glieder bedeuten die relativen Geschwindigkeiten u_1, u_2 der Atomcentren in Bezug auf ihre mit gleichförmiger Geschwindigkeit c sich fortbewegenden stabilen Gleichgewichtslagen. Ebenso setzen sich die absoluten Abstände r_1, r_2 beider Atome von dem fixen Punkte O zu irgend einer Zeit aus zwei Bestandtheilen zusammen, den absoluten Verschiebungen s_1, s_2 ihrer ursprünglichen stabilen Gleichgewichtspunkte und den auf dieselben bezüglichen relativen Verschiebungen d_1, d_2 ihrer Centren. Für die letzteren liefert die zweite Integralgleichung

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = m_2 c_2 t + m_1 \varrho_1 + m_2 \varrho_2,$$

weil nach unserer in Betreff des Schwerpunktes gemachten Bemerkung die Beziehung

$$m_1 s_1 + m_2 s_2 = m_2 c_2 t + m_1 \varrho_1 + m_2 \varrho_2$$

bestehen muss, die einfache Relation

53) $$m_1 d_1 + m_2 d_2 = 0.$$

Durch Combination der Relation 53) mit 47), 48), beziehungsweise 50), 51), lassen sich somit ohne vorläufige Kenntniss der allgemeinen Werthe d_1, d_2 die Maxima und Minima dieser Elongationen in beiden Unterfällen berechnen. Für a) folgt speciell

54) $$\begin{cases} d'_1 = \dfrac{m_2}{M}\zeta''_1, \quad d''_1 = -\dfrac{m_2}{M}\zeta'_1; \\ d'_2 = \dfrac{m_1}{M}\zeta'_1, \quad d''_2 = -\dfrac{m_1}{M}\zeta''_1; \end{cases} \quad \frac{d'_1 - d''_1}{d'_2 - d''_2} = \frac{m_2}{m_1};$$

für b)

$$55)\quad \left\{ \begin{array}{ll} d'_1 = \frac{m_2}{M}\zeta''_2, & d''_1 = -\frac{m_2}{M}\zeta'_2; \\ d'_2 = \frac{m_1}{M}\zeta'_2, & d''_2 = -\frac{m_1}{M}\zeta''_2; \end{array} \right. \quad \frac{d'_1 - d''_1}{d'_2 - d''_2} = \frac{m_2}{m_1};$$

und in beiden Fällen für die numerischen Maxima und Minima von u_1, u_2

$$56)\qquad u''_1 = u''_2 = 0,\quad u'_1 = \frac{m_2}{M}c_2,\quad u'_2 = \frac{m_1}{M}c_2.$$

Hieran schliesst sich die Frage, binnen welchen Zeiten $\frac{\tau'_k}{2}$, $\frac{\tau''_k}{2}$ sich r einerseits von $\varkappa$ auf $\varkappa+\zeta'$ vergrössert, andererseits von $\varkappa$ bis $\varkappa-\zeta''$ abnimmt.

Da $-\frac{dr}{dt}$ von $\varkappa+\zeta'$ bis $\varkappa$ dieselbe Werthreihe durchläuft, wie $\frac{dr}{dt}$ von $\varkappa$ bis $\varkappa+\zeta'$, so erhalten wir zur Berechnung von τ'_k vorläufig das bestimmte Integral

$$\tau'_k = 2\int_{\varkappa}^{\varkappa+\zeta'} \frac{dr}{\sqrt{c_2^2 - \frac{2\varepsilon M}{\alpha}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{r}\right)}}.$$

Dasselbe gestattet im ersten Unterfalle die Transformationen

$$\tau'_k = \frac{2}{c_2}\int_0^{\zeta_1} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \frac{4\varepsilon M}{\alpha c_2^2}\sin^2\frac{\alpha\zeta}{2\varkappa(\varkappa+\zeta)}}},$$

$$= \frac{4\alpha\varkappa^2}{c_2}\int_0^{\frac{\gamma_1}{2}} \frac{du}{(\alpha - 2\varkappa u)^2\sqrt{1 - \frac{4\varepsilon M}{\alpha c_2^2}\sin^2 u}}$$

oder, wenn der lediglich von k abhängige Bruch

$$57)\qquad \frac{4}{(4k+1)\pi} = \mu_k$$

gesetzt wird, die Formulirung

$$\tau'_k = \frac{\alpha\mu_k^2 l}{c_2}\int_0^{\frac{\gamma_1}{2}} \frac{du}{(1 - \mu_k u)^2\sqrt{l^2 - \sin^2 u}}.$$

Da $\mu_k u$ bis auf einen später zu betrachtenden Ausnahmefall stets kleiner als 1 ist, so lässt sich der Bruch

$$\frac{1}{(1-\mu_k u)^2}$$

durch die convergente unendliche Reihe

$$1+2\mu_k u+3\mu_k^2 u^2+\ldots+(n+1)\mu_k^n u^n+\ldots$$

ersetzen, also τ'_k in der Form

$$\tau'_k=\frac{\alpha\mu_k^2 l}{c_2}\left\{\int_0^{\frac{\gamma_1}{2}}\frac{du}{\sqrt{l^2-\sin^2 u}}+2\mu_k\int_0^{\frac{\gamma_1}{2}}\frac{u\,du}{\sqrt{l^2-\sin^2 u}}\right.$$

$$\left.+\ldots+(n+1)\mu_k^n\int_0^{\frac{\gamma_1}{2}}\frac{u^n\,du}{\sqrt{l^2-\sin^2 u}}+\ldots\right\}$$

wiedergeben. In diesen bestimmten Integralen treffen wir die Substitution

$$\sin u=l\sin\varphi,$$

wodurch ihre Grenzen in 0 und $\frac{\pi}{2}$ übergehen, gleichzeitig berücksichtigend, dass für alle zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Werthe von u die Relation

$$u=\sin u+\tfrac{1}{2}\frac{\sin^3 u}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^5 u}{5}+\ldots$$

besteht, somit $u^2, u^3\ldots$ den Reihen

$$u^2=\sin^2 u+\tfrac{1}{3}\sin^4 u+\tfrac{8}{45}\sin^6 u+\ldots,\quad u^3=\sin^3 u+\tfrac{1}{2}\sin^5 u+\ldots,$$
$$u^4=\sin^4 u+\tfrac{2}{3}\sin^6 u+\ldots,\quad u^5=\sin^5 u+\ldots,\quad u^6=\sin^6 u+\ldots$$

äquivalent sind. Die Grösse l bleibt unserer Voraussetzung gemäss für a) und b) kleiner als 1, so dass die Gleichungen

$$\frac{du}{\sqrt{l^2-\sin^2 u}}=\frac{d\varphi}{\sqrt{1-l^2\sin^2\varphi}}=1+\tfrac{1}{2}l^2\sin^2\varphi+\frac{1.3}{2.4}l^4\sin^4\varphi+\ldots$$

immer giltig bleiben. Hierdurch wird die Lösung des Problems auf Integrationen von den allgemeinen Formen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}u\,du=\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2},\qquad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}u\,du=\frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)}$$

zurückgeführt, deren Ausführung als definitiven Werth von τ'_k liefert

$$\text{58)}\qquad\begin{aligned}\tau'_k=&\frac{\alpha\mu_k^2 l}{c_2}\{K_0+3\mu_k^2 K_2+5\mu_k^4 K_4+\ldots\}\\&+\frac{2\alpha\mu_k^3 l}{c_2}\{K_1+2\mu_k^2 K_3+3\mu_k^4 K_5+\ldots\}.\end{aligned}$$

Die in demselben auftretenden Constanten K_0, K_1, $K_2 \ldots$ bestimmen sich aus den Gleichungen

$$K_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(l, \varphi)} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \tfrac{1}{4}l^2 + \tfrac{9}{64}l^4 + \tfrac{25}{256}l^6 + \ldots\right),$$

$$K_1 = l + \tfrac{4}{9}l^3 + \tfrac{64}{225}l^5 + \ldots, \qquad K_2 = \frac{\pi}{2}\left(\tfrac{1}{2}l^2 + \tfrac{5}{16}l^4 + \tfrac{259}{1152}l^6 + \ldots\right),$$

$$K_3 = \tfrac{2}{3}l^3 + \tfrac{8}{15}l^5 + \ldots, \qquad K_4 = \frac{\pi}{2}\left(\tfrac{3}{8}l^4 + \tfrac{35}{96}l^6 + \ldots\right),$$

$$K_5 = \tfrac{8}{15}l^5 + \ldots, \qquad K_6 = \frac{5\pi}{32}l^6 + \ldots$$

. . . .

Die Anwendung ähnlicher Schlüsse auf τ''_k liefert der Reihe nach

$$\tau''_k = 2\int_{\varkappa - \zeta''_1}^{\varkappa} \frac{dr}{\sqrt{c_2^2 - \frac{2\varepsilon M}{\alpha}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{r}\right)}}$$

$$= \frac{2}{c_2}\int_0^{\zeta''_1} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \frac{4\varepsilon M}{\alpha c_2^2}\sin^2\frac{\alpha\zeta}{2\varkappa(\varkappa - \zeta)}}}$$

$$= \frac{\alpha\mu^2_k l}{c_2}\int_0^{\frac{\gamma_1}{2}} \frac{du}{(1 + \mu_k u)^2\sqrt{l^2 - \sin^2 u}},$$

also

$$59)\quad \begin{aligned} \tau''_k = {} & \frac{\alpha\mu^2_k l}{c_2}\{K_0 + 3\mu^2_k K_2 + 5\mu^4_k K_4 + \ldots\} \\ & - \frac{2\alpha\mu^3_k l}{c_2}\{K_1 + 2\mu^2_k K_3 + 3\mu^4_k K_5 + \ldots\}. \end{aligned}$$

Aus 58) und 59) resultirt endlich für die totale Schwingungsdauer τ_k

$$60)\qquad \tau_k = \frac{2\alpha\mu^2_k l}{c_2}\{K_0 + 3\mu^2_k K_2 + 5\mu^4_k K_4 + \ldots\},$$

und für die Grössendifferenz zwischen τ'_k und τ''_k

$$61)\qquad \tau'_k - \tau''_k = \frac{4\alpha\mu^3_k l}{c_2}\{K_1 + 2\mu^2_k K_3 + 3\mu^4_k K_5 + \ldots\}.$$

Da die Factoren μ^4_k, $\mu^5_k \ldots$ der successiven K, namentlich für Gleichgewichtslagen von höherem Index, ungemein rasch abnehmen, andererseits K_1, $K_2 \ldots$ mit immer höheren Potenzen des echten Bruches l beginnen, so reichen die in 58) bis 61) angeführten Anfangsglieder zur Berechnung der gesuchten Unbekannten im Allgemeinen vollkommen hin, und es ist leicht

einzusehen, dass sie auch für den zweiten Unterfall ihre Giltigkeit behaupten. Transformiren wir nämlich die Integrale

$$\int_{\varkappa-\zeta''_2}^{\varkappa}\frac{dr}{v_2-v_1},\quad \int_{\varkappa}^{\varkappa+\zeta'_2}\frac{dr}{v_2-v_1}$$

in analoger Weise, so erhalten wir für die oberen Grenzen der zweiten Transformationsformeln

$$\frac{\alpha\zeta''_2}{2\varkappa(\varkappa-\zeta''_2)}=\frac{\alpha(\varkappa-\varkappa'')}{2\varkappa\varkappa''}+\frac{\gamma_2}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma_2}{2}=\frac{\gamma_1}{2},$$

$$\frac{\alpha\zeta'_2}{2\varkappa(\varkappa+\zeta'_2)}=\frac{\alpha(\varkappa'-\varkappa)}{2\varkappa\varkappa'}+\frac{\gamma_2}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma_2}{2}=\frac{\gamma_1}{2},$$

also schliesslich auch formal völlig übereinstimmende Ausdrücke. Nur dem Minimalwerthe von k, $k=0$ entsprechen eigenthümliche Verhältnisse, weil für denselben $\sin\frac{\alpha}{r}$ nie kleiner als Null werden kann, somit v_2-v_1 für

$$c_2=\sqrt{\frac{2\varepsilon M}{\alpha}}\quad\text{oder}\quad c_2>\sqrt{\frac{2\varepsilon M}{\alpha}}$$

stets positiv bleibt, also eine periodische Bewegung der Atome unmöglich macht. Ihr Abstand vergrössert sich dann stetig bis ins Unendliche und die Endwerthe ihrer absoluten Geschwindigkeiten sind entweder

$$62)\quad \left\{\begin{aligned} & v_1=v_2=\frac{m_2c_2}{M} \\ & \text{oder} \\ & v_1=\frac{m_2}{M}c_2-\frac{m_2}{M}\sqrt{c_2^2-\frac{2\varepsilon M}{\alpha}}, \\ & v_2=\frac{m_2}{M}c_2+\frac{m_1}{M}\sqrt{c_2^2-\frac{2\varepsilon M}{\alpha}}. \end{aligned}\right.$$

Die Resultate 44) bis 61) begründen folgende Sätze:

Erhält ein Atom eines in einem stabilen Gleichgewichtszustande befindlichen Atompaares eine positive oder negative, innerhalb der Grenzen

$$0\ \text{und}\ 2\sqrt{\frac{\varepsilon M}{\alpha}}$$

gelegene Geschwindigkeit in der Richtung seiner Centrallinie, so entsteht eine schwingende Bewegung beider Atome um ihre ursprünglichen stabilen Gleichgewichtslagen als Schwingungsmittelpunkte, während diese wie der Schwerpunkt des Systems sich gleichzeitig gleichförmig in der Verlängerung ihrer Centrallinie fortbewegen.

Beide Atome besitzen dieselbe Schwingungsdauer τ_k; ihre gleichzeitigen Elongationen und die in der Zeit $\frac{\tau_k}{2}$ von ihnen (bezüglich der Schwingungscentren) durchlaufenen Wege verhalten sich verkehrt wie ihre Massen.

Aber während den in A betrachteten Bewegungszuständen gleiche positive und negative Amplituden entsprachen, charakterisirt sich der vorliegende dadurch, dass die Elongationen der Atome zu beiden Seiten ihrer Schwingungscentren ungleiche Werthe besitzen, indem ihre zwischen r_{2k} und r_{2k-1} liegenden Amplituden die ihnen correspondirenden, dem Intervalle $r_{2k} - r_{2k+1}$ angehörigen Ausschläge an Grösse übertreffen. Es entfällt ausserdem auf die ersteren der grössere Theil τ'_k von τ_k, der mittlere Werth von r während einer Schwingungsdauer ist also grösser als $\varkappa$.

Dieser Grössenunterschied ist desto bedeutender, je grösser c und $\varkappa$ sind, so dass einerseits die gleichen c entsprechenden Ausdehnungen desselben Systems, andererseits für verschiedene c der Spielraum jenes Mittelwerthes mit den ursprünglichen Gleichgewichtsdistanzen seiner Bestandtheile wächst.

Umgekehrt muss eine Verringerung der dem Abstande $\varkappa$ entsprechenden relativen Geschwindigkeit eine Contraction des Systems zur Folge haben, weil sie eine Verkleinerung des mittleren Abstandes der Atome bewirkt.

Erhalten für $t=0$ beide Atome Geschwindigkeiten c_1, c_2 in der Richtung ihrer Centrallinie, so hängen die eben geschilderten Bewegungszustände in analoger Weise von $c_2 - c_1$ ab.

Nachdem hiermit die im Folgenden zur Anwendung kommenden speciellen Constanten bestimmt sind, gehen wir auf die allgemeine Integralgleichung

$$t = \int_{\varkappa}^{r} \frac{dr}{\sqrt{c_2^2 - \frac{2\varepsilon M}{\alpha}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{r}\right)}}$$

zurück und transformiren sie durch die Substitution

$$63) \qquad r = \frac{\alpha\mu_k}{2(1-\mu_k u'_k)}$$

in

$$t = \frac{\alpha\mu_k l}{2c_2}\int_0^{u'_k} \frac{1}{\sqrt{l^2 - \sin^2 u'_k}}\, d\left(\frac{1}{1-\mu_k u'_k}\right),$$

in welcher Formel die weitere Substitution

$$64) \qquad \sin u'_k = l \sin\varphi'$$

die Darstellung beider Factoren unter dem Integralzeichen durch unendliche convergente, nach steigenden Potenzen von $\sin\varphi'$ entwickelte Reihen ermöglicht. Die aufeinanderfolgenden Glieder ihres Productes haben den Factor

$$\mu_k \cos\varphi'\, d\varphi'$$

miteinander gemein, so dass nach Ausführung von Integrationen von der allgemeinen Form

$$\int_0^{\varphi'} \sin^m \varphi' \cos \varphi' \, d\varphi' = \frac{\sin^{m+1} \varphi'}{m+1}$$

die Gleichung zwischen φ' und t die einfachere Gestalt

$$A_1 \sin \varphi' + A_2 \sin^2 \varphi' + A_3 \sin^3 \varphi' + \ldots = \frac{2 c_2 t}{\alpha \mu^2_k l}$$

erhält, und $A_1, A_2, A_3 \ldots$ durch die Relationen

$$\begin{aligned}
&A_1 = 1, && A_2 = \mu_k l, \\
&A_3 = \tfrac{1}{6} + (\tfrac{1}{6} + \mu^2_k) l^2, && A_4 = \{\tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{3} + \mu^2_k) l^2\} \mu_k l, \\
&A_5 = \tfrac{3}{40} + \tfrac{1}{10} (\tfrac{1}{2} + 3 \mu^2_k) l^2 + (\tfrac{3}{40} + \tfrac{1}{2} \mu^2_k + \mu^4_k) l^4, \\
&A_6 = \{\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{3} (\tfrac{1}{3} + \mu^2_k) l^2 + (\tfrac{8}{45} + \tfrac{2}{3} \mu^2_k + \mu^4_k) l^4\} \mu_k l \\
&\ldots
\end{aligned}$$

bestimmt sind. Setzen wir abkürzend für jedes beliebige positive l und irgend ein dem Index p entsprechendes μ_p

$$\frac{2 c_2}{\alpha \mu^2_p l} = m_p, \tag{65}$$

so liefert die Reversion dieser Reihe für $\sin \varphi'$ die Gleichung

$$\sin \varphi' = \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n m^n_k t^n = \Phi' [m_k t, \mu_k, l], \tag{66}$$

und für $B_1, B_2, B_3 \ldots$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&B_1 = 1, && B_2 = -\mu_k l, \\
&B_3 = -\{\tfrac{1}{6} + (\tfrac{1}{6} - \mu^2_k) l^2\}, && B_4 = \{\tfrac{7}{12} + (\tfrac{1}{2} - \mu^2_k) l^2\} \mu_k l, \\
&B_5 = \tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{10} (\tfrac{7}{6} - 13 \mu^2_k) l^2 + (\tfrac{1}{120} - \mu^2_k + \mu^4_k) l^4, \\
&B_6 = -\{\tfrac{81}{360} + \tfrac{1}{20} (\tfrac{229}{18} - 47 \mu^2_k) l^2 + (\tfrac{1}{24} - \tfrac{5}{3} \mu^2_k + \mu^4_k) l^4\} \mu_k l \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Diese Formeln können übrigens nur innerhalb des ersten Intervalles benützt werden, indem die Substitution 63) lediglich unter der Voraussetzung

$$\varkappa < r < r_{2k-1}$$

brauchbar ist und für

$$\varkappa > r > r_{2k+1}$$

durch eine andere:

$$r = \frac{\alpha \mu_k}{2 (1 + \mu_k u''_k)}, \tag{67}$$

ersetzt werden muss. Die Bestimmungsgleichung für u''_k lautet in diesem Falle:

$$t - \tau'_k = \frac{\alpha \mu_k l}{2 c_2} \int_0^{u''_k} \frac{1}{\sqrt{l^2 - \sin^2 u''_k}} \, d\left(-\frac{1}{1 + \mu_k u''_k}\right),$$

und führt bei analoger Behandlung auf die Relation

$$68) \quad \sin\varphi'' = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1} B^n m_k^n (t - \tau'_k)^n = \Phi''[m_k (t - \tau'_k), \mu_k, l],$$

in welcher B_1, B_2, B_3 dieselbe Bedeutung wie in 66) haben, und φ'' mit u''_k durch die Gleichung

$$\sin u''_k = l \sin\varphi''$$

zusammenhängt. Die zwischen 0 und 1 oscillirenden Transcendenten Φ', Φ'' lassen sich für alle einerseits zwischen 0 und $\frac{1}{2}\tau'_k$, andererseits zwischen 0 und $\frac{1}{2}\tau''_k$ liegenden Werthe ihres Argumentes aus ihren Definitionsgleichungen 66) und 68) hinreichend genau berechnen, ohne die Kenntniss von B_7, B_8... zu benöthigen, und ermöglichen so eine allgemeine Lösung des ersten Hauptfalles durch folgendes Schema:

$$t = 0:$$
$$d = 0, \quad u = c_2;$$

$$0 < t < \tfrac{1}{2}\tau'_k:$$
$$d = \frac{\mu_k \varkappa \arcsin l\, \Phi'[m_k t, \mu_k, l]}{1 - \mu_k \arcsin l\, \Phi'[m_k t, \mu_k, l]},$$
$$u = c_2 \{1 - \Phi'^2 [m_k t, \mu_k, l]\}^{1/2};$$

$$t = \tfrac{1}{2}\tau'_k:$$
$$d = d'_2 - d''_1 = \zeta', \quad u = 0;$$

$$\tfrac{1}{2}\tau'_k < t < \tau'_k:$$
$$d = \frac{\mu_k \varkappa \arcsin l\, \Phi'[m_k (\tau'_k - t), \mu_k, l]}{1 - \mu_k \arcsin l\, \Phi'[m_k (\tau'_k - t), \mu_k, l]},$$
$$u = -c_2 \{1 - \Phi'^2 [m_k (\tau'_k - t), \mu_k, l]\}^{1/2};$$

$$t = \tau'_k:$$
$$d = 0, \quad u = -c_2;$$

$$\tau'_k < t < \tau'_k + \tfrac{1}{2}\tau''_k:$$
$$d = -\frac{\mu_k \varkappa \arcsin l\, \Phi''[m_k (t - \tau'_k), \mu_k, l]}{1 + \mu_k \arcsin l\, \Phi''[m_k (t - \tau'_k), \mu_k, l]},$$
$$u = -c_2 \{1 - \Phi''^2 [m_k (t - \tau'_k), \mu_k, l]\}^{1/2};$$

$$t = \tau'_k + \tfrac{1}{2}\tau''_k:$$
$$d = d''_2 - d'_1 = -\zeta'', \quad u = 0;$$

$$\tau'_k + \tfrac{1}{2}\tau''_k < t < \tau_k:$$
$$d = -\frac{\mu_k \varkappa \arcsin l\, \Phi''[m_k (\tau_k - t), \mu_k, l]}{1 + \mu_k \arcsin l\, \Phi''[m_k (\tau_k - t), \mu_k, l]},$$
$$u = c_2 \{1 - \Phi''^2 [m_k (\tau_k - t), \mu_k, l]\}^{1/2};$$

$$t = \tau_k:$$
$$d = 0, \quad u = c_2,$$

welches im Verein mit den Formeln

$$69) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_1 = -\frac{m_2}{M} d, \quad u_1 = -\frac{m_2}{M} \mu; \\ d_2 = +\frac{m_1}{M} d, \quad u_2 = +\frac{m_1}{M} u \end{array} \right.$$

die Werthe von d_1, d_2; u_1, u_2 für jeden Werth von t liefert.

II. Hauptfall: $c_2 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon M}{\alpha}}$.

Die diesem speciellen Werthe von c_2 entsprechenden Bewegungen charakterisiren sich, mit jenen des ersten Hauptfalles verglichen, dadurch, dass $v_2 - v_1$ erst für

$$r = r_{2k-1}$$

verschwindet, in welcher Entfernung die Atome als in einer labilen Gleichgewichtslage zur Ruhe gelangen müssten.

Die zur Erreichung dieses Grenzzustandes erforderliche Zeit T hat den Werth

$$T = \frac{\alpha \mu^2{}_k}{2c_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{(1-\mu_k u)^2 \cos u},$$

kann also, weil im Allgemeinen

$$\int \frac{du}{(1-\mu_k u)^2 \cos u} > \int \frac{du}{\cos u} = \log tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)$$

ist und $\log tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)$ für $u = \frac{\pi}{2}$ unendlich wird, in Wirklichkeit nie eintreten.

Da ferner c_2 von $\varkappa$ unabhängig erscheint, so gilt der Satz:

Befinden sich zwei Atome in irgend einem stabilen Gleichgewichtszustande, so ist (mit Ausnahme von r_0) zu einer bleibenden Aufhebung desselben stets derselbe Bewegungsimpuls erforderlich, also die bei ihrer Verschiebung aus der k^{ten} stabilen in die k^{te} oder $(k+1)^{\text{te}}$ labile Gleichgewichtslage zu leistende Arbeit für jedes endliche k constant. Ihre Grösse A wird im Allgemeinen durch das bestimmte Integral

$$\varepsilon m_1 m_2 . \int_{r_{2k}}^{r_{2k-1}} \frac{1}{r^2} \cos \frac{\alpha}{r} \, dr = -\frac{\varepsilon m_1 m_2}{\alpha} \int_{\frac{4k+1}{2}\pi}^{\frac{4k-1}{2}\pi} \cos u \, du$$

ausgedrückt, woraus

$$70) \qquad A = \frac{2 \varepsilon m_1 m_2}{\alpha}$$

folgt. Für die erste stabile Gleichgewichtslage tritt deshalb eine Ausnahme ein, weil schon die Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{2\varepsilon M}{\alpha}}$ eine bleibende Aenderung des Gleichgewichtszustandes veranlasst, die ihr zugehörige Arbeit

$$A_0 = \varepsilon m_1 m_2 \int_{\frac{2\alpha}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{r^2} \cos\frac{\alpha}{r}\, dr = \frac{\varepsilon m_1 m_2}{\alpha} \tag{71}$$

aber nur halb so gross als A ist.

Ebenso besitzt die zur Auflösung eines zweiatomigen Moleküls in seine Bestandtheile nöthige Trennungsarbeit ihren charakteristischen Werth

$$A_\delta = \frac{2\varepsilon m_1 m_2}{\alpha} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2\delta} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{72}$$

Die eigenthümliche Kraftwirkung in der Nachbarschaft der einzelnen Gleichgewichtslagen tritt erst unter gleichzeitiger Berücksichtigung der durch A allgemein bewirkten positiven oder negativen Verschiebungen

$$r_{2k-1} - r_{2k} = \frac{4\alpha}{(16k^2-1)\pi}, \quad r_{2k} - r_{2k+1} = \frac{4\alpha}{(4k+1)(4k+3)\pi}$$

hervor, indem die Quotienten

$$\frac{(4k+1)(4k-1)\varepsilon m_1 m_2 \pi}{2\alpha^2}, \quad \frac{(4k+1)(4k+3)\varepsilon m_1 m_2 \pi}{2\alpha^2},$$

welche die zu einer Vergrösserung oder Verkleinerung des Abstandes der Atome, r_{2k}, um die Längeneinheit erforderliche mittlere Arbeit repräsentiren, direct von k abhängen.

Die Berechnung von d und u geschieht für kleine Werthe von t nach den aus der vereinfachten Gleichung

$$t = \frac{\alpha\mu_k}{2c_2} \int_0^{u'_k} \frac{1}{\cos u'_k}\, d\left(\frac{1}{1-\mu_k u'_k}\right)$$

abgeleiteten Formeln

$$\Phi'[m_k t, \mu_k, 1] = \sum_{n=1}^{n=\infty} B'_n m_k^n t^n;$$

$$B'_1 = 1, \qquad B'_2 = -\mu_k,$$
$$B'_3 = -(\tfrac{1}{3} - \mu^2_k), \qquad B'_4 = (\tfrac{13}{12} - \mu^2_k)\mu_k,$$
$$B'_5 = \tfrac{2}{15} - \tfrac{23}{10}\mu^2_k + \mu^4_k, \qquad B'_6 = -(\tfrac{55}{72} - \tfrac{241}{60}\mu^2_k + \mu^4_k)\mu_k$$
$$\cdots\cdots\cdots;$$

$$d = \frac{\mu_k \varkappa \arcsin \Phi'[m_k t, \mu_k, 1]}{1 - \mu_k \arcsin \Phi'[m_k t, \mu_k, 1]},$$
$$u = c_2\{1 - \Phi'^2[m_k t, \mu_k, 1]\}^{1/2}.$$

Für grosse Werthe von t ist es zweckmässiger, v in der Form

$$v = c_2 \sin \frac{\alpha (r_{2k-1} - r)}{2 r r_{2k-1}},$$

also mit Hilfe der Substitutionen

$$k_1 = \frac{4}{(4k-1)\pi}, \quad r = \frac{\alpha k_1}{2(1+k_1 z)}$$

t in der Gestalt

$$t = \frac{\alpha k_1^2}{2 c_2} \int_z^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{(1+k_1 z)^2 \sin z}$$

darzustellen. Vernachlässigen wir $2k_1 z \sin z$, $k_1^2 z^2 \sin z$ als Grössen von der zweiten und dritten Ordnung der Kleinheit, so folgt nach der Gleichung

$$\int_z^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sin z} = \log \cotg \tfrac{1}{2} z$$

für z, d, u das Gleichungssystem

$$z = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{-\frac{2 c_2 t}{\alpha k_1^2}},$$

$$d = \frac{r_{2k-1}}{1 + 2k_1 \operatorname{arc\,tg} e^{-\frac{2 c_2 t}{\alpha k_1^2}}} - x,$$

$$u = \frac{2 e^{-\frac{c_2 t}{\alpha k_1^2}}}{1 + e^{-\frac{2 c_2 t}{\alpha k_1^2}}} c_2,$$

welche Ausdrücke, wenn wir $t = \infty$ setzen, wie anfänglich gefordert wurde, in

$$0, \; r_{2k-1} - x, \; 0$$

übergehen.

III. Hauptfall: $c_2 > 2 \sqrt{\frac{\varepsilon M}{\alpha}}$.

Eine diese letzte mögliche Bedingung erfüllende Anfangsgeschwindigkeit bewirkt eine bleibende Aufhebung des ursprünglichen Ruhezustandes. Bei positivem c_2 wächst der relative Abstand der Atome stetig bis ins Unendliche, indem $v_2 - v_1$ für alle Werthe von r positiv bleibt, in jeder auf r_{2k} folgenden labilen Gleichgewichtslage ein Minimum

$$\sqrt{c_2^2 - \frac{4 \varepsilon M}{\alpha}}$$

in jeder stabilen seinen anfänglichen Werth c_2 erreicht und, sobald r sich über r_0 vergrössert hat, der constanten endlichen Grenze

$$\sqrt{c_2^2 - \frac{2\varepsilon M}{\alpha}}$$

mit wachsendem t sich unendlich nähert.

Die vollständige Erledigung dieses Falles erfordert einerseits die Berechnung der zur Zurücklegung der Strecken

$$\begin{array}{llcl} r_{2k-1} - r_{2k}, & r_{2k-2} - r_{2k-1} & & \tau'_k, \quad \tau''_k, \\ r_{2k-3} - r_{2k-2}, & r_{2k-4} - r_{2k-3} & \text{nöthigen Zeiten} & \tau'_{k-1}, \ \tau''_{k-1} \\ \quad \cdots & & & \quad \cdots \\ r_{2k-2p-1} - r_{2k-2p}, & r_{2k-2p-2} - r_{2k-2p-1} & & \tau'_{k-p}, \ \tau''_{k-p} \\ \quad \cdots & & & \quad \cdots, \end{array}$$

andererseits der Werthe von d und u für irgend eine Zeit t, also für irgend eines dieser Intervalle. Die erstgenannten Grössen erscheinen zunächst als aus der allgemeinen Integralgleichung für t durch Vertauschung von x und r mit r_{2k}, r_{2k-1}; r_{2k-1}, r_{2k-2}... ableitbare Specialisirungen derselben, welche durch die Substitutionen

$$\mu_k = \frac{2r_{2k}}{\alpha}, \qquad r = \frac{\alpha\mu_k}{2(1-\mu_k u'_k)};$$

$$\mu_{k-1} = \frac{2r_{2k-2}}{\alpha}, \quad r = \frac{\alpha\mu_{k-1}}{2(1+\mu_{k-1}u''_k)};$$

$$r = \frac{\alpha\mu_{k-1}}{2(1-\mu_{k-1}u'_{k-1})};$$

$$\mu_{k-2} = \frac{2r_{2k-4}}{\alpha}, \quad r = \frac{\alpha\mu_{k-2}}{2(1+\mu_{k-2}u''_{k-1})}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\mu_{k-p} = \frac{2r_{2k-2p}}{\alpha}, \quad r = \frac{\alpha\mu_{k-p}}{2(1-\mu_{k-p}u'_{k-p})};$$

$$\mu_{k-p-1} = \frac{2r_{2k-2p-2}}{\alpha}, \quad r = \frac{\alpha\mu_{k-p-1}}{2(1+\mu_{k-p-1}u''_{k-p})}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

in die mit gleichen Grenzen versehenen bestimmten Integrale

$$\tau'_k = \frac{\alpha\mu^2_k}{2c_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{(1-\mu_k u)^2 \Delta u}, \qquad \tau''_k = \frac{\alpha\mu^2_{k-1}}{2c_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{(1+\mu_{k-1}u)^2 \Delta u};$$

$$\tau'_{k-1} = \frac{\alpha\mu^2_{k-1}}{2c_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{(1-\mu_{k-1}u)^2 \Delta u}, \quad \tau''_{k-1} = \frac{\alpha\mu^2_{k-2}}{2c_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{(1+\mu_{k-2}u)^2 \Delta u}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\tau'_{k-p} = \frac{\alpha\mu^2_{k-p}}{2c_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{(1-\mu_{k-p}u)^2 \Delta u}, \quad \tau''_{k-p} = \frac{\alpha\mu^2_{k-p-1}}{2c_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{(1+\mu_{k-p-1}u)^2 \Delta u}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

übergehen, in welchen der Kürze wegen

$$\text{73)} \qquad \frac{1}{l} = \lambda, \quad \sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 u} = \Delta u$$

gesetzt wurde. Hieraus lassen sich für τ'_{k-p}, τ''_{k-p} die allgemeinen Formeln

$$\text{74)} \qquad \begin{aligned} \tau'_{k-p} &= \frac{\alpha \mu^2_{k-p}}{2c_2} \{L_0 + 3\mu^2_{k-p} L_2 + 5\mu^4_{k-p} L_4 + \ldots\} \\ &+ \frac{\alpha \mu^3_{k-p}}{c_2} \{L_1 + 2\mu^2_{k-p} L_3 + 3\mu^4_{k-p} L_5 + \ldots\}, \end{aligned}$$

$$\text{75)} \qquad \begin{aligned} \tau''_{k-p} &= \frac{\alpha \mu^2_{k-p-1}}{2c_2} \{L_0 + 3\mu^2_{k-p-1} L_2 + 5\mu^4_{k-p-1} L_4 + \ldots\} \\ &- \frac{\alpha \mu^3_{k-p-1}}{c_2} \{L_1 + 2\mu^2_{k-p-1} L_3 + 3\mu^4_{k-p-1} L_5 + \ldots\}, \end{aligned}$$

$$\text{76)} \qquad L_m = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \lambda^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^m \sin^{2n} u \, du$$

ableiten, deren Specialisirung zur Kenntniss sämmtlicher τ führt. Bilden wir ferner die Summe $\tau'_{k-p} + \tau''_{k-p}$, so wird sofort ersichtlich, dass die Zeit, welche die relative Geschwindigkeit zur Herstellung ihres anfänglichen Werthes c_2 von einer stabilen Gleichgewichtslage zur nächsten für sich in Anspruch nimmt, mit abnehmendem Index von μ sprungweise wächst und v für $r = r_0$ zum letzten Male sein Maximum c_2 erhält, indem das Integral

$$\tau_0 = \frac{\alpha \mu_0^2}{2c_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\left(1 - \frac{4u}{\pi}\right)^2 \Delta u}$$

unendlich gross ist.

Was die Lösung der zweiten Frage betrifft, so folgen aus den Gleichungen

$$t - \sum_{s=0}^{s=p-1} (\tau'_{k-s} + \tau''_{k-s}) = t - T_{k-p+1}$$

$$= \frac{\alpha \mu_{k-p}}{2c_2} \int_0^{u'_{k-p}} \frac{1}{\Delta u'_{k-p}} d\left(\frac{1}{1 - \mu_{k-p} u'_{k-p}}\right),$$

$$\sum_{s=0}^{s=p} (\tau'_{k-s} + \tau''_{k-s}) - t = T_{k-p} - t$$

$$= \frac{\alpha \mu_{k-p-1}}{2c_2} \int_0^{u''_{k-p}} \frac{1}{\Delta u''_{k-p}} d\left(-\frac{1}{1 + \mu_{k-p-1} u''_{k-p}}\right)$$

analog den früheren Entwickelungen für u'_{k-p}, u''_{k-p} die Ausdrücke

$$77)\qquad u'_{k-p} = \arcsin \frac{1}{\lambda}\, \Phi'\left[m_{k-p}\,(t - T_{k-p+1}),\ \mu_{k-p},\ \frac{1}{\lambda}\right],$$

$$78)\qquad u''_{k-p} = \arcsin \frac{1}{\lambda}\, \Phi''\left[m_{k-p-1}\,(T_{k-p} - t),\ \mu_{k-p-1},\ \frac{1}{\lambda}\right],$$

so dass die Argumente dieser cyclometrischen Functionen den Reihen

$$79)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n^{(k-p)}\left[\frac{2c_2}{\alpha\,\mu^2_{k-p}}\,(t - T_{k-p+1})\right]^n,$$

$$80)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n-1}\, B_n^{(k-p-1)}\left[\frac{2c_2}{\alpha\,\mu^2_{k-p-1}}\,(T_{k-p} - t)\right]^n$$

äquivalent sind.

$B_1^{(k-p)}$, $B_2^{(k-p)}$, $B_3^{(k-p)}$ gehen aus dem Gleichungssysteme

$$B_1^{(k-p)} = 1,\quad B_2^{(k-p)} = -\,\mu_{k-p},$$

$$B_3^{(k-p)} = -\left\{\left(\tfrac{1}{6} - \mu^2_{k-p}\right) + \tfrac{1}{6}\lambda^2\right\},\quad B_4^{(k-p)} = \left\{\left(\tfrac{1}{2} - \mu^2_{k-p}\right) + \tfrac{7}{12}\lambda^2\right\}\mu_{k-p},$$

$$B_5^{(k-p)} = \left(\tfrac{1}{120} - \mu^2_{k-p} + \mu^4_{k-p}\right) + \tfrac{1}{10}\left(\tfrac{7}{6} - 13\,\mu^2_{k-p}\right)\lambda^2 + \tfrac{1}{120}\lambda^4,$$

$$B_6^{(k-p)} = -\left\{\left(\tfrac{1}{24} - \tfrac{5}{3}\mu^2_{k-p} + \mu^4_{k-p}\right) + \tfrac{1}{20}\left(\tfrac{229}{18} - 47\,\mu^2_{k-p}\right)\lambda^2 + \tfrac{31}{360}\lambda^4\right\}\mu_{k-p}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$B_1^{(k-p-1)}$, $B_2^{(k-p-1)}$, $B_3^{(k-p-1)}$ ... aus demselben Schema durch Vertauschung von p mit $p+1$ hervor. So erhalten wir schliesslich, auf die ursprünglichen Variabelen zurückgehend, die allgemeinen Resultate:

$$t = T_{k-p+1}:$$
$$d = r_{2k-2p} - r_{2k},\quad u = c_2;$$
$$T_{k-p+1} < t < T_{k-p+1} + \tau'_{k-p}:$$
$$d = \frac{r_{2k-2p}}{1 - \mu_{k-p}\, u'_{k-p}} - r_{2k},\quad u = c_2\, \Delta u'_{k-p};$$
$$t = T_{k-p+1} + \tau'_{k-p}:$$
$$d = r_{2k-2p-1} - r_{2k},\quad u = c_2\sqrt{1-\lambda^2};$$
$$T_{k-p+1} + \tau'_{k-p} < t < T_{k-p}:$$
$$d = \frac{r_{2k-2p-2}}{1 + \mu_{k-p-1}\, u''_{k-p}} - r_{2k},\quad u = c_2\, \Delta u''_{k-p};$$
$$t = T_{k-p}:$$
$$d = r_{2k-2p-2} - r_{2k},\quad u = c_2,$$

durch welche das in diesem Paragraphen gestellte Problem seinen Abschluss findet.

Ein Atompaar kann daher im Allgemeinen zwei Bewegungszustände zeigen:

A. Seine Bestandtheile oscilliren um in einer constanten Entfernung (irgend einer stabilen Gleichgewichtslage) beharrende Schwingungscentren, so dass der mittlere Abstand der Atome während einer Schwingungsdauer als eine constante Grösse erscheint;

B. sie zeigen die Tendenz einer stetigen Vergrösserung ihrer Distanz.

Welchen derselben das System annimmt, hängt von dem Werthe der einer stabilen Gleichgewichtsdistanz entsprechenden relativen Geschwindigkeit der Atomcentren ab. Durch eine endliche Vergrösserung derselben kann jedes Atompaar aus dem Zustande A in B übergeführt und umgekehrt durch eine entsprechende Verminderung dieser Geschwindigkeit aus dem letzteren in den ersteren zurückversetzt werden, d. h.:

Jeder zweiatomige Complex repräsentirt, je nachdem sich seine Atome periodisch oder nicht periodisch bewegen, entweder ein im weitesten Sinne des Wortes festes oder ein gasförmiges System.

Da c von α, der Charakteristik beider Atome, abhängt, so zeigen verschiedene aus denselben oder zwei heterogenen chemischen Elementen bestehende zweiatomige Complexe bei gleichen Geschwindigkeitsänderungen specifische Ausdehnungs- oder Contractionsverhältnisse bei festem oder gasförmigem Aggregatzustande.

Dass hiermit alle Verhältnisse erläutert worden sind, in welche zwei Atome lediglich infolge ihrer ursprünglichen räumlichen Positionen zu einander treten können, ist an sich klar; wir können uns daher unmittelbar zur Untersuchung der möglichen Beziehungen zwischen drei gegebenen Atomen wenden.

§ 6.

Bezeichnen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Radien, m_1, m_2, m_3 die Massen, $\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}$ die Charakteristiken dreier Atome, ferner $r_{1,2}, r_{1,3}, r_{2,3}$ die Abstände ihrer Mittelpunkte, so sind die zwischen denselben thätigen Kräfte ihren numerischen Werthen nach:

$$81)\quad \left\{\begin{aligned} K_{1,2} = K_{2,1} &= \frac{\varepsilon_{1,2}\, m_1 m_2}{r_{1,2}^2} \cos\frac{\alpha_{1,2}}{r_{1,2}},\\ K_{1,3} = K_{3,1} &= \frac{\varepsilon_{1,3}\, m_1 m_3}{r_{1,3}^2} \cos\frac{\alpha_{1,3}}{r_{1,3}},\\ K_{2,3} = K_{3,2} &= \frac{\varepsilon_{2,3}\, m_2 m_3}{r_{2,3}^2} \cos\frac{\alpha_{2,3}}{r_{2,3}}, \end{aligned}\right.$$

und ihre kleinsten möglichen Abstände:

$$82)\quad \delta_{1,2} = \varrho_1 + \varrho_2,\quad \delta_{1,3} = \varrho_1 + \varrho_3,\quad \delta_{2,3} = \varrho_2 + \varrho_3.$$

Was zunächst die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen eines derartigen Complexes anbelangt, so ergiebt sich mit Rücksicht darauf, dass $r_{1,2}, r_{1,3}, r_{2,3}$ innerhalb der Grenzen

$$\delta_{1,2},\ \infty;\quad \delta_{1,3},\ \infty;\quad \delta_{2,3},\ \infty$$

alle möglichen Werthe annehmen können, die Lösung dieses ersten Problems in folgenden Sätzen:



I. Drei Atome stehen miteinander im Gleichgewichte, wenn ihre Centrallinien innerhalb der eben angeführten Grenzen einem der Bedingungssysteme

I) $r_{1,2}+r_{1,3}>r_{2,3}$, $r_{1,3}+r_{2,3}>r_{1,2}$, $K_{1,2}=K_{1,3}=K_{2,3}=0$;

II) $r_{1,2}+r_{1,3}=r_{2,3}$, $K_{1,2}=K_{1,3}=K_{2,3}=0$;

III) $r_{1,2}+r_{1,3}=r_{2,3}$, $K_{1,3}+K_{2,3}=0$, $K_{1,2}=K_{1,3}$;

IV) $r_{1,2}+r_{2,3}=r_{1,3}$, $K_{1,2}=K_{1,3}=K_{2,3}=0$;

V) $r_{1,2}+r_{2,3}=r_{1,3}$, $K_{1,2}+K_{1,3}=0$, $K_{1,2}=K_{2,3}$;

VI) $r_{1,3}+r_{2,3}=r_{1,2}$, $K_{1,2}=K_{1,3}=K_{2,3}=0$;

VII) $r_{1,3}+r_{2,3}=r_{1,2}$, $K_{1,2}+K_{2,3}=0$, $K_{1,3}=K_{2,3}$

genügen. In den Fällen I), II), IV), VI) müssen also $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,3}$ die allgemeinen Werthe

$$r_{1,2}=\frac{2\alpha_{1,2}}{(2n_1+1)\pi},\quad r_{1,3}=\frac{2\alpha_{1,3}}{(2n_2+1)\pi},\quad r_{2,3}=\frac{2\alpha_{2,3}}{(2n_3+1)\pi}$$

besitzen und, soll das Gleichgewicht ein stabiles sein, n_1, n_2, n_3 gerade Zahlen $2p_1$, $2p_2$, $2p_3$ vorstellen; in allen übrigen Fällen erscheint dasselbe als ein labiles.

Ist speciell $\alpha_{1,2}=\alpha_{1,3}=\alpha_{2,3}$, d. h. besteht der Complex aus drei congruenten Atomen, so verhalten sich zufolge der Proportionen

$$83)\qquad r_{1,2}:r_{1,3}:r_{2,3}=\frac{1}{4p_1+1}:\frac{1}{4p_2+1}:\frac{1}{4p_3+1}$$

ihre Centrallinien im Zustande eines stabilen Gleichgewichts stets wie **rationale** Zahlen.

Die Gleichungssysteme III), V), VII) drücken wesentlich neue Verhältnisse aus, insofern hier ein Gleichgewichtszustand zwischen zwei einander anziehenden oder abstossenden Atomen lediglich aus der Anwesenheit eines dritten Atoms resultirt. Derselbe kann im Gegensatze zu den früher untersuchten Gleichgewichtsverhältnissen eines Atompaares, welche allein aus der Wechselwirkung seiner Bestandtheile hervorgingen, d. h. innerlich bedingt waren, als ein äusserlich bedingter bezeichnet werden. — Andererseits erscheint ein innerlich bedingtes Gleichgewicht zwischen zwei Atomen durch das Hinzutreten eines dritten aufgehoben, sobald keine der Bedingungsreihen I) bis VII) vollständig erfüllt wird.

II. Ein Complex aus einem zweiatomigen Molekül und einem Atom gebildet, befindet sich im Gleichgewichte, wenn die Centrallinien seiner Elemente eines der Bedingungssysteme

VIII, IX) $\delta_{1,2}\gtrless\pm(r_{1,3}-r_{2,3})$, $r_{1,3}+r_{2,3}>\delta_{1,2}$, $K_{1,2}\gtrless 0$, $K_{1,3}=K_{2,3}=0$;

X, XI) $\delta_{1,2}=\pm(r_{1,3}-r_{2,3})$, $K_{1,3}+K_{2,3}=0$, $K_{1,2}\pm K_{1,3}>0$;

XII, XIII) $\delta_{1,3}>\pm(r_{1,2}-r_{2,3})$, $r_{1,2}+r_{2,3}>\delta_{1,3}$, $K_{1,3}\gtrless 0$, $K_{1,2}=K_{2,3}=0$;

XIV, XV) $\delta_{1,3}=\pm(r_{1,2}-r_{2,3})$, $K_{1,2}+K_{2,3}=0$, $K_{1,3}\pm K_{1,2}\gtrless 0$;

XVI, XVII) $\delta_{2,3} \geqq \pm (r_{1,2} - r_{1,3})$, $r_{1,2} + r_{1,3} > \delta_{2,3}$, $K_{2,3} \geqq 0$, $K_{1,2} = K_{1,3} = 0$;
XVIII, XIX) $\delta_{2,3} = \pm (r_{1,2} - r_{1,3})$, $K_{1,2} + K_{1,3} = 0$, $K_{2,3} \pm K_{1,2} \geqq 0$

erfüllen, somit entweder $\delta_{1,2}$ oder $\delta_{1,3}$ oder $\delta_{2,3}$ die Relationen

$$\delta_{1,2} = \frac{\alpha_{1,2}}{2k_1\pi \pm \tau_1}, \quad 0 \leqq \tau_1 < \frac{\pi}{2},$$

$$\delta_{1,3} = \frac{\alpha_{1,3}}{2k_2\pi \pm \tau_2}, \quad 0 < \tau_2 \leqq \frac{\pi}{2},$$

$$\delta_{2,3} = \frac{\alpha_{2,3}}{2k_3\pi \pm \tau_3}, \quad 0 < \tau_3 \leqq \frac{\pi}{2}$$

befriedigen. Für ein stabiles Gleichgewicht müssen bei gleichen Voraussetzungen über n_1, n_2, n_3 in $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,3}$ wie unter I ausserdem die Fälle

$$\delta_{1,2} = \frac{\alpha_{1,2}}{(2k_1 - \frac{1}{2})\pi}, \quad \delta_1 = \frac{\alpha_{1,3}}{(2k_2 - \frac{1}{2})\pi}, \quad \delta_{2,3} = \frac{\alpha_{2,3}}{(2k_3 - \frac{1}{2})\pi}$$

ausgeschlossen werden.

Hier verdienen die Bedingungsreihen X, XI), XIV, XV), XVIII, XIX) ihrer merkwürdigen Consequenzen wegen eine besondere Beachtung; ihnen zufolge können nämlich einerseits

1. zwei chemisch verwandte Atome infolge der Gegenwart eines dritten ein zweiatomiges Molekül, d. h. je nachdem sie demselben oder verschiedenen Grundstoffen angehören, eine allotrope Modification oder eine binäre Verbindung erster Ordnung bilden;

andererseits, falls keine der angeführten Bedingungsgruppen ganz erfüllt wird:

2. ein aus zwei chemisch verwandten Atomen gebildetes Molekül durch die Fernwirkung eines dritten Atoms in seine Bestandtheile aufgelöst werden.

Es entwickelt sich so parallel mit dem Begriffe eines innerlich und äusserlich bedingten Gleichgewichts zweier getrennter Atome eine Unterscheidung zwischen innerlich und äusserlich bedingter chemischer Affinität zweier einander berührender Atome. Treten diese Verhältnisse speciell für drei congruente Atome ein, so ist klar, dass in einem so beschaffenen Complexe lediglich eine Aenderung der Abstände seiner Elemente eine theilweise allotrope Modification derselben nach sich ziehen kann.

III. Drei Atome bilden ein dreiatomiges Molekül in den Fällen:

XX) $\delta_{1,2} + \delta_{1,3} \geqq r_{2,3}$, $K_{2,3} = 0$, $K_{1,2}$, $K_{1,3} \geqq 0$;
XXI) $\delta_{1,2} + \delta_{1,3} = r_{2,3}$, $K_{1,2} + K_{2,3} \geqq 0$, $K_{1,3} + K_{2,3} \geqq 0$;
XXII) $\delta_{1,2} + \delta_{2,3} \geqq r_{1,3}$, $K_{1,3} = 0$, $K_{1,2}$, $K_{2,3} \geqq 0$;
XXIII) $\delta_{1,2} + \delta_{2,3} = r_{1,3}$, $K_{1,2} + K_{1,3} \geqq 0$, $K_{1,3} + K_{2,3} \geqq 0$;
XXIV) $\delta_{1,3} + \delta_{2,3} \geqq r_{1,2}$, $K_{1,2} = 0$, $K_{1,3}$, $K_{2,3} \geqq 0$;
XXV) $\delta_{1,3} + \delta_{2,3} = r_{1,2}$, $K_{1,2} + K_{1,3} \geqq 0$, $K_{1,2} + K_{2,3} \geqq 0$;
XXVI) $\delta_{1,2} + \delta_{1,3} > \delta_{2,3}$, $\delta_{1,3} + \delta_{2,3} > \delta_{1,2}$, $K_{1,2}$, $K_{1,3}$, $K_{2,3} > 0$,

so dass bezüglich eines stabilen Gleichgewichtszustandes analoge Einschränkungen wie in II gelten.

Da $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,3}$ innerhalb der Grenzen

$$\delta_{1,2},\ \delta_{1,3}+\delta_{2,3};\quad \delta_{1,3},\ \delta_{1,2}+\delta_{2,3};\quad \delta_{2,3},\ \delta_{1,2}+\delta_{1,3}$$

liegen, also in XX), XXII), XXIV) $K_{2,3}$, $K_{1,3}$, $K_{1,2}$ nur für eine endliche Anzahl von Abständen verschwinden können, so kann aus drei Atomen nur eine endliche Anzahl verschieden gestalteter dreiatomiger Moleküle entstehen.

Wie gross diese Anzahl ist und welche Gestalten dieselben in jedem gegebenen Specialfalle besitzen, kann, sobald die Charakteristiken und die Radien der sie constituirenden Atome bekannt sind, nach dem Vorhergehenden auf rein analytischem Wege bestimmt werden.

Nehmen wir z. B. der Einfachheit halber drei congruente Atome, deren charakteristischer Quotient

$$\frac{\alpha}{\delta}=2\pi-\tau,\quad 0<\tau<\frac{\pi}{2} \tag{84)}$$

sein mag, so ergiebt sich zunächst, dass $\frac{\alpha}{r}$ nur zwischen

$$2\pi-\tau \text{ und } \pi-\tfrac{1}{2}\tau$$

variiren, $\cos\frac{\alpha}{r}$ also innerhalb dieses Intervalles nur für

$$\frac{\alpha}{r}=\frac{3\pi}{2}$$

der Null gleich werden kann. Aus XXI), XXIII), XXV) folgt als weitere mögliche Gleichgewichtsbedingung, falls die Atomcentren in einer geraden Linie liegen:

$$\cos\frac{\alpha}{\delta}+\tfrac{1}{4}\cos\frac{\alpha}{2\delta},\quad \text{d. h.}\quad \cos\tau-\tfrac{1}{4}\cos\frac{\tau}{2}\geqq 0,$$

und hieraus durch Auflösung der Gleichung

$$\cos^2\tau-\tfrac{1}{32}\cos\tau=\tfrac{1}{32}$$

für τ:

$$\tau=1{,}37648.$$

Da ferner die Bedingungen XXVI) gleichfalls erfüllbar sind, so ergiebt sich das einfache Resultat:

Besteht für drei congruente Atome die Gleichung 84), so können sie, je nachdem

$$0<\tau<1{,}37648 \text{ oder } 1{,}37648<\tau<\frac{\pi}{2}$$

ist, entweder drei oder zwei verschieden gestaltete dreiatomige Moleküle von den Formen A, B, C (Taf. VI, Figg. 8, 9 und 10) constituiren.

Hierbei muss übrigens bemerkt werden, dass aus der Existenz eines dreiatomigen Moleküls keineswegs unbedingt auf eine chemische Affinität seiner Bestandtheile geschlossen werden darf, denn ein solches kann auch

dann entstehen, wenn sich dieselben paarweise chemisch inactiv verhalten. Ist z. B. für drei congruente Atome

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\pi}{2} + \tau, \quad 0 < \tau < \frac{\pi}{2}, \tag{85}$$

so wird die Bildung eines dreiatomigen Moleküls in den Gestalten A und C allerdings unmöglich, aber die zur Entstehung von B nothwendige Bedingung

$$\tfrac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2}\right) - \sin\tau > 0$$

für alle Werthe von τ giltig, welche zwischen

0 und 0,162555,

d. h. der positiven Wurzel der Gleichung

$$\sin^2\tau + \tfrac{1}{32}\sin\tau = \tfrac{1}{32}$$

liegen. Entsprechend den drei Möglichkeiten:

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3; \quad \varrho_1 = \varrho_2, \ \varrho_3 \gtrless \varrho_1, \varrho_2; \quad \varrho_1 \gtrless \varrho_2 \gtrless \varrho_3$$

können mithin drei Atome im Allgemeinen entweder eine allotrope Modification oder eine binäre Verbindung zweiter Ordnung oder eine ternäre Verbindung erster Ordnung in einer oder in mehreren Formen eingehen, welche letzteren zwar dieselbe qualitative und quantitative Zusammensetzung besitzen, aber auf irgend ein viertes Atom infolge ihrer verschiedenen Gestalt verschieden wirken, d. h. es müssen Isomerien erster, zweiter ... n^{ter} Art einer mehratomigen Verbindung unterschieden werden.

Vergleichen wir ferner, absehend von Verschiedenheiten der Gestalt, die einzelnen dreiatomigen Verbindungen bezüglich der qualitativen Verschiedenheiten ihrer Elemente, so wird irgend eine in Betracht gezogene Gruppe derselben entweder ein oder zwei Atome gemein haben oder heterogen zusammengesetzte Glieder besitzen.

Im ersten Falle lässt sich das der gesammten Verbindungsgruppe gemeinsame Atom als ein einfaches Radical derselben auffassen; im zweiten, wenn das der untersuchten Molekülreihe gemeinsame Atompaar in jedem ihrer Glieder als zweiatomiges Molekül auftritt, dieses als ihr zusammengesetztes, speciell zweiatomiges Radical bezeichnen.

Aus dem letzten Beispiele erhellt der Satz:

Zwei Grundstoffe können allgemein eine binäre Verbindung zweiter Ordnung eingehen, ohne dass für sie eine der ersten Ordnung existirt.

Wird keines der Bedingungssysteme XX) bis XXVI) vollständig erfüllt, so erfolgt bei der Berührung eines zweiatomigen Moleküls mit einem neuen Atom entweder gänzliche Trennung sämmtlicher Atome oder Vereinigung zweier derselben unter gleichzeitiger Abstossung des dritten. Im letzteren Falle verhält sich dann das Atompaar dem neu hinzutretenden Elemente gegenüber entweder gesättigt, oder es erfolgt eine chemische Vertretung eines seiner Bestandtheile durch das dritte Atom.

Findet diese Erscheinung der Sättigung speciell für ein aus den Grundstoffen A, B gebildetes zweiatomiges Molekül und ein zweites Atom B desselben Elements statt, so erscheint das Atom A in Bezug auf B einwerthig und die Einführung des Begriffes der Valenz demnach als eine nothwendige Forderung unserer Theorie. Eine nähere Charakteristik desselben wird übrigens erst durch die gleichzeitige Betrachtung von vier Atomen möglich.

Bezüglich des Verhaltens eines dreiatomigen, im Gleichgewichte befindlichen Complexes unter der Wirkung verschiebender Kräfte finden offenbar die in § 3 entwickelten Begriffe eine völlig analoge Anwendung; die Untersuchung seiner möglichen Bewegungserscheinungen sei den drei nächsten Paragraphen vorbehalten.

Kleinere Mittheilungen.

XXIV. Zur Integration partieller Differentialgleichungen.

Zu jeder gegebenen Gleichung mit partiellen Differentialquotienten lässt sich je nach Bedarf eine Reihe anderer Gleichungen aufstellen, denen die gesuchte Abhängige ebenfalls genügen muss. Es sind dies die identischen Gleichungen

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{dy} dy + \ldots, \\ d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d^m z = \frac{\partial^m z}{\partial x^m} dx^m + \ldots \end{array}\right.$$

und alle, welche sich aus diesen ableiten lassen.

Eliminirt man man mit Hilfe dieser die Differentialquotienten aus der gegebenen Gleichung, so erhält man gewisse Beziehungen zwischen den Grössen $x, y, z \ldots$ und deren Differentialen $dx, dy, dz \ldots$, welche zu dem allgemeinen Integrale führen.

Z. B.: Es sei

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$$

gegeben, welche mit

$$dx \frac{\partial z}{\partial x} + dy \frac{\partial z}{\partial y} = dz$$

vergleichbar ist. Multiplicirt man die letztere behufs Elimination mit λ und subtrahirt, so folgt

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} = \frac{1}{\lambda},$$

Gleichungen, welche mit den nach der gewöhnlichen Methode erhaltenen identisch sind.

Es liegt nahe, statt λ den Factor $\frac{1}{d\lambda}$ zu setzen, damit die Resultate homogen werden; damit ist aber an der Sache selbst Nichts ge-

ändert, wenn man wie gewöhnlich verfährt. Man kann aber nun x, y, z .. durch λ darstellen, indem man sogleich integrirt, und erhält in unserem Falle

$$x-\alpha=a\lambda, \quad y-\beta=b\lambda, \quad z-\gamma=c\lambda,$$

welche zusammen eine richtige Auflösung geben.

Es handelt sich nur noch darum, wie man die so erhaltenen Gleichungen zu verbinden habe, um alle möglichen Auflösungen zu erhalten.

Um dies genau zu übersehen und weil wir überhaupt Differentialgleichungen aller Ordnungen auf die Integration linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen, wollen wir eben diese etwas genauer betrachten.

Um also die Gleichung

$$X\frac{\partial z}{\partial x}+Y\frac{\partial z}{\partial y}=Z$$

aufzulösen, worin X, Y, Z gegebene Functionen von x, y, z darstellen, setzen wir

$$\frac{\partial z}{\partial x}=u, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=v,$$

dann ist

$$dz=u\,dx+v\,dy.$$

Es muss aber auch $uX+vY=Z$, daher $v=\frac{Z-uX}{Y}$ sein; also ist

$$dz=u\,dx+\frac{Z-uX}{Y}\,dy.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$Y\,dz-Z\,dy=u\,(Y\,dx-X\,dy)$$

und setzt für den Augenblick voraus, dass

$$Y\,dz-Z\,dy \text{ sowohl, als } Y\,dx-X\,dy$$

integrabel seien, und zwar

$$Y\,dz-Z\,dy=d\varphi_1, \quad Y\,dx-X\,dy=d\varphi_2,$$

so sieht man sofort, dass die Gleichung

$$d\varphi_1=u\,.\,d\varphi_2$$

integrirbar ist, wenn u eine Function von φ_2 ist. Es ist also

$$\varphi_1=F(\varphi_2)$$

eine Auflösung der gegebenen Differentialgleichung. Würde man u eliminiren, so erhielte man

$$X\,dz-Z\,dx=v\,(X\,dy-Y\,dx);$$

wenn wir also

$$X\,dz-Z\,dx=d\varphi_3$$

setzen, ist auch

$$\varphi_3=F_1\,(\varphi_2)$$

eine Auflösung, folglich auch

$$\varphi_3=F_2(\varphi_1)$$

und, wie man leicht bemerkt, auch

$$0=f\,(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3).$$

Sind nun die gefundenen Ausdrücke nicht ohne Weiteres integrabel, so kann man sie, wie das Vorhergehende nachweist, auch so combiniren, dass man integrable Ausdrücke erhält. Je drei derselben können dann die drei $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$ ersetzen.

Nach unserer Methode hätte man erhalten

$$\frac{dx}{d\lambda} = X, \quad \frac{dy}{d\lambda} = Y, \quad \frac{dz}{d\lambda} = Z.$$

Enthält X nur x, Y desgleichen nur y und Z nur z, so kann man ohne Weiteres integriren

$$2) \qquad \lambda = \int \frac{dx}{X}, \quad \lambda = \int \frac{dy}{Y}, \quad \lambda = \int \frac{dz}{Z}.$$

In diesem Falle sind auch die $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$ integrabel und das Resultat der Elimination von λ aus je zwei von den obigen Gleichungen kann sich nur durch eine Constante von φ_1, φ_2, φ_3 unterscheiden. Was für Operationen aber auch gemacht werden müssen, um aus den $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$ integrirbare Ausdrücke zu erhalten, so wird doch der Factor $\frac{1}{d\lambda}$ davon nicht alterirt. Ist es also vortheilhafter, x, y, z zuerst durch λ auszudrücken, so kann man nach der Integration ohne Weiteres restituiren, wenn dies nur so geschieht, dass dabei alle λ verschwinden und sämmtliche Integrationsconstanten explicite erscheinen; denn das Letztere ist die wichtigste Eigenschaft der Functionen φ_1, φ_2, φ_3.

Damit ist auch der Weg angegeben, wie man von den Gleichungen 2) zu dem allgemeinen Integrale gelangt.

(Anm. Bei Gleichungen mit n Unabhängigen bilden $\frac{n+1.n}{2}$ Functionen φ das allgemeinste Integral.)

Beispiele.

$$1) \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad \frac{dx}{d\lambda} = x, \quad \frac{dy}{d\lambda} = y, \quad \frac{dz}{d\lambda} = z,$$

$$x = \alpha e^{\lambda}, \quad y = \beta e^{\lambda}, \quad z = \gamma e^{\lambda}, \quad 0 = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right);$$

$$2) \qquad a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad x - \alpha = a\lambda, \quad y - \beta = b\lambda, \quad z = \gamma e^{\lambda},$$

$$\varphi_1 = ay - bx, \quad z = \gamma e^{\frac{y}{b}}, \quad z^b . e^{-y} = \gamma, \quad z^a . e^{-x} = \gamma,$$

$$0 = f(ay - bx, \ z^a . e^{-x}, \ z^b . e^{-y});$$

$$3) \quad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = a\sqrt{x^2+y^2}, \quad x = \alpha e^{\lambda}, \quad y = \beta e^{\lambda}, \quad \frac{dz}{d\lambda} = a e^{\lambda}\sqrt{\alpha^2+\beta^2},$$

$$z - \gamma = a e^{\lambda}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad z - a\sqrt{x^2+y^2} = \gamma,$$

$$0 = f\left(\frac{y}{x}, \ z - a\sqrt{x^2+y^2}\right);$$

4) $$zy\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z,\quad y=\beta e^{\lambda},\ z=\gamma e^{\lambda},\ \frac{dx}{d\lambda}=zy=\beta\gamma e^{2\lambda},$$

$$x-\alpha=\beta\gamma\frac{e^{2\lambda}}{2}=\frac{zy}{2},$$

$$0=f\left(\frac{z}{y},\ x-\frac{zy}{2}\right).$$

5) Setzt man, um

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

zu integriren,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=u\sqrt{z}\quad\text{und daher}\quad\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{z}}{u},$$

so ist

$$\alpha)\qquad \frac{dz}{\sqrt{z}}=u\,dx+\frac{dy}{u}.$$

die vollständige Differentialgleichung für z — u, welches beliebig ist, wählen wir so, dass diese Gleichung integrabel wird, d. h. dass

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\right)\quad\text{oder}\quad\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

Daraus folgt

$$\frac{du}{d\lambda}=0,\quad\frac{dy}{d\lambda}=1,\quad\frac{dx}{d\lambda}=\frac{1}{u^2},$$

und nach Integration

$$u=\delta,\quad y-\beta=\lambda,\quad x-\alpha=\frac{\lambda}{u^2}.$$

Alle u, welche obige Gleichung integrabel machen, sind also in der Beziehung

$$y-u^2x=f(u)$$

enthalten und können explicite nicht dargestellt werden. Gleichwohl kann ein allgemeines Integral der gegebenen Gleichung hergestellt werden. Entwickelt man nämlich aus der letzten Gleichung dy und setzt es in α) ein, so muss diese Gleichung integrabel sein. Dann wird also die Auflösung der gegebenen Differentialgleichung durch zwei gleichzeitige Beziehungen dargestellt, aus welchen u eliminirt werden muss.

In der That ist

$$dy=2ux\,du+u^2\,dx+f'(u)\,du,$$

daher

$$\frac{dz}{\sqrt{z}}=2u\,dx+2x\,du+\frac{f'(u)}{u}\,du,$$

folglich

$$\sqrt{z}=ux+F(u),\quad\text{wenn}\quad y-u^2x=2u\,F(u)-2\int F(u)\,du.$$

(Schon Lagrange sprach den Gedanken aus, die Variabeln als Functionen einer fremden Veränderlichen darzustellen, blieb aber bei den Gleich-

ungen $\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda}, \frac{dz}{d\lambda} \dots$ stehen, ohne dieselben zu integriren. Hätte er diesen Gedanken gefasst, so wäre er unfehlbar zu nachstehender Methode gelangt.)

Bei Gleichungen höherer Grade und beispielsweise bei der nachstehenden:

$$1)\qquad A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = P,$$

gestaltet sich die Sache sehr einfach, wenn man die Variabeln als von zwei Veränderlichen λ und λ' abhängig sich vorstellt. Man erhält infolge dieser Vorstellung

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda},\quad \frac{\partial z}{\partial \lambda'} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \lambda'} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda'},$$

und wenn man multiplicirt:

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \lambda'} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \lambda'} + \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda'} + \frac{\partial x}{\partial \lambda'}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda'},$$

welche mit der gegebenen identisch ist, wenn

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial z}{\partial \lambda'} = P,\quad \frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \lambda'} = A,\quad \frac{\partial x}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda'} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial x}{\partial \lambda'} = B,\quad \frac{\partial y}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial y}{\partial \lambda'} = C,$$

welche Gleichungen immer möglich sind. Man findet aus ihnen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \lambda} = \xi_1,\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \eta_1,\ \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \zeta_1, \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda'} = \xi_2,\ \frac{\partial y}{\partial \lambda'} = \eta_2,\ \frac{\partial z}{\partial \lambda'} = \zeta_2, \end{array}\right\}\ \text{so dass}\quad \begin{array}{ll} \xi_1\xi_2 = A, & \eta_1\eta_2 = C, \\ \zeta_1\zeta_2 = P, & \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 = B. \end{array}$$

Aus ihnen folgt

$$\left\{\begin{array}{l} dx = \xi_1\,d\lambda + \xi_2\,d\lambda', \\ dy = \eta_1\,d\lambda + \eta_2\,d\lambda', \\ dz = \zeta_1\,d\lambda + \zeta_2\,d\lambda'. \end{array}\right.$$

Wenn diese Gleichungen gleichzeitig existiren sollen, so muss sein

$$0 = \begin{vmatrix} dx, & \xi_1, & \xi_2 \\ dy, & \eta_1, & \eta_2 \\ dz, & \zeta_1, & \zeta_2 \end{vmatrix},$$

was sofort eine Auflösung der gegebenen Gleichung ist.

In der letzten Gleichung ist nur eine von den Grössen $\xi_1 \dots \zeta_2$ beliebig, welche wieder so bestimmt wird, dass man integriren kann. Das weitere Verfahren ist dasselbe, wie in Beispiel 5).

Um die Gleichung

$$2)\qquad A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + B\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} = P$$

zu integriren, entwickelt man wie oben

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_3}$$

und bestimmt die Quotienten

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_1}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda_2}, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda_3} \cdots$$

aus der Gleichung

$$3) \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial z}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial z}{\partial \lambda_3} = P,$$

wodurch man erhält

$$4) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = \xi_1, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} = \xi_2, \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda_3} = \xi_3, \quad \xi_1 \xi_2 = A, \quad \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1 = B, \quad \eta_1 \eta_2 = C, \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = \eta_1, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} = \eta_2, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_3} = \eta_3, \quad \xi_3 = D, \quad \eta_3 = E, \quad \zeta_1 \zeta_2 + \zeta_3 = P, \\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = \zeta_1, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_2} = \zeta_2, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_3} = \zeta_3, \end{cases}$$

somit

$$5) \quad \begin{cases} dx = \xi_1 \, d\lambda_1 + \xi_2 \, d\lambda_2 + \xi_3 \, d\lambda_3, \\ dy = \eta_1 \, d\lambda_1 + \eta_2 \, d\lambda_2 + \eta_3 \, d\lambda_3, \\ dz = \zeta_1 \, d\lambda_1 + \zeta_2 \, d\lambda_2 + \zeta_3 \, d\lambda_3. \end{cases}$$

Nun ist in der ersten Verticalreihe in 4) die Integration von

$$\xi_1 \frac{\partial z}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial z}{\partial y} = \zeta_1,$$

desgleichen in den anderen resp. jene von

$$\xi_2 \frac{\partial z}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial z}{\partial y} = \zeta_2 \quad \text{und} \quad \xi_3 \frac{\partial z}{\partial x} + \eta_3 \frac{\partial z}{\partial y} = \zeta_3$$

enthalten. Diese müssen offenbar gleichzeitig gelten, sonst könnte 3) nicht erfüllt werden; es ist also

$$0 = \begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3 \end{vmatrix},$$

also muss wegen 5) auch sein

$$0 = \begin{vmatrix} dx, & \xi_2, & \xi_3 \\ dy, & \eta_2, & \eta_3 \\ dz, & \zeta_2, & \zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1, & dx, & \xi_3 \\ \eta_1, & dy, & \eta_3 \\ \zeta_1, & dz, & \zeta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & dx \\ \eta_1, & \eta_2, & dy \\ \zeta_1, & \zeta_2, & dz \end{vmatrix},$$

welches die Auflösungen von 2) sind. Von diesen Gleichungen ist eine überflüssig, d. h. eine nothwendige Folge der beiden anderen, über deren Eigenschaften ich erst in der vollständigen Abhandlung berichten kann, welche bereits ihrem Abschlusse entgegengeht.

Wenn man nach den angegebenen Regeln verfährt, so erhält man z. B. für

$$p^2 + q^2 + zxp + zyq = (x+y)^2 z^2:$$

$$dz = \frac{\zeta x + iy\sqrt{\omega}}{r^2}\,dx + \frac{\zeta y - xi\sqrt{\omega}}{r^2}\,dy,$$

$$(\omega = \zeta^2 + r^2\,[\zeta z - (x+y)^2 z^2]),$$

für welche ziemlich verwickelte Beziehungen noch ζ so zu wählen ist, dass der Ausdruck für dz integrirbar wird.

Wien, 13. April 1873. VICTOR SERSAWY.

XXV. Zurückführung des Beharrungsvermögens auf die Newton'sche Anziehungskraft.

(Hierzu Taf. VI, Fig. 11.)

Ein Körper ist im Gleichgewicht, wenn die auf ihn wirkenden Kräfte sich zu einer Resultirenden und einem Kräftepaar zusammensetzen, die beide gleich Null sind. Man sieht es dabei aber als selbstverständlich an, dass von denjenigen Kräften abgesehen wird, deren Wirksamkeit auf eine mehr oder weniger grosse Umgebung des betreffenden Körpers gleichmässig ist. Allein deshalb ist die Wirkung solcher Kräfte nicht weniger vorhanden und ihre Bedeutung nicht weniger gross. Bedenken wir nun, dass jeder materielle Punkt von jedem materiellen Punkte des Universums angezogen wird, so liegt die Frage nahe, welches denn die Wirkung dieser unendlich vielen Kräfte sei. Wir wollen hier nur die eine Seite der Frage ins Auge fassen, nämlich die Veränderungen, die durch die Bewegung eines Körpers in seinen Beziehungen zum Universum eintreten.

Wenn wir einen Theil der Erdoberfläche betrachten, so sind alle Theile desselben im Allgemeinen als im relativen Gleichgewicht sich befindend anzusehen. Allein jeder einzelne materielle Punkt und damit auch jeder Körper ist es nur für seinen Ort. Auch hier wird er von allen Seiten angezogen, indem die ganze Weltmaterie auf ihn wirkt. Da aber die Resultirende des einen Körpers sich nicht von den Resultirenden der benachbarten unterscheidet, so findet keine relative Ortsveränderung statt. Nun ist aber die Einwirkung der gesammten Weltmaterie in jedem andern Punkte anders, da ja die Beziehung zum Universum für jeden Punkt verschieden ist. Daraus folgt, dass ein Körper, wenn er, ohne die geringste Veränderung zu erleiden, von einem Orte an einen andern gebracht werden könnte, hier nicht im Gleichgewicht sein würde.

Da wir aber die Veränderungen in den Beziehungen desselben Körpers, wenn er sich bewegt, zu dem gesammten Universum fast gar nicht kennen, so wollen wir ein und denselben Punkt betrachten, in welchen aber verschiedene Theile eines bewegten Körpers treten, in welchem dagegen die Beziehungen zum Universum dieselben bleiben, insofern nicht durch die Bewegung des Körpers Veränderungen eingetreten sind.



Wir denken uns eine Kugel (etwa einen Himmelskörper), die von den nächsten Körpern bedeutende Entfernungen hat und durch Materie von so geringer Dichtigkeit getrennt ist, dass sie durch dieselbe in ihrer Bewegung nicht merkbar gestört werden kann. (Fig. 11.) Zur Zeit t sei der Mittelpunkt der Kugel in c und p sei ein beliebiger Punkt der Kugel. Durch irgend eine Kraft bewege sich nun die Kugel in der Zeit dt von c bis c'; der materielle Punkt in p bewege sich infolge dessen von p bis p'. Alsdann ist $pp' = cc' = dx$. Die Kraft hat aufgehört zu wirken. Nun bewegt sich nach dem Trägheitsgesetze die Kugel in der Richtung cc' mit der erlangten Geschwindigkeit beständig fort. Wie ist dieses zu erklären, wenn das Beharrungsvermögen eine Folge der Newton'schen Anziehungskraft sein soll?

Wenn zur Zeit t die Kugel in Ruhe ist, so sind alle Kräfte im Gleichgewicht. Dieses gilt sowohl von der Kugel im Ganzen, als auch von jedem materiellen Punkte der Kugel, wobei wir von den Molecularbewegungen absehen, da sie unsere Folgerungen nicht berühren. Zur Zeit t nun unterliegt der materielle Punkt in p' den anziehenden Kräften, welche von der Weltmaterie ausser der Kugel ausgehen und die wir $a_{p'}$ nennen wollen, und den Kräften, die von der Kugel selbst ausgehen. Die Componente von $a_{p'}$ parallel cc' heisse $\alpha_{p'}$. Ist die Dichtigkeit der Kugel μ und m die Masse des Punktes in p', so ist

$$f.m.\mu \frac{\frac{4}{3}\pi\, p'c^3}{p'c^2} = \tfrac{4}{3} f.m.\mu.\pi.p'c$$

die Kraft, womit die Kugel den materiellen Punkt anzieht. Wir haben aber nur die Kräfte zu berücksichtigen, welche parallel cc' wirken, da die anderen Componenten durch diejenigen symmetrisch gelegener Punkte aufgehoben werden. Mithin erhalten wir

$$\tfrac{4}{3}.f.m.\mu.\pi.p'c.\cos\omega \text{ oder } \tfrac{4}{3}.f.m.\mu.\pi.\partial c.$$

Zur Zeit t unterliegt also die Masse m im Punkte p' dem Kräftesystem

$$m\left[\alpha_{p'} + \tfrac{4}{3}.f.\mu.\pi.\partial c\right].$$

Da aber zur Zeit t Gleichgewicht ist, so haben wir

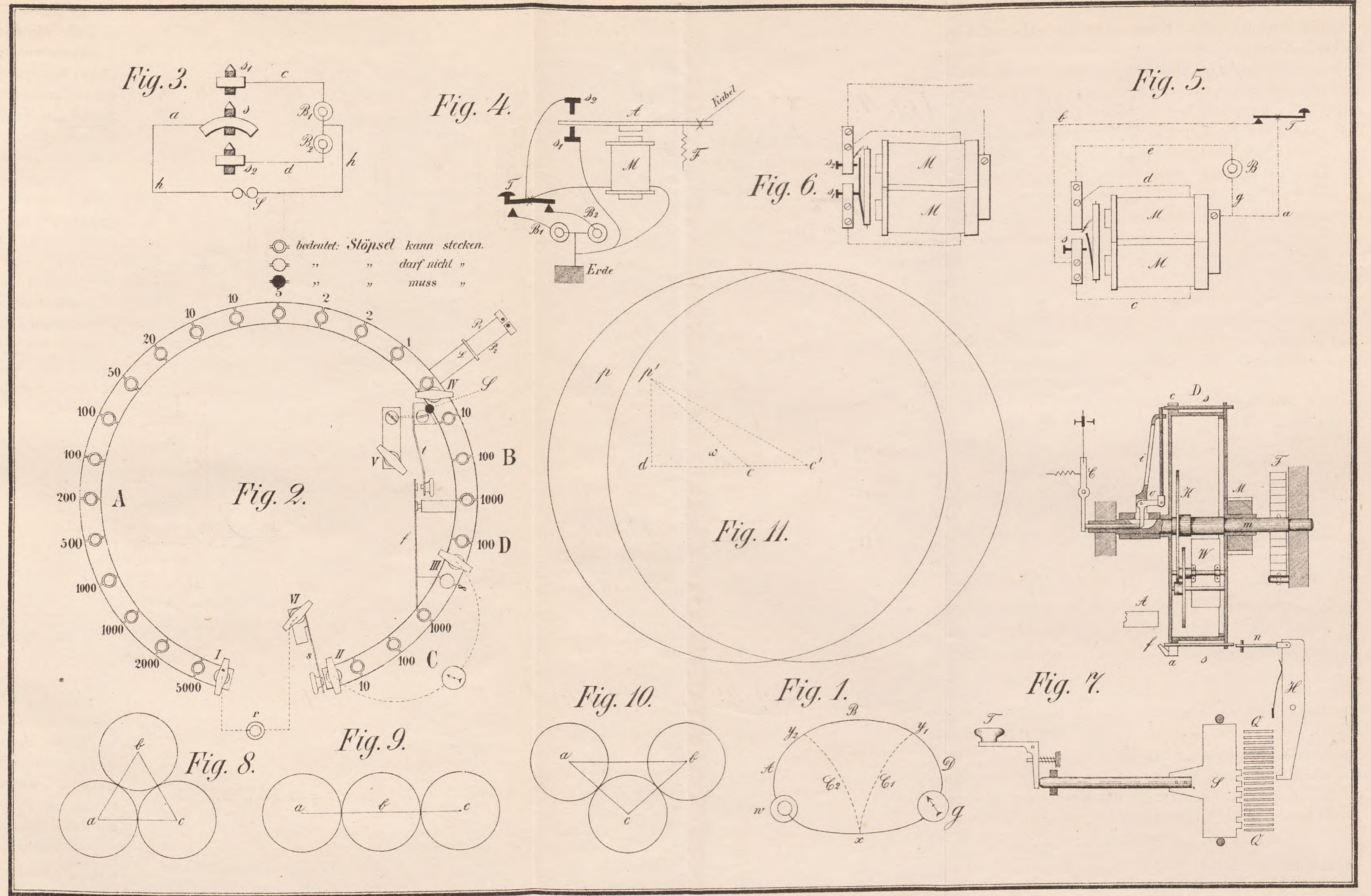
$$\text{I)} \qquad \alpha_{p'} + \tfrac{4}{3}.f.\mu.\pi.dc = 0.$$

Der materielle Punkt, welcher zur Zeit t in p war, kommt zur Zeit $(t+dt)$ nach p'. Zu derselben Zeit ist c in c'. Das System der anziehenden Kräfte, die jetzt auf den materiellen Punkt in p' wirken, wofern wir von der Kugel selbst absehen, wollen wir $\alpha'_{p'}$, ihre Componente parallel cc' dagegen $\alpha'_{p'}$ nennen. Ist die Masse wiederum m, so wird der materielle Punkt in p' von der Kugel in der cc' parallelen Richtung mit der Kraft

$$\tfrac{4}{3}.f.\mu.m.\pi.dc'$$

angezogen. Zur Zeit $(t+dt)$ unterliegt demnach die Masse m im Punkte p' dem Kräftesystem

$$m\left[\alpha'_{p'} + \tfrac{4}{3}.f.\mu.\pi.\partial c'\right]$$



Lithogr. v. Georg Heise, Dresden.

oder, mit Benutzung von Gleichung I), dem Kräftesystem

II) $$m\,[\alpha'_{p'} - \alpha_{p'} + \tfrac{4}{3} \,.\, f \,.\, \mu \,.\, \pi \,.\, dx].$$

Untersuchen wir nun $\alpha'_{p'}$ und $\alpha_{p'}$. $\alpha_{p'}$ bedeutet die Componente der im Punkte p' zur Zeit t wirkenden Kräfte der Weltmaterie, $\alpha'_{p'}$ die Componente nach derselben Richtung der in demselben Punkte p' wirkenden Kräfte derselben Weltmaterie zur Zeit $(t + dt)$. Wäre mit der Materie ausserhalb der Kugel in der Zeit von t bis $(t + dt)$ keine Veränderung vorgegangen, so wäre $\alpha'_{p'} = \alpha_{p'}$, da der Punkt derselbe geblieben ist. Während aber die Kugel von c bis c' sich bewegt, ist nothwendig eine Ortsveränderung der Materie ausserhalb der Kugel eingetreten. Die Masse der Kugel steht mit jedem materiellen Punkte ausserhalb der Kugel auch mit noch so weit entfernten Punkten durch anziehende Kräfte in Verbindung. Denken wir uns nun durch p' eine Ebene E gelegt, die senkrecht auf cc' steht, und nennen wir die Seite nach der Richtung der Bewegung die rechte, die andere die linke Seite, so wird in der Zeit zwischen t und $t + dt$ Materie von der linken Seite von E nach der rechten gezogen. Infolge dessen wird zur Zeit $t + dt$ der materielle Punkt m in p' stärker nach rechts gezogen als zur Zeit t. Ausserdem entfernt sich die Kugel durch ihre Bewegung von der Materie links von E, nähert sich aber der Materie rechts von E, wobei zu beachten, dass p' und somit auch die Ebene E sich nicht bewegt. Die Folge davon ist, dass die Anziehungskraft in demselben Punkte p' nach rechts grösser, nach links kleiner wird. Zwar ist in den von dem Körper verlassenen Raum links von E andere Materie getreten, um deren Anziehungskraft die nach links ziehende Kraft vermehrt worden ist; allein dieses kommt wegen der unbedeutenden Dichtigkeit der den Körper umgebenden Materie nicht in Betracht. Ist nun die rechte Seite die positive, so ist $\alpha'_{p'} - \alpha_{p'}$ positiv.

Nehmen wir dt und mithin auch dx unendlich klein und v oder $\frac{dx}{dt}$ constant, so ist kein Grund vorhanden, weshalb nicht α gleichförmig zunehmen sollte; es ist also $\alpha'_{p'} - \alpha_{p'}$ proportional dx und mithin auch v proportional. Setzen wir daher

$$\alpha'_{p'} - \alpha_{p'} = \varphi(\alpha) \,.\, dx,$$

so erhalten wir

III) $$m\,dx\,[\varphi(\alpha) + \tfrac{4}{3} \,.\, f \,.\, \mu \,.\, \pi]$$

für II) oder

$$m \,.\, v \,.\, dt\,[\varphi(\alpha) + \tfrac{4}{3} \,.\, f \,.\, \mu \,.\, \pi].$$

Es ist $\frac{4}{3}\pi \,.\, \mu \,.\, dx = \frac{\frac{4}{3}\pi \,.\, \mu \,.\, dx^3}{dx^2}$. Das zweite Glied in II) ist also die Anziehungskraft einer Kugel mit dem Radius dx auf ihrer unmittelbaren Oberfläche. Diese Anziehungskraft ist proportional dem Radius. Bedenkt man nun, dass die Erde auf ihrer Oberfläche einem Körper in einer Secunde die Geschwindigkeit von kaum 10 M. ertheilt, so ergiebt sich, dass im Allgemeinen und zumal für kleinere dx der zweite Theil in II) und III)

sehr klein ist und zur Erhaltung der Bewegung eines in Bewegung begriffenen Körpers nur verschwindend wenig beitragen kann. Es muss also $\varphi(\alpha)$ im Vergleiche zu $\frac{4}{3}.f.\mu.\pi$ sehr gross sein. Da wir angenommen haben, dass die Kugel von Materie umgeben sei, deren Dichtigkeit so unbedeutend ist, dass sie durch ihren Widerstand die Bewegung der Kugel nicht merkbar stören kann, so ist die Wirkung, welche durch die veränderten Beziehungen der Kugel zu ihrer nächsten Umgebung hervorgebracht wird, gegen $\frac{4}{3}.f.\mu.\pi.dx$ jedenfalls verschwindend klein. Soll nun dessenungeachtet $\varphi(\alpha)$ im Vergleiche zu $\frac{4}{3}.f.\mu.\pi$ sehr gross sein, so muss die Welt entweder unendlich gross sein, oder doch eine Grösse haben, gegen die die uns bekannten Entfernungen etwa des Mondes und der Sonne verschwindend klein sind. Ist dieses aber der Fall, so wird auch für alle Punkte der Kugel $\varphi(\alpha)$ gleich sein.

Es ergiebt sich daher für die Gesammtheit der Kräfte, die die Kugel zur Zeit $(t+dt)$ in der Richtung cc' ziehen:

$$\Sigma m\,.\,v\,dt\left[\varphi(a)+\tfrac{4}{3}.f.\mu.\pi\right]$$

oder, wenn M die Masse der Kugel bedeutet:

$$\text{IV)}\qquad M\,.\,v\,dt\left[\varphi(\alpha)+\tfrac{4}{3}f.\mu.\pi\right].$$

Ist zur Zeit t die Kugel nicht im Gleichgewicht, so bedeutet auch dann IV) den Zuwachs der Kraft. Nimmt man nun IV) als Aequivalent der in der Zeit dt verrichteten Arbeit, so wird die treibende Kraft und damit auch die Bewegung der Kugel dieselbe bleiben.

Man übersehe nicht den Unterschied zwischen dem vorliegenden Falle und der beschleunigten Bewegung eines Körpers, auf welchen eine constante Kraft wirkt.

Vernachlässigen wir in IV) das zweite Glied, so erhalten wir

$$\varphi(\alpha)\,.\,\mu\,.\,v\,dt,$$

welcher Ausdruck mit der Erfahrung übereinstimmt.

Da nach dem Obigen die Geschwindigkeit der folgenden Bewegung unabhängig ist von der Grösse und der Dichtigkeit der Kugel, so erhalten wir dasselbe Resultat, wenn wir eine Kugel mit noch so kleinem Radius zu Grunde legen. Es gilt also das Obige auch von Atomen, mithin auch von jedem aus Atomen zusammengesetzten Körper.

Boppard. GILLES, Progymnasiallehrer.

XXVI. Ueber bedingt-convergirende Reihen.

Nach einem von Herrn Prof. Scheibner entwickelten Satze besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung für die absolute Convergenz einer Reihe darin, dass die Reihe auch dann convergirt, wenn statt der einzelnen Glieder deren absolute Werthe, resp. deren Moduli gesetzt werden.*

* Ueber unendliche Reihen und deren Convergenz. Gratulationsschrift von Prof. Dr. Scheibner. Leipzig, Hirzel. 1860. (§ 7.)



Aus dem Beweise des genannten Satzes ersieht man gleich, dass jene Bedingung keine Erleichterung gestattet, so lange der Begriff der absoluten Convergenz allgemein aufgefasst und demnach jede beliebige regellose Umstellung der Reihenglieder erlaubt wird; anders dagegen gestaltet sich die Sache, wenn man die speciellere Voraussetzung macht, dass die Summe der Reihe ungestört bleiben solle, sobald immer p positive und q negative Glieder aufeinander folgen. Dieser Forderung kann, wie das Folgende zeigt, genügt werden, auch wenn die Reihe der absoluten Werthe nicht convergirt.

Bezeichnet $f(x)$ eine bei wachsendem x abnehmende und positiv bleibende Function von x, deren asymptotischer Werth $f(\infty)=0$ ist, so convergirt bekanntlich die Reihe

$$f(0)-f(1)+f(2)-f(3)+\dots;$$

ihre Summe heisse s. Dagegen soll unter S die Summe der neuen Reihe verstanden werden, welche aus der obigen Reihe dadurch hervorgeht, dass man immer p positive und q negative Glieder aufeinander folgen lässt. Setzt man zur Abkürzung $f(x)=u_x$, so ist s der für $m=\infty$ entstehende Grenzwerth von

$$s_{2m}=u_0-u_1+u_2-u_3+\dots+u_{2m-2}-u_{2m-1}$$

und S der für $n=\infty$ zum Vorschein kommende Grenzwerth von

$$\begin{aligned}S_{(p+q)n}=\;&u_0 &&+u_2 &&+u_4 &&+\dots+u_{2p-2}\\&-u_1 &&-u_3 &&-u_5 &&-\dots-u_{2q-1}\\&+u_{2p} &&+u_{2p+2} &&+u_{2p+4} &&+\dots+u_{4p-2}\\&-u_{2q+1} &&-u_{2q+3} &&-u_{2q+5} &&-\dots-u_{4q-1}\\&+u_{4p} &&+u_{4p+2} &&+u_{4p+4} &&+\dots+u_{6p-2}\\&-u_{4q+1} &&-u_{4q+3} &&-u_{4q+5} &&-\dots-u_{6q-1}\\&\cdot\;\cdot\;\cdot &&\cdot\;\cdot\;\cdot &&\cdot\;\cdot\;\cdot &&\cdot\;\cdot\;\cdot\\&+u_{(2n-2)p} &&+u_{(2n-2)p+2} &&+\dots &&+u_{2np-2}\\&-u_{(2n-2)q+1} &&-u_{(2n-2)q+3} &&-\dots &&-u_{2nq-1}.\end{aligned}$$

Für $m=nq$ enthält $s_{2m}=s_{2nq}$ alle in $S_{(p+q)n}$ vorkommenden negativen Glieder, daher ist

$$1)\qquad S_{(p+q)n}-s_{2qn}=u_{2nq}+u_{2nq+2}+u_{2nq+4}+\dots+u_{2np-2},$$

wobei die Reihe $n(p-q)$ Glieder zählt, falls p mehr als q beträgt, was einstweilen vorausgesetzt werden möge. Zufolge der im Gebiete des Positiven stattfindenden continuirlichen Abnahme von $f(x)$ gilt nun folgende bekannte Ungleichung:

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx < f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\dots+f(a+[r-1]\,h)$$

$$<\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx+f(a)-f(a+rh);$$

wendet man sie für $f(x)=u_x$, $a=2nq$, $h=2$, $r=n(p-q)$ auf die rechte Seite von Nr. 1) an, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\int\limits_{2nq}^{2np} f(x)\,dx < S_{(p+q)n} - s_{2qn} < \tfrac{1}{2}\int\limits_{2nq}^{2np} f(x)\,dx + u_{2nq} - u_{2np}$$

oder für $x = n\xi$

$$\tfrac{1}{2}\int\limits_{2q}^{2p} \frac{n\xi . f(n\xi)}{\xi}\,d\xi < S_{(p+q)n} - s_{2qn} < \tfrac{1}{2}\int\limits_{2q}^{2p} \frac{n\xi . f(n\xi)}{\xi}\,d\xi + u_{2qn} - u_{2pn}.$$

Nach einem bekannten Satze ist ferner, wenn $\varphi(\xi)$ endlich und stetig, $\psi(\xi)$ endlich, stetig und positiv bleibt von $\xi = \alpha$ bis $\xi = \beta$,

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi = \varphi(\mu)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi(\xi)\,d\xi, \quad \alpha < \mu < \beta;$$

macht man von dieser Gleichung Gebrauch für

$$\varphi(\xi) = n\xi . f(n\xi), \quad \psi(\xi) = \frac{1}{\xi}, \quad \alpha = 2q, \quad \beta = 2p,$$

so gelangt man zu folgender Ungleichung:

$$\tfrac{1}{2}n\mu . f(n\mu) . l\left(\frac{p}{q}\right) < S_{(p+q)n} - s_{2qn} < \tfrac{1}{2}n\mu . f(n\mu) . l\left(\frac{p}{q}\right) + u_{2qn} - u_{2pn}.$$

Bei unendlich wachsenden n convergiren u_{2qn} und u_{2pn} gegen die Null, ferner wird auch $n\mu$ unendlich wegen $n\mu > n.2q$; setzt man nun für unendlich wachsende ω $\quad Lim\,[\omega f(\omega)] = K,$

so erhält man aus der vorigen Ungleichung die Gleichung

$$S - s = \tfrac{1}{2}K . l\left(\frac{p}{q}\right).$$

Zu demselben Resultate gelangt man im Falle $p < q$, wenn man die Differenz $s_{2qn} - S_{(p+q)n}$ bildet und nachher dem Vorigen analog verfährt.

Wegen $K = Lim\,(\omega u_\omega)$ oder $K = Lim\,(n u_n)$ gilt nun folgender Satz:

Wenn in der convergirenden Reihe

$$s = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots$$

die Glieder so umgestellt werden, dass immer p positive und q negative Terme aufeinander folgen, so ist die Summe der neuen Reihe:

$$S = s + \frac{Lim\,(n u_n)}{2}\, l\left(\frac{p}{q}\right).$$

Hieraus folgen u. A. die bekannten Sätze für die harmonische Reihe. Im Falle $Lim\,(n u_n) = \infty$, wie z. B. bei

$$s = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots,$$

wird die neue Reihe divergent. Für $Lim\,(n u_n) = 0$ übt die Umstellung der Glieder keinen Einfluss auf die Summe aus; ein Beispiel hierzu bietet die Reihe

$$s = \frac{1}{2\,l\,2} - \frac{1}{3\,l\,3} + \frac{1}{4\,l\,4} - \ldots,$$

bei welchem das Scheibner'sche Criterium keine Entscheidung liefert, weil die absoluten Werthe der Terme eine divergirende Reihe bilden.

Schlömilch. (Aus den Berichten der math.-phys. Classe der k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch.)

XVIII.

Die geometrische Verwandtschaft räumlicher Systeme.

Von

Dr. Silldorf
in Magdeburg.

Im VII. Theil von Grunert's Archiv der Mathematik und Physik hat Herr Seydewitz eine Darstellung der geometrischen Verwandtschaft ebener Systeme gegeben, aus welcher nach dem Gesetz der Reciprocität die Verwandtschaft von Strahlenbündeln abgeleitet werden kann.

Auf die wichtigsten Gesetze, welchen die geometrische Verwandtschaft von Strahlenbündeln unterliegt, gründen zum Theil sich die folgenden Betrachtungen, welche aus dem Wunsche hervorgegangen sind, den Entwickelungen, welche Herr Seydewitz für die Ebene giebt, ähnliche für den Raum an die Seite zu stellen.

In einem räumlichen System Σ* seien drei Punkte A, B, C gegeben, und AB, BC, CA seien die Axen von drei Ebenenbüscheln erster Ordnung. Durch jeden Punkt des Systems Σ gehen drei vollkommen bestimmte Ebenen der drei Ebenenbüschel, und umgekehrt bestimmen je drei Ebenen derselben einen Punkt von Σ auf eindeutige Art.

In einem zweiten räumlichen Systeme Σ_1 nehmen wir die drei Punkte A_1; B_1, C_1 an und fassen $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $C_1 A_1$ als Axen von Ebenenbüscheln auf, von denen je drei Ebenen einen Punkt eindeutig bestimmen, wie vorher. Nun seien die Ebenenbüschel AB, $A_1 B_1$; BC, $B_1 C_1$; CA, $C_1 A_1$ paarweis projectivisch aufeinander bezogen, und im Allgemeinen wird die den drei Ebenenbüscheln gemeinsame Ebene ABC, zu welchem der Büschel sie auch gerechnet werden möge, der Ebene $A_1 B_1 C_1$ von Σ_1 nicht entsprechen. Entspräche die Ebene ABC auf jeden Fall der Ebene $A_1 B_1 C_1$, so würden die räumlichen Systeme Σ, Σ_1 collinear verwandt sein. Bei der Annahme,

---

* Die hier gebrauchte Terminologie ist dieselbe wie in Reye's Geometrie der Lage (Hannover, 1866 und 1868).



welche wir hier machen, wollen wir die Systeme geometrisch verwandt nennen.

Rechnen wir die Ebene ABC oder δ zum Ebenenbüschel $\overline{AB}$, so entspreche ihr in Σ_1 die durch $A_1 B_1$ gehende Ebene γ_1; rechnen wir δ zum Büschel $\overline{BC}$, so entspreche ihr α_1; rechnen wir δ zu $\overline{CA}$, so entspreche ihr β_1. Die drei Ebenen α_1, β_1, γ_1 sollen sich in D_1 schneiden. Dann entspricht jedem Punkte von δ der einzige Punkt D_1. Nennt man die Ebene $A_1 B_1 C_1$ auch δ_1, so lässt sich in ähnlicher Weise zeigen, dass jedem Punkte von δ_1 nur der einzige Punkt D entspricht, in welchem sich die der Ebene δ_1 in den drei Ebenenbüscheln $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ entsprechenden Ebenen α, β, γ schneiden.

Die Ebene α geht durch die Punkte B, C, D. Ein Punkt P derselben wird durch zwei Ebenen der Ebenenbüschel $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ bestimmt. Der entsprechende Punkt P_1 muss sich, weil P in α liegt, in δ_1 befinden und gleichzeitig auf zwei von den Axen $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{A_1 C_1}$ ausgehenden Ebenen liegen. Diese drei Ebenen schneiden sich aber in A_1, daher entspricht jedem Punkte der Ebene α oder BCD nur der einzige Punkt A_1. Aehnliches gilt von den Ebenen β, γ, deren Punkten nur B_1 und C_1 allein entsprechen, sowie von den Ebenen α_1, β_1, γ_1, deren Punkten einzig die Punkte A, B, C entsprechen. Es ist klar, dass auch umgekehrt jeder Ecke eines der Tetraeder $ABCD$, $A_1 B_1 C_1 D_1$ sämmtliche Punkte der mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichneten Seitenebene des andern Tetraeders entsprechen.

Ein Punkt auf der Kante AD des Tetraeders $ABCD$ befindet sich gleichzeitig in den Ebenen β und γ und in einer Ebene des Ebenenbüschels $\overline{BC}$. Der entsprechende Punkt von Σ_1 muss daher auf der Ebene δ_1 und einer Ebene von $\overline{B_1 C_1}$ liegen; er kann jeder Punkt der Geraden $\overline{B_1 C_1}$ sein, weil den beiden Ebenen β und γ nur die eine Ebene δ_1 entspricht. Ebenso entspricht einem Punkte von BD, CD resp. jeder Punkt von $C_1 A_1$, $A_1 B_1$, und einem Punkte von $A_1 D_1$, $B_1 D_1$, $C_1 D_1$ entspricht resp. jeder Punkt von BC, CA, AB. Wir sehen also, dass jedem Punkte einer Kante des Tetraeders $ABCD$ jeder Punkt der Kante des Tetraeders $A_1 B_1 C_1 D_1$ entspricht, welche mit denselben Buchstaben bezeichnet ist, wie die der ersteren gegenüberliegende Kante von $ABCD$, und umgekehrt.

Die Tetraeder $ABCD$ und $A_1 B_1 C_1 D_1$ sollen Haupttetraeder, ihre Ecken Hauptpunkte, ihre Seitenebenen Hauptebenen und ihre Kanten Hauptstrahlen heissen. Die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Hauptpunkte, Hauptebenen, Hauptstrahlen sollen zugeordnet genannt werden.

Sei u ein gerades Gebilde von Σ, welches von AB, BC, CA aus durch drei projectivische Ebenenbüschel projicirt wird. Diesen Ebenenbüscheln

entsprechen drei projectivische $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{B_1 C_1}$, $\overline{C_1 A_1}$, welche auch untereinander projectivisch sein müssen, wie das Schema zeigt, in welchem das Zeichen $\barwedge$ projectivisch bedeutet:

$$\overline{AB} \barwedge \overline{A_1 B_1}, \quad \overline{BC} \barwedge \overline{B_1 C_1}, \quad \overline{CA} \barwedge \overline{C_1 A_1},$$

$$\overline{AB} \barwedge \overline{BC} \barwedge \overline{CA}, \text{ also auch } \overline{A_1 B_1} \barwedge \overline{B_1 C_1} \barwedge \overline{C_1 A_1}.$$

Geht nun u durch D, welcher Punkt durch die Ebenen α, β, γ projicirt wird, denen in Σ_1 dieselbe Ebene δ_1 entspricht, so sind die Ebenenbüschel $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{B_1 C_1}$, $\overline{C_1 A_1}$ zu je zweien perspectivisch, weil je zwei eine Ebene entsprechend gemein haben. Je zwei erzeugen daher einen Strahlenbüschel erster Ordnung. Die Mittelpunkte dieser Strahlenbüschel sind A_1, B_1, C_1. Das von dem Ebenenbüschel erzeugte Punktgebilde ist demnach eine Gerade u_1, weil es von drei Punkten aus durch drei verschiedene Ebenen projicirt wird. u_1 muss durch D_1 gehen, weil u die Ebene δ schneidet.

Geht eine Gerade u durch A, so werden alle ihre Punkte von AB und AC aus nur durch je eine Ebene projicirt, von BC aus aber durch einen Ebenenbüschel. Man ersieht sofort, dass in Σ_1 der Geraden u eine Gerade u_1, welche durch A_1 geht, entsprechen muss. Ebenso verhält es sich mit Geraden, welche durch B oder C gehen.

Nehmen wir jetzt an, dass das gerade Gebilde u weder durch einen Hauptpunkt gehe, noch einen Hauptstrahl von Σ schneide, und projiciren wir dasselbe, wie vorher, von AB, BC, CA aus. Jetzt können nicht mehr irgend zwei der Ebenenbüschel $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{B_1 C_1}$, $\overline{C_1 A_1}$, welche das Punktgebilde u_1 erzeugen, perspectivisch sein. Denn wären es z. B. die Ebenenbüschel $\overline{A_1 B_1}$ und $\overline{B_1 C_1}$, so wäre die Ebene δ_1 beiden entsprechend gemein. Ihr entsprechen aber die Ebenen γ und α der Ebenenbüschel $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$, welche sich in BD schneiden; ein Punkt von u müsste also auf BD sich befinden, was gegen die gegenwärtige Annahme streitet. Die Ebenenbüschel $\overline{A_1 B_1}$, $\overline{B_1 C_1}$, $\overline{C_1 A_1}$ erzeugen daher eine Raumcurve dritter Ordnung u_1, welche durch A_1, B_1, C_1 geht, von welcher also $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $C_1 A_1$ drei eigentliche Secanten sind. Weil u die Ebene δ trifft, muss die Raumcurve dritter Ordnung auch durch D_1 gehen.

Die Fälle, dass ein gerades Gebilde u mit einem Hauptstrahl einen Punkt oder mit zwei gegenüberliegenden Hauptstrahlen je einen Punkt gemein hat, sollen später erledigt werden. Für jetzt können wir das Resultat aussprechen:

Einer Geraden, welche durch einen Hauptpunkt geht, entspricht eine projectivische Gerade, welche durch den zugeordneten Hauptpunkt geht, und einer Geraden, welche durch keinen Hauptpunkt geht und keinen Hauptstrahl schneidet, entspricht eine projectivische Raumcurve drit-

ter Ordnung, welche durch sämmtliche Hauptpunkte von Σ_1 geht.

Wiederum sei u irgend eine Gerade von Σ, welche keinen Hauptstrahl schneidet, so wird dieselbe von A, B, C, D aus durch Strahlenbüschel erster Ordnung projicirt, welche zu ihr perspectivisch sind. Zu u sind auch projectivisch die Ebenenbüschel, welche dieselbe von AB, BC, CA aus projiciren. Die Raumcurve dritter Ordnung u_1, welche u in Σ_1 entspricht, wird von den Hauptpunkten A_1, B_1, C_1, D_1 aus durch Kegelflächen zweiter Ordnung projicirt, von A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 aus aber durch drei Ebenenbüschel erster Ordnung. Dem Strahlenbüschel erster Ordnung (A, u) entspricht in Σ_1 die Kegelfläche (A_1, u_1). Den Ebenenbüscheln $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, welche u projiciren und den Strahlenbüschel erster Ordnung (A, u) erzeugen, entsprechen die projectivischen Ebenenbüschel $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_1C_1}$, welche u_1 projiciren und die Kegelfläche zweiter Ordnung (A_1, u_1) erzeugen. Also ist die Kegelfläche (A_1, u_1) projectivisch zu dem ebenen Strahlenbüschel (A, u). Ebenso verhält es sich mit den Strahlenbüscheln (B, u) und (C, u) und den ihnen entsprechenden Kegelflächen.

Der Strahlenbüschel (D, u) ist projectivisch zu allen Gebilden von Σ, welche u projiciren. Die Kegelfläche (D_1, u_1) ist projectivisch zu den Kegelflächen (A_1, u_1), (B_1, u_1), (C_1, u_1), weil alle vier dieselbe Raumcurve dritter Ordnung u_1 projiciren; daher ist auch $(D, u) \barwedge (D_1, u_1)$.

Demnach gilt der Satz:

Einem Strahlenbüschel erster Ordnung, welcher einen Hauptpunkt zum Mittelpunkte hat, entspricht eine Kegelfläche zweiter Ordnung, welche den zugeordneten Hauptpunkt zum Mittelpunkte hat.

Machen wir einen Hauptpunkt, z. B. A, zum Mittelpunkte eines Strahlenbüschels erster Ordnung, dessen Ebene durch einen zweiten Hauptpunkt, etwa B, geht. Durch B legen wir eine Gerade u, welche von den Strahlen des Strahlenbüschels erster Ordnung in einem projectivischen geraden Gebilde geschnitten wird. Nun entsprechen Strahlen, welche durch A gehen, in Σ_1 ebenfalls Strahlen, welche durch A_1 gehen, und dem geraden Gebilde u entspricht ein projectivisches gerades Gebilde u_1, dessen Träger durch B_1 geht. Daher entspricht dem Strahlenbüschel A ein projectivischer Strahlenbüschel A_1. Also:

Einem Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt ein Hauptpunkt ist und dessen Ebene durch einen zweiten Hauptpunkt geht, entspricht ein projectivischer Strahlenbüschel erster Ordnung mit dem zugeordneten Hauptpunkte als Mittelpunkt, dessen Ebene durch den dem zweiten Hauptpunkte zugeordneten Hauptpunkt geht. Oder:

Einer Ebene, welche durch zwei Hauptpunkte geht, entspricht eine Ebene, welche durch die zugeordneten Hauptpunkte geht.

Denken wir uns einen Strahlenbüschel erster Ordnung mit dem Mittelpunkte A, dessen Ebene nicht durch einen zweiten Hauptpunkt geht, und projiciren wir von D aus dessen Strahlen, so erhalten wir einen Ebenenbüschel erster Ordnung $\overline{AD}$. Dem Strahlenbüschel A entspricht eine projectivische Kegelfläche zweiter Ordnung A_1 von Σ_1, den Ebenen des Büschels $\overline{AD}$ die Ebenen des Büschels $\overline{A_1 D_1}$, welche die den Strahlen des Büschels A entsprechenden Strahlen der Kegelfläche A_1 projiciren; mithin sind die Ebenenbüschel $\overline{AD}$ und $\overline{A_1 D_1}$ projectivisch. Dasselbe gilt von den Ebenenbüscheln $\overline{BD}$, $\overline{B_1 D_1}$ und $\overline{CD}$, $\overline{C_1 D_1}$, welche paarweis projectivisch sind. Hieraus fliesst der Satz:

Die Ebenenbüschel erster Ordnung, deren Axen zwei zugeordnete Hauptstrahlen sind, werden durch die geometrische Verwandtschaft projectivisch aufeinander bezogen.

Anfänglich schienen die Hauptpunkte A, B, C und A_1, B_1, C_1 eine bevorzugte Stellung einzunehmen; jetzt aber haben wir erkannt, dass allen Hauptpunkten dieselben Eigenschaften zukommen, und dass die Eigenschaften der Kanten AB, BC, CA und der ihnen entsprechenden sich bei den übrigen Kanten wiederfinden. Zur Herstellung der geometrischen Verwandtschaft der räumlichen Systeme Σ, Σ_1 könnten wir ebenso gut von irgend drei Paar Ecken der Haupttetraeder ausgehen, wie von den Ecken A, B, C und A_1, B_1, C_1. Die einzelnen vorhergehenden Sätze können wir kurz in den einen zusammenfassen:

Die Strahlenbündel, deren Mittelpunkte je zwei zugeordnete Hauptpunkte sind, stehen in einer geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades und ihre Hauptdreikante sind die von den Mittelpunkten ausgehenden Kanten der Haupttetraeder.

Da von je zwei zugeordneten Hauptstrahlen zwei Paar entsprechende Ebenen ausgehen, so bedarf es nur noch eines Ebenenpaares, um die projectivische Verwandtschaft herzustellen. Seien die Haupttetraeder gegeben und noch ein Paar Punkte P, P_1, welche entsprechende werden sollen, so ist die projectivische Beziehung von je zwei der Ebenenbüschel erster Ordnung, deren Axen Hauptstrahlen sind, vollkommen und eindeutig bestimmt. Mithin folgt der Satz:

Die geometrische Verwandtschaft zweier räumlichen Systeme ist vollkommen bestimmt, wenn die Haupttetraeder nebst der Art ihrer Zuordnung und ein Paar entsprechender Punkte gegeben sind.

Jetzt mögen die noch nicht erledigten Fälle betrachtet werden, dass eine Gerade u von Σ entweder einen oder zwei gegenüberliegende Hauptstrahlen schneidet. Da kein Hauptstrahl nach dem nunmehr Festgestellten eine bevorzugte Stellung hat, so können wir annehmen, das gerade Gebilde u habe mit AB einen Punkt gemein, ohne jedoch einen Punkt von CD zu enthalten. Von AC und BC aus wird u durch zwei perspectivische Ebenenbüschel projicirt, von AB aus jedoch durch eine einzige Ebene. Den Ebenenbüscheln $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ entsprechen die projectivischen Ebenenbüschel $\overline{A_1 C_1}$ und $\overline{B_1 C_1}$, welche nicht perspectivisch sind; der Ebene von $\overline{AB}$ entspricht eine Ebene von $\overline{A_1 B_1}$.

Die Ebenenbüschel $\overline{A_1 C_1}$ und $\overline{B_1 C_1}$ zusammen mit der Ebene von $A_1 B_1$ erzeugen einen Kegelschnitt, der durch A_1 und B_1 geht und welcher von $C_1 D_1$ geschnitten wird. Denn den Strahl $C_1 D_1$ erzeugen die Ebenen β_1 und α_1, welchen die Ebene δ der Ebenenbüschel AC und BC entspricht. Diese Ebene aber projicirt den Punkt, welchen u mit AB gemein hat. Diesem Punkte entspricht mithin der Schnittpunkt von $C_1 D_1$ mit der durch $A_1 B_1$ gehenden Ebene des Kegelschnittes. Also hat der Kegelschnitt u_1, welcher u entspricht, wirklich einen Punkt mit $C_1 D_1$ gemein.

Schneidet die Gerade u zwei Hauptstrahlen, welche keinen Punkt gemein haben, z. B. AB und CD, so wird der auf CD liegende Punkt von den Axen AC und BC aus durch die Ebenen β und α projicirt, welchen in Σ_1 die Ebene δ_1 in beiden Ebenenbüscheln $\overline{A_1 C_1}$ und $\overline{B_1 C_1}$ entspricht. Diese Ebenenbüschel erzeugen daher einen Strahlenbüschel erster Ordnung, welcher von der durch $A_1 B_1$ gehenden Ebene, welche der Ebene $\overline{AB, u}$ entspricht, in einem geraden Gebilde u_1 geschnitten wird. Dass u_1 auch $C_1 D_1$ schneidet, folgt wie vorher. Wir haben daher dem Satze auf S. 525 noch hinzuzufügen den andern:

Einer Geraden, die einen Hauptstrahl schneidet, entspricht ein projectivischer Kegelschnitt, der durch die Hauptpunkte geht, welche dem zugeordneten Hauptstrahl angehören, und welcher mit dem Hauptstrahl, der dem letzteren gegenüberliegt, einen Punkt gemein hat. Einer Geraden dagegen, welche zwei gegenüberliegende Hauptstrahlen schneidet, entspricht eine projectivische Gerade, welche die zugeordneten Hauptstrahlen schneidet.

Von einer Ebene wissen wir nach dem Bisherigen Folgendes:

Einer Ebene, welche durch drei Hauptpunkte geht, entspricht ein Hauptpunkt von Σ_1 ganz allein.

Einer Ebene, welche durch zwei Hauptpunkte geht, entspricht eine Ebene, welche durch die zugeordneten Hauptpunkte geht.

Einer Ebene, welche durch einen Hauptpunkt geht, entspricht eine Kegelfläche zweiter Ordnung, welche den zugeordneten Hauptpunkt zum Mittelpunkte hat.

Wir müssen jetzt fragen: was für eine Fläche entspricht einer Ebene, welche durch keinen Hauptpunkt geht?

Sei π eine Ebene, welche durch keinen Hauptpunkt von Σ geht. In Σ_1 denken wir uns eine Gerade u_1 ganz beliebig, welcher in Σ eine Raumcurve dritter Ordnung u entspricht. Nun hat u höchstens drei Punkte mit π gemein, daher muss die π entsprechende Fläche von der dritten Ordnung sein. Dieselbe soll mit Π_1^3 bezeichnet werden.

Geht u_1 durch einen Hauptpunkt von Σ_1, etwa A_1, so entspricht ihr eine Gerade u, welche durch A geht. u hat nur einen Punkt mit π gemein, daher hat u_1 nur noch einen Punkt ausser A_1 mit der Fläche Π_1^3 gemein, A_1 ist also ein Doppelpunkt der Fläche, da von jeder Geraden u_1, welche durch A_1 geht, dasselbe gilt. Die Ebene π schneidet die Hauptebene α in einer Geraden, welcher in Σ_1 und auf Π_1^3 nur der Punkt A_1 entspricht. Dem ebenen Strahlenbüschel, dessen Strahlen die Schnittlinien von π und α von A aus projiciren, entspricht in Σ_1 eine Kegelfläche zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte A_1. Den Punkten der Schnittlinie von Π und α entspricht aber der Punkt A_1, daher haben die Strahlen jener Kegelfläche zweiter Ordnung mit Π_1^3 ausser A_1 keinen Punkt gemein, sie haben also in A_1 drei zusammenfallende Punkte mit der Fläche dritter Ordnung gemein. Da A_1 ein Doppelpunkt der Fläche ist, so sind die Strahlen der Kegelfläche die Tangenten in diesem Doppelpunkte. Das Vorhergehende fassen wir folgendermassen zusammen:

Einer Ebene π von Σ, welche durch keinen Hauptpunkt geht, entspricht eine Fläche Π_1^3 dritter Ordnung in Σ_1, welche jeden Hauptpunkt von Σ_1 zum Doppelpunkte hat und deren Tangenten in den Doppelpunkten Kegelflächen zweiter Ordnung bilden, von denen jede durch drei Hauptstrahlen geht.

Da, wie wir wissen, irgend einem Punkte eines Hauptstrahls jeder Punkt desjenigen Hauptstrahls entspricht, welcher mit dem zugeordneten in Σ_1 keinen Punkt gemein hat, und da die Ebene π jeden der Hauptstrahlen von Σ trifft, so müssen die Hauptstrahlen von Σ_1 der Fläche dritter Ordnung Π_1^3 ganz angehören. Dies kann auch dadurch verificirt werden, dass ein Hauptstrahl zwei Doppelpunkte der Fläche verbindet, also vier, mithin alle Punkte mit derselben gemein hat. Wir haben also den Satz:

Die Hauptstrahlen von Σ_1 gehören mit allen ihren Punkten der Fläche dritter Ordnung an.

Da jeder Geraden von π eine Raumcurve dritter Ordnung entspricht, welche durch alle Hauptpunkte geht, so enthält die Fläche dritter Ordnung Π_1^3 unendlich viele Raumcurven dritter Ordnung.



Einem Strahlenbüschel erster Ordnung in π entspricht ein Büschel von Raumcurven dritter Ordnung, welche sämmtlich durch den Punkt gehen, welcher dem Mittelpunkte des Strahlenbüschels erster Ordnung entspricht. Seien nun u und v zwei ganz beliebige Gerade in der Ebene π, denen auf Π_1^3 die Raumcurven dritter Ordnung u_1 und v_1 entsprechen. Durch die Hauptpunkte von Σ und die Geraden u und v, also durch neun Punkte, nämlich die vier Hauptpunkte, den Schnittpunkt von u und v, und durch je zwei andere Punkte von u und v, legen wir eine Regelfläche zweiter Ordnung F^2. Derselben entspricht in Σ_1 eine Fläche zweiter Ordnung F_1^2, welche die Raumcurven u_1 und v_1 verbindet. In der That, einer Geraden r_1 von Σ_1 entspricht eine Raumcurve dritter Ordnung r von Σ, welche ausser den vier Hauptpunkten nur noch zwei Punkte mit F^2 gemein haben kann, mithin hat auch r_1 nur zwei Punkte mit F_1^2 gemein; F_1^2 ist also von der zweiten Ordnung und überdies eine Regelfläche, wie bekannt. Umgekehrt entspricht aber auch einer Regelfläche zweiter Ordnung F_1^2, welche durch eine Raumcurve dritter Ordnung u_1 von Π_1^3 gelegt ist, eine Regelfläche F^2 von Σ; denn diese Fläche muss mit der Ebene π eine Gerade u gemein haben. Dann aber hat sie mit π auch noch eine zweite Gerade v gemein, woraus folgt, dass eine Regelfläche zweiter Ordnung, welche durch eine der auf Π_1^3 enthaltenen Raumcurven dritter Ordnung hindurchgeht, noch eine zweite auf Π_1^3 liegende Raumcurve dritter Ordnung enthalten muss.

Die einander entsprechenden Flächen F^2 und F_1^2 haben die Eigenschaft, dass den Regelschaaren der einen Schaaren von Raumcurven dritter Ordnung der andern entsprechen. Da F^2 und π einander berühren im Punkte $u \cdot v$, so berühren auch F_1^2 und Π_1^3 einander im Punkte $u_1 \cdot v_1$.

Eine allgemeine Fläche dritter Ordnung besitzt zwei Systeme von Raumcurven dritter Ordnung von der Eigenschaft, dass je zwei Curven verschiedener Systeme durch eine und nur eine Regelfläche zweiter Ordnung verbunden werden können. Die jetzt betrachtete Fläche Π_1^3 dagegen besitzt nur ein System von Raumcurven dritter Ordnung, da eine Regelfläche zweiter Ordnung, welche durch eine der Raumcurven dritter Ordnung gelegt ist, eine Curve desselben Systems ausschneidet. Zu demselben System gehören aber unsere Raumcurven dritter Ordnung, weil irgend zwei Punkte der Fläche dritter Ordnung nur durch eine von ihnen verbunden werden können.

Oben haben wir gesehen, dass die Fläche Π_1^3 sechs Gerade enthält, nämlich die Hauptstrahlen von Σ_1. Aber sie besitzt ausserdem noch drei Gerade. Die Ebene π schneidet die Seitenflächen des Haupttetraeders in vier Geraden und die Kanten desselben in sechs Punkten, welche die sechs Ecken des von den vier Geraden gebildeten vollständigen Vierseits sind. Die drei Diagonalen dieses Vierseits verbinden je zwei Punkte gegenüberliegender Kanten des Haupttetraeders, denselben entsprechen also nach S. 528 wie-

derum Gerade, welche mit allen ihren Punkten der Fläche dritter Ordnung angehören müssen. Weil die drei Diagonalen sich gegenseitig schneiden, so müssen es auch die ihnen entsprechenden Geraden auf Π_1^3, die letzteren liegen also in derselben Ebene. Die neun Geraden, welche auf Π_1^3 liegen, haben also folgende Lage: Sechs derselben, welche die vier Doppelpunkte verbinden, bilden die Kanten eines Tetraeders, die drei übrigen befinden sich in einer Ebene und verbinden die 3×2 Schnittpunkte, in welchen je zwei gegenüberliegende Kanten des Tetraeders die Ebene schneiden.

Bevor wir zur Untersuchung anderer Flächen schreiten, ist es nöthig zu wissen, welche Curven einem Kegelschnitt entsprechen können. Um jedoch nicht zu weitläufig zu werden, unterdrücken wir die Beweise, welche leicht zu ergänzen sind.

Eine Curve zweiter Ordnung in Σ geht:	Derselben entspricht in Σ_1:
1. Durch keinen Hauptpunkt;	
a) sie schneidet keinen Hauptstrahl;	1. *a)* Eine Raumcurve sechster Ordnung mit Doppelpunkten in A_1, B_1, C_1, D_1;
b) sie schneidet einen Hauptstrahl, z. B. AB, einmal;	*b)* eine Raumcurve fünfter Ordnung mit Doppelpunkten in A_1 und B_1 und einfachen in C_1 und D_1;
c) sie schneidet einen Hauptstrahl, z. B. AB, zweimal;	*c)* eine ebene Curve vierter Ordnung in einer Ebene von $A_1 B_1$ mit Doppelpunkten in A_1, B_1 und auf $C_1 D_1$;
d) sie schneidet zwei Hauptstrahlen, welche in derselben Ebene liegen, z. B. AB und AC;	*d)* eine Raumcurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte in A_1 und einfachen Punkten in B_1 und C_1, welche $D_1 B_1$ und $D_1 C_1$ in je einem Punkte zum zweiten Mal schneidet;
e) sie schneidet zwei Hauptstrahlen, welche nicht in einer Ebene liegen, jeden einmal, z. B. AB und CD;	*e)* eine Raumcurve vierter Ordnung, welche durch A_1, B_1, C_1, D_1 einmal geht;
f) sie schneidet zwei Hauptstrahlen, welche nicht in einer Ebene liegen, den einen, AB, zweimal, den andern, CD, einmal;	*f)* eine ebene Curve dritter Ordnung, deren Ebene durch $A_1 B_1$ geht, mit einfachen Punkten in $A_1 B_1$ und einem Doppelpunkt auf $C_1 D_1$;

g) sie schneidet drei Hauptstrahlen, welche nicht alle drei in derselben Ebene liegen, jeden einmal, z. B. AB, AC, AD.

g) eine ebene Curve dritter Ordnung, deren Ebene durch A_1 geht, welche in A_1 einen Doppelpunkt hat und nicht durch einen andern Hauptpunkt geht, aber die Hauptstrahlen B_1C_1, C_1D_1, D_1B_1 schneidet.

2. Durch einen Hauptpunkt, z. B. A;
a) sie schneidet keinen Hauptstrahl ausser in A;

2. *a)* Eine Raumcurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte in A_1 und einfachen Punkten in B_1, C_1, D_1;

b) sie schneidet einen der von A ausgehenden Hauptstrahlen, z. B. AB;

b) eine ebene Curve dritter Ordnung in einer Ebene von A_1B_1 mit einem Doppelpunkte in A_1, welche einmal durch B_1 geht und C_1D_1 schneidet;

c) sie schneidet einen der nicht von A ausgehenden Hauptstrahlen, z. B. BC;

c) eine Raumcurve dritter Ordnung, welche durch A_1, B_1, C_1 geht und A_1D_1 schneidet;

d) sie schneidet zwei der nicht von A ausgehenden Hauptstrahlen, z. B. BC und BD.

d) eine Curve zweiter Ordnung, welche durch B_1 geht und A_1D_1, sowie A_1C_1 schneidet.

3. Durch zwei Hauptpunkte, z. B. A und B;
a) sie schneidet CD nicht;
b) sie schneidet CD.

3. *a)* Eine Curve zweiter Ordnung, welche durch A_1 und B_1 geht und C_1D_1 nicht schneidet;
b) eine Gerade, welche A_1B_1 und sonst keinen Hauptstrahl schneidet.

Dass einer Curve zweiter Ordnung, welche ganz in einer Hauptebene, z. B. α, liegt, nur der einzige Punkt A_1 entspricht, ist selbstverständlich.

Nachdem in dem Obigen auseinandergesetzt ist, welche Gebilde einer Ebene entsprechen, suchen wir diejenigen zu erforschen, welche einer Fläche zweiter Ordnung entsprechen.

Geht eine Fläche zweiter Ordnung durch sämmtliche Hauptpunkte von Σ, so entspricht ihr wiederum eine Fläche zweiter Ordnung von Σ_1, welche ebenfalls durch sämmtliche Hauptpunkte geht und eine Regelfläche ist, wenn jene eine solche ist. Bezeichnen wir die Fläche zweiter Ordnung in Σ mit F^2, die ihr entsprechende in Σ_1 mit F_1^2. Einer beliebigen Geraden u_1 in Σ_1 entspricht eine Raumcurve dritter Ordnung u in Σ, welche durch alle Hauptpunkte geht. Da nun u ausser den Hauptpunkten nur noch höchstens zwei Punkte mit F^2 gemein haben kann, so gilt dasselbe von u_1, daher ist F_1^2 von der zweiten Ordnung. Die Curve zweiter Ordnung, welche in der

Hauptebene α dem Dreieck BCD umschrieben ist und der Fläche F^2 angehört, wird von A aus durch eine Kegelfläche zweiter Ordnung projicirt, welcher in Σ_1 ein Strahlenbüschel erster Ordnung entspricht, dessen Mittelpunkt in A_1 sich befindet. Kein Strahl dieses Büschels kann ausser A_1 einen Punkt mit der Fläche F_1^2 gemein haben, weil sonst der entsprechende Strahl in Σ die Fläche F^2 ausser in A und auf α in noch einem dritten Punkte schneiden müsste, was im Allgemeinen unmöglich ist. Daher sind alle Strahlen dieses Büschels Tangenten von F_1^2 im Punkte A_1, F_1^2 geht mithin durch A_1. Ebenso erkennt man, dass sie durch B_1, C_1, D_1 geht. Ist nun F^2 eine Regelfläche, so gehen durch A z. B. zwei Erzeugende derselben. Geraden durch A entsprechen aber Gerade durch A_1, also enthält F_1^2 gerade Linien und ist eine Regelfläche.

Geht eine Fläche zweiter Ordnung F^2 nur durch drei Hauptpunkte von Σ, etwa A, B, C, so entspricht ihr eine Fläche dritter Ordnung F_1^3, welche in A_1, B_1, C_1 Doppelpunkte besitzt, durch D_1 aber nur einmal geht, und welcher die Hauptstrahlen A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 ganz angehören.

Um dies zu beweisen, nehmen wir in Σ_1 eine beliebige Gerade u_1 an, welche keinen Hauptstrahl schneidet und welcher in Σ eine Raumcurve dritter Ordnung u entspricht, die durch sämmtliche Hauptpunkte von Σ geht. Also hat u mit F^2 in den Hauptpunkten drei Punkte gemein, kann mithin ausserhalb derselben nur noch drei Punkte mit F^2 gemein haben. Dasselbe gilt von u_1, welche mit F_1^3 nur drei Punkte gemein haben kann. Sei ferner v eine beliebige durch A gehende Gerade, so kann dieselbe F^2 nur noch in einem Punkte ausser A treffen. Die entsprechende durch A_1 gehende Gerade v_1 kann also ausser A_1 nur noch einen Punkt mit F_1^3 gemein haben, und da dies von unendlich vielen durch A_1 gehenden Geraden gilt, so ist A_1 ein Doppelpunkt der Fläche F_1^3. Dasselbe gilt von B_1 und C_1. Der Kegelfläche zweiter Ordnung, welche die Schnittcurve von F^2 und der Hauptebene α projicirt, und welche durch die Hauptstrahlen AB und AC geht, entspricht eine Kegelfläche zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte A_1, welche durch A_1B_1 und A_1C_1 geht, und deren Strahlen ausser A_1 keinen Punkt mit F_1^3 gemein haben können, mithin die Tangenten der Fläche F_1^3 im Punkte A_1 sein müssen. Projicirt man endlich von D aus die Schnittcurve der Fläche F^2 mit der Hauptebene δ durch eine Kegelfläche zweiter Ordnung, welche durch die Hauptstrahlen DA, DB, DC geht, so entspricht derselben in Σ_1 ein Strahlenbüschel erster Ordnung mit dem Mittelpunkte D_1, dessen Strahlen Tangenten von F_1^3 in D_1 sein müssen, da sie, wie sofort zu ersehen, ausser D_1 nur je noch einen Punkt mit F_1^3 gemein haben können. Alle übrigen durch D_1 gehenden Geraden haben ausser D_1 noch zwei Punkte mit F_1^3 gemein, woraus hervorgeht, dass D_1 ein einfacher Punkt dieser Fläche sein muss. Dass die Hauptstrahlen A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 der Fläche F_1^3 ganz angehören, folgt in einfacher Weise.



Dem Kegelschnitt der Fläche F^2, welcher durch A und B und den Punkt von CD geht, welchen F^2 ausser C mit dieser Geraden gemein hat, entspricht nach S. 532, 3. *b)*, eine Gerade, welche $A_1 B_1$ schneidet und der Fläche F_1^3 ganz angehört. Ebenso entsprechen den Kegelschnitten auf F^2, welche durch B und C und einen Punkt von AD, durch C und A und einen Punkt von BD gehen, Gerade auf F_1^3, welche $B_1 C_1$, $C_1 A_1$ schneiden. Je zwei dieser Kegelschnitte haben ausser einem Hauptpunkte noch je einen Punkt gemein, weswegen auch die ihnen entsprechenden Geraden zu je zwei sich schneiden müssen. Also:

Die Fläche F_1^3 enthält sechs Gerade, welche in zwei Dreiecken vertheilt sind, so dass eine Gerade des einen Dreiecks immer nur eine des andern schneidet.

Die Sätze auf S. 531 und 532 geben Aufschluss über die Curven, welche den auf F^2 liegenden Kegelschnitten auf F_1^3 entsprechen. Wir wollen nur wenige Fälle hervorheben.

Die Punkte, welche F^2 ausser den Hauptpunkten mit AD, BD, CD gemein hat, sollen der Reihe nach A', B', C' heissen. Nach 1. *g)* entspricht dem Kegelschnitt, welcher A', B', C' verbindet, eine ebene Curve dritter Ordnung, welche in D_1 einen Doppelpunkt hat und nicht durch einen andern Hauptpunkt geht, aber die Hauptstrahlen $A_1 B_1$, $B_1 C_1$, $C_1 A_1$ schneidet. Die Kegelfläche zweiter Ordnung, welche von D aus die in der Hauptebene δ gelegene Schnittcurve von F^2 projicirt, enthält auch den durch A', B', C gehenden Kegelschnitt nach dem Satze, dass, wenn zwei Flächen zweiter Ordnung eine ebene Curve gemein haben, sie noch eine zweite solche gemein haben müssen. Nun aber entspricht jener Kegelfläche die Tangentenebene der Fläche F_1^3 im Punkte D_1, daher ist die durch D_1 gehende ebene Curve dritter Ordnung die Schnittlinie der Tangentenebene in D_1 mit der Fläche.

Nach 2. *c)* entspricht einem Kegelschnitte von F^2, der durch A und B' geht, ohne einen andern Hauptstrahl zu schneiden, eine Raumcurve auf F_1^3, welche durch A_1, B_1, D_1 geht und den Hauptstrahl $A_1 C_1$ schneidet. Die Ebenen des Ebenenbüschels erster Ordnung mit der Axe AB' schneiden auf F^2 Kegelschnitte aus, welchen sämmtlich Raumcurven dritter Ordnung der eben angegebenen Art auf F_1^3 entsprechen. Durch irgend einen Punkt der Fläche kann nur eine dieser Raumcurven gelegt werden. Auf F_1^3 giebt es sechs Systeme solcher Raumcurven dritter Ordnung, welche den Ebenenbüscheln erster Ordnung mit den Axen AB', AC'; BC', BA'; CA', CB' ihre Entstehung verdanken. Die beiden ersten Curvensysteme gehen durch eine entartete ebene Curve dritter Ordnung ineinander über. Wenn nämlich die um AB' als Axe sich drehende Ebene den Punkt C' in sich aufnimmt, schneidet sie auf F^2 einen durch A, B', C' gehenden Kegelschnitt aus, welchem auf F_1^3 nach S. 532, 2. *d)*, ein durch D_1 gehender Kegelschnitt entspricht, welcher die Hauptstrahlen $A_1 B_1$ und $A_1 C_1$ schneidet. Die Ebene

dieses Kegelschnittes enthält diejenige Gerade von F_1^3, welche den Hauptstrahl B_1C_1 schneidet und dem Kegelschnitt auf F^2 entspricht, welcher durch B, C und A' gelegt ist. Denn die Kegelfläche zweiter Ordnung, welche von D aus den Kegelschnitt $AB'C'$ projicirt, muss auch den Kegelschnitt BCA' enthalten. Da nun dieser Kegelfläche in Σ_1 eine durch D_1 gehende Ebene entspricht, so befindet sich jener Kegelschnitt auf F_1^3 mit der Geraden, welche B_1C_1 schneidet, in derselben Ebene. Der Kegelschnitt nebst der Geraden machen die oben erwähnte entartete Curve dritter Ordnung aus. Aehnliches gilt von dem dritten und vierten, sowie fünften und sechsten Curvensysteme.

Wenn F^2 eine Regelfläche ist, gehen durch A, B, C je zwei Erzeugende derselben, welche verschiedenen Regelschaaren angehören. Die Fläche F_1^3 enthält dann noch weitere sechs Gerade, welche diesen Erzeugenden entsprechen. Die durch A_1 gehenden Geraden, welche den durch A gehenden Erzeugenden von F^2 entsprechen, mögen a_3, a_4, die durch B_1 gehenden b_3, b_4, die durch C_1 gehenden c_3, c_4 heissen. Diejenigen, welche gleichen Index haben, sollen solchen Geraden der Regelfläche F^2 entsprechen, welche derselben Regelschaar angehören. Aus der Eigenschaft einer Regelfläche zweiter Ordnung geht hervor, dass jede der den Index 3 tragenden Geraden jede der mit dem Index 4 versehenen Geraden schneiden muss, während mit gleichem Index versehene Gerade sich nicht schneiden. Weil die durch A gehenden Erzeugenden den Kegelschnitt BCA' schneiden, so müssen die jenen entsprechenden Geraden die B_1C_1 schneidende Gerade der Fläche F_1^3 treffen. Aehnliches gilt von den anderen Geraden, welche den Erzeugenden von F^2 entsprechen.

Die Anordnung der zwölf Geraden der Fläche F_1^3 übersieht man am besten, wenn noch folgende Bezeichnungen eingeführt werden. A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 sollen der Reihe nach c_1, a_1, b_1 heissen, und die Geraden, welche A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 schneiden, sollen resp. c_2, a_2, b_2 genannt werden. Dann haben wir die elf Dreiecke:

$$a_1b_1c_1,\ a_2b_2c_2,\ a_2a_3a_4,\ b_2b_3b_4,\ c_2c_3c_4,\ a_1b_3c_4,\ b_1c_3a_4,\ c_1a_3b_4,\ a_1b_4c_3,\ b_1c_4a_3,\ c_1a_4b_3$$

und die Vierkante:

$$b_1c_1a_3a_4,\ c_1a_1b_3b_4,\ a_1b_1c_3c_4.$$

Ueber die Kanten der Vierkante wollen wir die Seiten des Dreiecks $a_2b_2c_2$ setzen, welche von ihnen geschnitten werden. Dann entsteht folgende übersichtliche Anordnung:

$$\begin{matrix} b_1c_1\underbrace{a_3a_4} & c_1a_1\underbrace{b_3b_4} & a_1b_1\underbrace{c_3c_4} \\ b_2c_2\quad a_2\ , & c_2a_2\quad b_2\ , & a_2b_2\quad c_2\ . \end{matrix}$$

Diese speciellen Betrachtungen von Flächen sollen weiter nicht verfolgt werden. Sei nur noch gestattet die Erwähnung, dass einer Fläche zweiter Ordnung, welche nur durch zwei Hauptpunkte A, B geht, eine Fläche vierter Ordnung entspricht mit dreifachen

Punkten in A_1 und B_1 und Doppelpunkten in C_1 und D_1, welcher der Hauptstrahl A_1B_1 zweimal ganz angehört, während ihr die Hauptstrahlen A_1C_1, B_1C_1, A_1D_1, B_1D_1 nur einmal ganz angehören, der Hauptstrahl C_1D_1 aber nicht mit allen seinen Punkten in die Fläche fällt. In den dreifachen Punkten bilden die Tangenten der Fläche Kegelflächen dritter Ordnung und vierter Klasse mit dem Doppelstrahl A_1B_1.

Schreiten wir nun zu allgemeinen Betrachtungen über Flächen und Curven beliebiger Ordnung.

Einer Fläche F der n^{ten} Ordnung entspreche in Σ_1 eine Fläche F_1. Da die Fläche F jede der Hauptebenen von Σ im Allgemeinen schneidet, so geht F_1 im Allgemeinen durch jeden Hauptpunkt. Einem Strahl u, der sich um A dreht, entspricht ein Strahl u_1, der sich um A_1 dreht. Der Strahl u hat im Allgemeinen n Punkte mit F gemein, daher hat auch u_1 ausser A_1 n Punkte mit F_1 gemein. Wenn aber der bewegliche Strahl u die Schnittcurve von F und der Hauptebene α projicirt, so kann u_1 ausser A_1 nur noch $n-1$ Punkte mit F_1 gemein haben, weil jener Schnittcurve der Punkt A_1 allein entspricht. Die Strahlen, welche die Schnittcurve von F und α projiciren, bilden eine Kegelfläche n^{ter} Ordnung, mithin bilden die entsprechenden Strahlen von A_1 eine Kegelfläche $2n^{ter}$ Ordnung, wie aus der Verwandtschaft der Strahlenbündel A, A_1 folgt (vergl. S. 527). Die Strahlen der Kegelfläche $2n^{ter}$ Ordnung mit A_1 als Mittelpunkt müssen Tangenten der Fläche F_1 in A_1 sein, weil sie einen Punkt weniger mit F_1 gemein haben, als die übrigen Strahlen von A_1. Eine beliebige durch A_1 gelegte Ebene schneidet aus der Fläche F_1 eine Curve aus mit $2n$ Tangenten in A_1. Diese Curve hat demnach $2n$ Zweige und in A_1 einen $2n$-fachen Punkt. Daher hat auch F_1 in A_1 einen $2n$-fachen Punkt, und so in den übrigen Hauptpunkten. Also:

Die Fläche F_1 hat in jedem Hauptpunkte von Σ_1 einen $2n$-fachen Punkt, und ihre Tangenten in jedem dieser Punkte bilden eine Kegelfläche $2n^{ter}$ Ordnung.

Da ferner jeder Hauptstrahl von Σ die Fläche F im Allgemeinen in n Punkten trifft, und weil jedem dieser Punkte jeder Punkt des Hauptstrahls von Σ_1 entspricht, welcher mit keinem der Buchstaben bezeichnet ist, welche der Hauptstrahl von Σ trägt, so enthält F_1 jeden der Hauptstrahlen von Σ_1 $n$mal.

Nehmen wir jetzt an, dass F in A. B, C, D der Reihe nach einen m-, m'-, m''-, m'''fachen Punkt habe. Dann hat z. B. die Kegelfläche A, welche die Schnittcurve von F und α projicirt, in B, C, D der Reihe nach einen m'-, m''-, m'''fachen Strahl. Diesem Kegel entspricht in Σ_1 der Tangentenkegel A_1, welcher nunmehr nach den Gesetzen der geometrischen Verwandtschaft der Strahlenbündel (Seydewitz, *l. c.*) von der Ordnung

$$2n-(m'+m''+m''')$$

ist. Also ist auch A_1 jetzt nur noch ein $[2n-(m'+m''+m''')]$-facher Punkt von F_1. Aehnliche Schlüsse gelten von den übrigen Hauptpunkten von Σ_1. Wir haben daher gefunden:

Geht die Fläche F durch die Hauptpunkte A, B, C, D von Σ resp. m-, m'-, m''-, m'''mal, so hat F_1 in den Hauptpunkten A_1, B_1, C_1, D_1 von Σ_1 resp. einen $[2n-(m'+m''+m''')]$-, $[2n-(m''+m'''+m)]$-, $[2n-(m'''+m+m')]$-, $[2n-(m+m'+m'')]$-fachen Punkt.

Einer beliebigen Geraden u_1 von Σ_1 entspricht eine Raumcurve dritter Ordnung u von Σ, welche mit F im Allgemeinen und höchstens p Punkte gemein hat. Die Raumcurve u geht durch die Hauptpunkte und hat in diesen $m+m'+m''+m'''$ Punkte mit F gemein, also ausser den Hauptpunkten noch $p-(m+m'+m''+m''')$ Punkte. Demnach hat u_1 ausserhalb der Hauptebenen, in welchen sie mit F_1 im Allgemeinen keinen Punkt gemein hat, mit F_1 $p-(m+m'+m''+m''')$ Punkte gemein, die Fläche F_1 ist demnach von der $[p-(m+m'+m''+m''')]^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn F in A, B, C, D resp. einen m-, m'-, m''-, m'''fachen Punkt hat.

Um p zu bestimmen, bedenken wir, dass p die grösste Anzahl von Punkten bedeutet, welche eine Raumcurve dritter Ordnung mit irgend einer Fläche n^{ter} Ordnung gemein haben kann.

Die geometrische Anschauung lehrt, dass p eine endliche Zahl sein muss, und da sie die grösste Anzahl von Punkten sein soll, welche eine Raumcurve dritter Ordnung mit einer von sämmtlichen denkbaren Flächen n^{ter} Ordnung gemein hat, so kann p nur von n allein abhängen, darf also als Function von n allein angesehen und mit $f(n)$ bezeichnet werden.

Wir haben gesehen, dass einer Fläche F n^{ter} Ordnung, welche durch A, B, C, D resp. m-, m'-, m''-, m'''mal geht, eine Fläche F_1 von der Ordnung $f(n)-(m+m'+m''+m''')$ entspricht, welche durch A_1, B_1, C_1, D_1 resp. $2n-(m'+m''+m''')$-, $2n-(m''+m'''+m)$-, $2n-(m'''+m+m')$-, $2n-(m+m'+m'')$-mal geht. Aber nach eben diesem Satze muss der letzteren Fläche, deren Ordnungszahl $f(n)-(m+m'+m''+m''')$ wir mit k bezeichnen wollen, eine Fläche von der Ordnung $f(k)-[8n-3(m+m'+m''+m''')]$ entsprechen, welche natürlich eben die erste Fläche n^{ter} Ordnung ist. Daher entspringt die Gleichung:

$$n=f(k)-[8n-3(m+m'+m''+m''')].$$

Nun aber hatten wir gesetzt

$$k=f(n)-(m+m'+m''+m'''),$$

so dass

$$m+m'+m''+m'''=f(n)-k$$

ist, weswegen wir auch erhalten

$$n=f(k)-8n+3[f(n)-k)]$$

oder

$$f(k)-3k=9n-3f(n). \tag{1}$$

Diese Gleichung zwischen den Ordnungszahlen n und k der Flächen F und F_1 besteht ganz allgemein, wie oft auch F etwa durch die Hauptpunkte von Σ gehen mag, d. h. welche Werthe auch die Zahlen m, m', m'', m''' haben mögen. Nehmen wir an, dass F zuerst durch keinen Hauptpunkt gehe, dass also $m=m'=m''=m'''=0$ sei, und sei dann die Ordnung von F_1 gleich x. Lassen wir aber dann die Fläche F einmal durch A gehen, so wird $m=1$, $m'=m''=m'''=0$, und die Ordnung von F_1 wird nur noch $x-1$ sein; aber unsere Gleichung besteht sowohl für $k=x$, als auch für $k=x-1$. Wir haben also:

$$f(x)-3x=9n-3f(n),$$
$$f(x-1)-3(x-1)=9n-3f(n),$$

folglich

$$f(x)-3x=f(x-1)-3x+3$$

oder

$$f(x)-f(x-1)=3.$$

Setzen wir der Reihe nach $x-1$, $x-2\ldots x-(x-2)$ für x, so geht das System von $x-1$ Gleichungen hervor:

$$f(x)-f(x-1)=3,$$
$$f(x-1)-f(x-2)=3,$$
$$f(x-2)-f(x-3)=3$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$f(2)-f(1)=3.$$

Durch Addition folgt

$$f(x)-f(1)=3(x-1);$$

$f(1)$ ist aber gleich 3, mithin $f(x)=3x$.

Also: Eine Raumcurve dritter Ordnung hat mit einer Fläche der n^{ten} Ordnung höchstens $3n$ Punkte gemein.

Einer Fläche n^{ter} Ordnung, welche durch keinen Hauptpunkt von Σ geht, entspricht eine Fläche $3n^{\text{ter}}$ Ordnung in Σ_1.

Eine Curve k der m^{ten} Ordnung befinde sich in Σ und gehe durch keinen der Hauptpunkte; derselben entspricht in Σ_1 eine Curve k_1 der x^{ten} Ordnung, welche $m$mal durch jeden Hauptpunkt geht, weil k jede Hauptebene in m Punkten schneidet. Nehmen wir an, dass k durch A μmal, durch B μ'mal, durch C μ''mal, durch D μ'''mal gehe, so kann dieselbe z. B. mit der Hauptebene α ausser den Hauptpunkten B, C, D nur noch $m-(\mu'+\mu''+\mu''')$ Punkte gemein haben, und k_1 hat infolge dessen in A_1 nur einen $[m-(\mu'+\mu''+\mu''')]$-fachen Punkt. Ebenso erkennt man, dass k_1 in B_1 einen $[m-(\mu''+\mu'''+\mu)]$-fachen, in C_1 einen $[m-(\mu'''+\mu+\mu')]$-fachen, in D_1 einen $[m-(\mu+\mu'+\mu'')]$-fachen Punkt hat.

Sei nun π_1 eine beliebige Ebene von Σ_1, welche durch keinen Hauptpunkt geht, so entspricht derselben eine Fläche dritter Ordnung Π^3 in Σ, welche mit k überhaupt $\varphi(m)$ Punkte gemein haben möge, wenn $\varphi(m)$ eine Function von m allein bedeutet. Dass man diese Zahl gleich $\varphi(m)$ setzen darf, lehrt eine Ueberlegung ganz ähnlich der auf S 537, welche $p=f(n)$

betrifft. Nun aber hat Π^3 in den Hauptpunkten je einen Doppelpunkt (S. 529), also mit k, welche durch A, B, C, D resp. μ-, μ'-, μ''-, μ'''mal geht, in diesen Punkten im Ganzen $2(\mu+\mu'+\mu''+\mu''')$ Punkte gemein. Ausser den Hauptpunkten kann k folglich nur noch $\varphi(m)-2(\mu+\mu'+\mu''+\mu''')$ Punkte mit Π^3 gemein haben, und diese Punkte entsprechen denjenigen, welche die Ebene π_1 mit k_1 gemein hat. Die Ordnung von k_1 ist also gleich $\varphi(m)-2(\mu+\mu'+\mu''+\mu''')$. Wir haben also:

$$x=\varphi(m)-2(\mu+\mu'+\mu''+\mu''').$$

Suchen wir nun in derselben Weise eine Gleichung für die Ordnung m der Curven k in Σ, so erhalten wir

$$m=\varphi(x)-2\,[m-(\mu'+\mu''+\mu''')+m-(\mu''+\mu'''+\mu)+m \\ -(\mu'''+\mu+\mu')+m-(\mu+\mu'+\mu'')]$$

oder

$$m=\varphi(x)-2\,[4m-3(\mu+\mu'+\mu''+\mu''')].$$

Ersetzen wir $6(\mu+\mu'+\mu''+\mu''')$ mit Hilfe der obigen Gleichung durch $3\varphi(m)-3x$, so finden wir

$$m=\varphi(x)-8m+3\varphi(m)-3x$$

oder

$$2)\qquad 9m-3\varphi(m)=\varphi(x)-3x.$$

Diese Gleichung zwischen den Ordnungszahlen der Curve k m^{ter} Ordnung in Σ und der entsprechenden Curve k_1 x^{ter} Ordnung in Σ_1 gilt, wie oft auch k durch die Hauptpunkte geht, d. h. welche Werthe auch μ, μ', μ'', μ''' haben mögen, natürlich diese Werthe auf die geometrisch zulässigen eingeschränkt gedacht. Wenn k durch keinen Hauptpunkt geht, also $\mu=\mu'=\mu''=\mu'''=0$ ist, soll y die Ordnung der entsprechenden Curve sein; wenn aber k, welche von derselben Ordnung bleibt, durch einen der Hauptpunkte einmal gelegt wird, muss nach dem oben Bewiesenen die Ordnung y von k_1 sich um 2 erniedrigen, so dass dann für $x=y-2$ aus 2) folgt

$$9m-3\varphi(m)=\varphi(y-2)-3(y-2).$$

Weil aber auch

$$9m-3\varphi(m)=\varphi(y)-3y,\ \text{ebenfalls nach 2)},$$

so ist

$$\varphi(y)-3y=\varphi(y-2)-3(y-2)$$

oder

$$\varphi(y)-\varphi(y-2)=6.$$

Sei y **gerade**, dann kann folgendes System von $\frac{y-2}{2}$ Gleichungen aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}\varphi(y)-\varphi(y-2)&=6,\\ \varphi(y-2)-\varphi(y-4)&=6,\\ \varphi(y-4)-\varphi(y-6)&=6\\ \cdots&\cdots\\ \varphi(4)-\varphi(2)&=6.\end{aligned}$$

Durch Addition findet man

$$\varphi(y) - \varphi(2) = 6 \cdot \frac{y-2}{2}$$

oder, da $\varphi(2)$, die Anzahl der Punkte, welche eine Curve zweiter Ordnung mit einer Fläche dritter Ordnung gemein hat, gleich 6 ist:

$$\varphi(y) = 3y.$$

Sei y zweitens ungerade, dann ergeben sich folgende $\frac{y-1}{2}$ Gleichungen:

$$\varphi(y) - \varphi(y-2) = 6,$$
$$\varphi(y-2) - \varphi(y-4) = 6,$$
$$\varphi(y-4) - \varphi(y-6) = 6$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi(3) - \varphi(1) = 6,$$

durch deren Addition hervorgeht

$$\varphi(y) - \varphi(1) = 6 \cdot \frac{y-1}{2};$$

$\varphi(1)$ ist aber die Anzahl Punkte, welche eine Curve erster Ordnung, d. i. eine Gerade, mit einer Fläche dritter Ordnung gemein hat, daher ist

$$\varphi(1) = 3 \quad \text{und} \quad \varphi(y) = 3y.$$

Mag also y gerade oder ungerade sein, so ist diese Gleichung richtig. Also:

Eine Fläche dritter Ordnung hat im Allgemeinen und höchstens $3m$ Punkte mit einer Raumcurve m^{ter} Ordnung gemein.

Woraus folgt:

Einer Curve m^{ter} Ordnung in Σ entspricht in Σ_1 eine Curve, deren Ordnung höchstens gleich $3m$ ist.

Eine Fläche F n^{ter} Ordnung habe mit einer Raumcurve k m^{ter} Ordnung höchstens $\psi(m, n)$ Punkte gemein, wo ψ nur von m und n abhängen kann. Der Fläche F entspricht in Σ_1 eine Fläche F_1 von der $3n^{ten}$ Ordnung, der Curve k eine Curve k_1 von der $3m^{ten}$ Ordnung, wenn weder F noch k durch einen Hauptpunkt von Σ geht. F_1 und k_1 haben $\psi(3m, 3n)$ Punkte gemein, aber $2mn$ Punkte haben sie in jedem Hauptpunkte gemein, folglich in allen vier Hauptpunkten zusammen $8mn$ Punkte. Ausser diesen Punkten müssen sie noch $\psi(3m, 3n) - 8mn$ Punkte gemein haben, welche den $\psi(m, n)$ gemeinsamen Punkten von F und k entsprechen. Wir haben daher

$$3) \qquad \psi(m, n) = \psi(3m, 3n) - 8mn.$$

Denken wir uns jetzt die Fläche n^{ter} Ordnung F einmal durch A, die Raumcurve k aber durch keinen Hauptpunkt gehend. Der Fläche F entspricht nach dem Früheren eine Fläche F_1 der $(3n-1)^{ten}$ Ordnung, welche in A_1 einen $2n$-fachen, in B_1, C_1, D_1 aber je einen $(2n-1)$-fachen Punkt hat. Der Curve k entspricht eine Curve k_1 der $3m^{ten}$ Ordnung, welche in jedem Hauptpunkte einen $m$fachen Punkt hat. F_1 und k_1 haben in den

Hauptpunkten schon $2n.m + 3(2n-1)m$ Punkte gemein, können also ausserdem nur noch

$$\psi(3m, 3n-1) - [2mn + 3(2n-1)m]$$

Punkte gemein haben, welche den gemeinsamen Punkten von F und k entsprechen. Wir haben daher die Gleichung

$$\psi(m, n) = \psi(3m, 3n-1) - m(8n-3).$$

Es war aber nach 3)

$$\psi(m, n) = \psi(3m, 3n) - 8mn,$$

also durch Elimination von $\psi(m, n)$

$$\psi(3m, 3n) - \psi(3m, 3n-1) = 3m.$$

Diese Gleichung muss eine identische sein. Setzen wir $3m = \mu$, $3n = \nu$, und für ν nach einander $\nu - 1$, $\nu - 2 \ldots$, $\nu - (\nu - 2)$, so ergiebt sich das System von $\nu - 1$ Gleichungen:

$$\psi(\mu, \nu) - \psi(\mu, \nu-1) = \mu,$$
$$\psi(\mu, \nu-1) - \psi(\mu, \nu-2) = \mu,$$
$$\psi(\mu, \nu-2) - \psi(\mu, \nu-3) = \mu$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\varphi(\mu, 2) - \psi(\mu, 1) = \mu.$$

Durch Addition folgt

$$\psi(\mu, \nu) - \psi(\mu, 1) = \mu(\nu - 1).$$

Nun aber bedeutet $\psi(\mu, 1)$ die Anzahl Punkte, welche eine Curve μ^{ter} Ordnung mit einer Ebene gemein hat, also ist $\psi(\mu, 1) = \mu$, weswegen

$$\psi(\mu, \nu) = \mu\nu$$

folgt. Eine Curve m^{ter} Ordnung hat daher mit einer Fläche n^{ter} Ordnung im Allgemeinen und höchstens mn Punkte gemein.

Zwei Flächen m^{ter} Ordnung und n^{ter} Ordnung schneiden sich in einer Curve mn^{ter} Ordnung, denn eine Ebene schneidet die Flächen in zwei Curven der m^{ten} und der n^{ten} Ordnung, welche mn Punkte gemein haben (Seydewitz *l. c.*). Diese Curve mn^{ter} Ordnung hat aber nach dem soeben Bewiesenen mnp Punkte mit einer dritten Fläche p^{ter} Ordnung gemein, also folgt der Satz:

Drei Flächen von der m^{ten}, n^{ten}, p^{ten} Ordnung haben im Allgemeinen und höchstens mnp Punkte gemein.

Mag hiermit die Entwickelung der Grundzüge der geometrischen Verwandtschaft räumlicher Systeme geschlossen sein. Ein weiterer Ausbau derselben wird sich nach dem Muster der citirten Abhandlung von Seydewitz und der Abhandlung von Reye über geometrische Verwandtschaften zweiten Grades in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, XI. Jahr-

gang, zu richten haben. Der vorstehende Aufsatz war schon vollendet, als ich Herrn Reye's Schrift in die Hand bekam. Obwohl die allgemeinere Begründung der geometrischen Verwandtschaft ebener Systeme, wie sie Herr Reye giebt, auch zu einer allgemeineren Begründung der Verwandtschaft räumlicher Systeme führen würde, so würde doch die vorliegende Abhandlung nicht überflüssig werden, sondern nur als Theil einem grösseren Ganzen unterzuordnen sein. Die Vorarbeiten zu einer Behandlung dieses Gegenstandes im Reye'schen Sinne habe ich bereits begonnen.

XIX.

Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter zwei quadratisch und die übrigen linear.

Von

Prof. S. GUNDELFINGER

in Tübingen.

Die Anzahl der Gleichungen (also auch der Unbekannten) sei $n-1$. Die Formeln, welche alsdann das in der Ueberschrift angegebene Problem für $n=3$ endgiltig lösen, sind zuerst von Aronhold in Borchardt's Journal, Bd. 62 S. 319, aufgestellt und von Fiedler in dessen ausgezeichneter Bearbeitung des Salmon'schen Werkes über Kegelschnitte (2. Ausgabe S. 466) reproducirt worden. Die verallgemeinerte Fassung, die ich einem Uebertragungsprincip von Clebsch (Math. Annal. VI, S. 16) gegeben, erlaubt es, diese Formeln sofort auf den Fall eines allgemeinen n zu übertragen. Da jedoch dieses Uebertragungsprincip die nöthigen Ausdrücke nur in symbolischer, also nicht jedermann zugänglicher Form liefert, da überdies die Aronhold'schen Formeln sich vereinfachen lassen, so habe ich es vorgezogen, hier eine elementare Entwickelung des Gegenstandes zu geben, um so mehr, als die dabei angewandte Methode mit Vortheil in der analytischen Geometrie bei der gleichzeitigen Betrachtung zweier Kegelschnitte oder zweier Quadriflächen angewandt werden kann. Um so wenig Voraussetzungen als möglich machen zu müssen, wird hier die schon anderweitig* behandelte Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter eine quadratisch und die übrigen linear, in einer für das Folgende passenden Form vorausgesandt.

§ I.

Sind

$$\frac{y_1}{y_n},\ \frac{y_2}{y_n}\ldots\frac{y_{n-1}}{y_n}\quad\text{und}\quad\frac{z_1}{z_n},\ \frac{z_2}{z_n}\ldots\frac{z_{n-1}}{z_n}$$

---

* Vergl. Baur in Bd. XIV dieser Zeitschrift, S. 130 – 140, 426—433; sodann meine im Eingange erwähnte Arbeit Math. Annal. VI, S. 22.

die beiden Werthsysteme der

$$\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n} \dots \frac{x_{n-1}}{x_n},$$

welche die quadratische Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 = 0$$

und die $n-2$ linearen

$$\begin{array}{c} k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n = 0, \\ l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_nx_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n = 0 \end{array}$$

befriedigen, so ist — mit $u_1, u_2, u_3 \dots u_n$ irgendwelche veränderliche Grössen bezeichnet — das Product

$$(y_1u_1 + y_2u_2 + \dots + y_nu_n)(z_1u_1 + z_2u_2 + \dots + z_nu_n),$$

abgesehen von constanten Factoren, identisch mit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_1 & l_1 & \dots & q_1 & r_1 & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & k_2 & l_2 & \dots & q_2 & r_2 & u_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & k_n & l_n & \dots & q_n & r_n & u_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} kl\dots qru \\ kl\dots qru \end{pmatrix},*$$

und die Auffindung der y_i und z_i kommt also darauf hinaus, die Form $\begin{pmatrix} kl\dots qru \\ kl\dots qru \end{pmatrix}$ in zwei für die u_i lineare Factoren zu zerlegen. Diese Zergungel folgt unmittelbar aus der bekannten Hesse'schen Formel

$$\begin{pmatrix} kl\dots qruv \\ kl\dots qruv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} kl\dots qr \\ kl\dots qr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kl\dots ru \\ kl\dots ru \end{pmatrix}\begin{pmatrix} kl\dots rv \\ kl\dots rv \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} kl\dots ru \\ kl\dots rv \end{pmatrix}^2,**$$

---

* Allgemein ist im Folgenden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_1 & l_1 & \dots & r_1 & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & k_2 & l_2 & \dots & r_2 & u_2 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & k_n & l_n & \dots & r_n & u_n \\ \varkappa_1 & \varkappa_2 & \dots & \varkappa_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \varrho_1 & \varrho_2 & \dots & \varrho_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} kl\dots ru \\ \varkappa\lambda\dots\varrho v \end{pmatrix}_{a_{ik}} = \begin{pmatrix} kl\dots ru \\ \varkappa\lambda\dots\varrho v \end{pmatrix}$$

gesetzt; der Index a_{ik} wird weggelassen, im Falle keine Zweideutigkeit stattfindet.

** Dieselbe ergiebt sich unmittelbar aus dem Jacobi'schen Satze in Baltzer's Determinantentheorie (3. Ausg.), § 6, 2, für $m = 2$

in der die v_i, wie die u_i, irgendwelche Zahlen bedeuten können. Da (nach Baltzer, § 4, 6)

$$\begin{pmatrix} kl \dots qruv \\ kl \dots qruv \end{pmatrix} = -(\Sigma \pm k_1 l_2 \dots r_{n-2} u_{n-1} v_n)^2,$$

so wird

$$\begin{pmatrix} kl \dots ru \\ kl \dots ru \end{pmatrix}\begin{pmatrix} kl \dots rv \\ kl \dots rr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kl \dots ru \\ kl \dots rv \end{pmatrix}^2 - (\Sigma \pm k_1 l_2 \dots r_{n-2} u_{n-1} v_n)^2 \begin{pmatrix} kl \dots r \\ kl \dots r \end{pmatrix}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} kl \dots ru \\ kl \dots rv \end{pmatrix} + \sqrt{\begin{pmatrix} kl \dots r \\ kl \dots r \end{pmatrix}}\,(\Sigma \pm k_1 l_2 \dots r_{n-2} v_{n-1} v_n)\right\}$$

$$\left\{\begin{pmatrix} kl \dots ru \\ kl \dots rv \end{pmatrix} - \sqrt{\begin{pmatrix} kl \dots r \\ kl \dots r \end{pmatrix}}\,(\Sigma \pm k_1 l_2 \dots r_{n-2} u_{n-1} v_n)\right\}.$$

Ertheilt man in der letzten Gleichung den v_i irgendwelche constante Zahlenwerthe (z. B. $v_1 = v_2 = \dots = v_{n-1} = 0$, $v_n = 1$), so stellen die beiden Factoren linker Hand die gesuchten Ausdrücke

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 + \dots + y_n u_n \text{ und } z_1 u_1 + z_2 u_2 + \dots + z_n u_n$$

dar.

Wenn $\begin{pmatrix} kl \dots qr \\ kl \dots qr \end{pmatrix} = 0$, so fallen die beiden Werthsysteme zusammen und $\begin{pmatrix} kl \dots qru \\ kl \dots qru \end{pmatrix}$ wird in Bezug auf die u_i ein vollständiges Quadrat; eine für das Folgende wesentliche Bemerkung.

§ II.

Wir gehen jetzt über zur Behandlung des Systems zweier quadratischen und $n-2$ linearer Gleichungen:

$$1)\qquad \left\{\begin{aligned} f &= b_{11} x_1^2 + 2b_{12} x_1 x_2 + \dots + b_{nn} x_n^2 = 0, \\ \varphi &= c_{11} x_1^2 + 2c_{12} x_1 x_2 + \dots + c_{nn} x_n^2 = 0 \end{aligned}\right.$$

und

$$2)\qquad \left\{\begin{aligned} & k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n = 0, \\ & l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n = 0 \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n = 0. \end{aligned}\right.$$

Sind

$$\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n} \dots \frac{y_{n-1}}{y_n};\quad \frac{z_1}{z_n}, \frac{z_2}{z_n} \dots \frac{z_{n-1}}{z_n};\quad \frac{t_1}{t_n} \dots \frac{t_{n-1}}{t_n} \text{ und } \frac{r_1}{r_n}, \frac{r_2}{r_n} \dots \frac{r_{n-1}}{r_n}$$

die vier demselben genügenden Werthsysteme, so ist vor Allem das Product

$$3)\qquad \left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} z_i u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} t_i u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} r_i u_i\right),$$

d. h. die Resultante aus den Gleichungen 1), 2) und aus

$$4)\qquad u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n = 0$$

aufzustellen. Es lässt sich zu diesem Zwecke eine Methode anwenden, die ihren Ursprung der analytischen Geometrie verdankt.

Ist λ eine beliebige Zahl und setzt man $a_{ik}=b_{ik}-\lambda c_{ik}$, so giebt es im Allgemeinen zwei Werthsysteme der x_i, welche die Gleichungen 2), 4) und überdies noch

$$5)\qquad a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{nn}x_n^2=0$$

befriedigen. Für gewisse Werthe von λ jedoch fallen diese beiden Systeme zusammen, und zwar nach der Bemerkung am Ende des § I stets dann, wenn

$$6)\qquad \begin{pmatrix} kl\ldots qu \\ kl\ldots qu \end{pmatrix}_{b_{ik}-\lambda c_{ik}} \equiv -(F-2\lambda X+\lambda^2\Phi)=0.$$

Sind λ und λ' die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, sowie $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n$ und $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$ die ihnen entsprechenden Doppellösungen der Gleichungen 2), 4) und 5), so wird nach § I

$$\begin{pmatrix} kl\ldots quv \\ kl\ldots quv \end{pmatrix}_{b_{ik}-\lambda c_{ik}} = (v_1\xi_1+v_2x_2+\ldots+v_n\xi_n)^2,$$
$$\begin{pmatrix} kl\ldots quv \\ kl\ldots quv \end{pmatrix}_{b_{ik}-\lambda c_{ik}} = (v_1\eta_1+v_2\eta_2+\ldots+v_n\eta_n)^2$$

oder

$$P-\lambda\Pi=(v_1\xi_1+v_2\xi_1+\ldots+v_n\xi_n)^2,$$
$$P-\lambda'\Pi=(v_1\eta_1+v_2\eta_2+\ldots+v_n\eta_n)^2,$$

wenn P (resp. Π) die Resultante aus den Gleichungen $f=0$ (resp. $\varphi=0$), $u=0$, $v=0$ und dem System 2) bedeutet. Löst man die beiden letzten Gleichungen nach P und Π auf, so findet sich

$$P=\frac{\lambda(v_1\eta_1+v_2\eta_2+\ldots+v_n\eta_n)^2-\lambda'(v_1\xi_1+v_2\xi_2+\ldots+v_n\xi_n)^2}{\lambda-\lambda'},$$

$$\Pi=\frac{(v_1\eta_1+v_2\eta_2+\ldots+v_n\eta_n)^2-(v_1\xi_1+v_2\xi_2+\ldots+v_n\xi_n)}{\lambda-\lambda'},$$

und die Factoren der Resultanten Π und P sind also

$$(v_1\eta_1+\ldots+v_n\eta_n)-(v_1\xi_1+\ldots+v_n\xi_n)=0,$$
$$(v_1\eta_1+\ldots+v_n\eta_n)+(v_1\xi_1+\ldots+v_n\xi_n)=0$$

und

$$(v_1\eta_1+\ldots+v_n\eta_n)+\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}\,(v_1\xi_1+\ldots+v_n\eta_n)=0,$$

$$v_1\eta_1+\ldots+v_n\eta_n-\sqrt{\frac{\lambda'}{\lambda}}\,(v_1\xi_1+\ldots+v_n\xi_n)=0.$$

Der Quotient

$$\varkappa=\frac{\dfrac{\sqrt{\lambda'/\lambda}-1}{\sqrt{\lambda'/\lambda}+1}}{\dfrac{\sqrt{\lambda'/\lambda}-1}{\sqrt{\lambda'/\lambda}+1}}=\left(\frac{\sqrt{\lambda'}-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda'}+\sqrt{\lambda}}\right)^2,$$

den man (nach der geometrischen Bedeutung für $n=3$ und $n=4$) passend das Doppelverhältniss der beiden Resultanten P und Π nennen könnte,

lässt sich leicht durch die Coefficienten der quadratischen Gleichung 6) ausdrücken, indem

$$\varkappa + \frac{1}{\varkappa} = 2\frac{(\lambda+\lambda')^2 + 4\lambda\lambda'}{(\lambda+\lambda')^2 - 4\lambda\lambda'} = \frac{2(X^2 - F\Phi)}{X^2 + F\Phi}$$

oder

7) $$F\Phi(\varkappa+1)^2 - X^2(\varkappa-1)^2 = 0.^*$$

Die Resultanten P und Π können einen Factor nur gemein haben, wenn $\varkappa = 0$, d. h. wenn

$$F\Phi - X^2 = 0.^{**}$$

Diese Relation stellt also die Bedingung dar, unter der ein aus den Gleichungen $f=0$, $u_1 x_1 = u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = 0$ und aus dem System 2) berechnetes Werthsystem der x_i auch noch die Gleichung $\varphi = 0$ befriedigt, d. h. $F\Phi - X^2$ ist, abgesehen von einem constanten Factor, mit der in 3) dargestellten Resultante der Gleichungen 1), 2) und 4) identisch.

§ III.

Zerlegung von $F\Phi - X^2$ in vier lineare Factoren. Um zu derselben zu gelangen, ist zunächst zu bemerken, dass der Ausdruck

$$-\begin{pmatrix} k\,l \ldots q\,u \\ k\,l \ldots q\,u \end{pmatrix}_{b_{ik} - \lambda c_{ik}} = F - 2\lambda X + \lambda^2 \Phi$$

für drei Werthe von λ ein vollständiges Quadrat in Bezug auf die u_i werden kann. Nach der am Ende von § I gemachten Bemerkung ist hierzu nöthig und ausreichend, dass

8) $$\begin{pmatrix} k\,l \ldots q \\ k\,l \ldots q \end{pmatrix}_{b_{ik} - \lambda c_{ik}} \equiv B - 3\lambda\Theta + 3\lambda^2\Theta' - \lambda^3 C = 0.$$

Sind λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln dieser Gleichung, so kann also

9) $$\begin{cases} \sqrt{F - 2\lambda_1 X + \lambda_1^2 \Phi} = u_1\varrho_1 + u_2\varrho_2 + \ldots + u_n\varrho_n = P, \\ \sqrt{F - 2\lambda_2 X + \lambda_2^2 \Phi} = u_1\sigma_1 + u_2\sigma_2 + \ldots + u_n\sigma_n = \Sigma, \\ \sqrt{F - 2\lambda_3 X + \lambda_3^2 \Phi} = u_1\tau_1 + u_2\tau_2 + \ldots + u_n\tau_n = T \end{cases}$$

---

* Für $n=3$ und $n=4$ folgen hieraus die Theoreme:

Alle Geraden, welche zwei Kegelschnitte nach einem gegebenen Doppelverhältnisse schneiden, umhüllen eine Curve vierter Classe.

Alle Geraden, welche zwei Quadriflächen nach gegebenem Doppelverhältnisse schneiden, bilden einen Complex vierten Grades.

** Man bemerke, dass bei Begründung der Formel 7) die Voraussetzung $\lambda = \lambda'$, d. h. $F\Phi - X^2 = 0$, somit auch der Fall $\varkappa = 0$ ausgeschlossen worden; da jedoch die Gleichung 7) für alle Werthe von $\varkappa$, ausgenommen $k=0$, als giltig bewiesen ist, so muss sie infolge eines bekannten Raisonnements auch noch für diesen vorher ausgeschlossenen Werth bestehen. Uebrigens hätte sich diese scheinbare Schwierigkeit — allerdings auf Kosten der Kürze — vermeiden lassen.

gesetzt werden, wobei die ϱ_i, σ_i und τ_i nur noch von den Coefficienten der vorgelegten Gleichungen 1) und 2) abhängen. Da P, Σ und T [nach der in 6) gegebenen Definition von $F - 2\lambda X + \lambda^2 \Phi$] verschwinden, wenn man in ihnen die u_i durch die k_i oder $l_i \ldots$ oder endlich die q_i ersetzt, so liegt die Vermuthung nahe, es könne $\alpha P + \beta \Sigma + \gamma T$ bei passender Bestimmung von α, β und γ einen Factor von $F\Phi - X^2$ darstellen. Eine solche Bestimmung ergiebt sich in der That auf folgendem Wege. Für jedes System der u_i, das $F\Phi - X^2$ zu Null macht, wird $\frac{F}{X} = \frac{X}{\Phi}$, und umgekehrt, wenn μ eine beliebig gegebene Zahl bedeutet, ist gleichzeitig mit den Gleichungen

$$F - \mu X = 0, \quad X - \mu \Phi = 0$$

stets auch noch die Relation $F\Phi - X^2 = 0$ befriedigt. Es müsste also, wenn $\alpha P + \beta \Sigma + \gamma T$ Factor von $F\Phi - X^2$, für jedes μ

$$\alpha(1 - \lambda_1 \mu) + \beta(1 - \lambda_2 \mu) + \gamma(1 - \lambda_3 \mu) = 0,$$

d. h.

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 + \gamma\lambda_3 = 0$$

sein, woraus

$$\alpha : \beta : \gamma = (\lambda_2 - \lambda_3) : (\lambda_3 - \lambda_1) : (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Dass die vier Ausdrücke, die aus

$$(\lambda_2 - \lambda_3) P \pm (\lambda_3 - \lambda_1) \Sigma \pm (\lambda_1 - \lambda_2) T$$

durch verschiedene Combination der Vorzeichen hervorgehen, wirklich die Factoren von $F\Phi - X^2$ darstellen, lässt sich nunmehr leicht *a posteriori* zeigen, indem man das Product

$$\text{10)} \quad \Psi = \left\{ \begin{array}{l} \{(\lambda_2 - \lambda_3) P + (\lambda_3 - \lambda_1) \Sigma + (\lambda_1 - \lambda_2) T\} \\ \times \{(\lambda_2 - \lambda_3) P + (\lambda_3 - \lambda_1) \Sigma - (\lambda_1 - \lambda_2) T\} \\ \times \{(\lambda_2 - \lambda_3) P - (\lambda_3 - \lambda_1) \Sigma + (\lambda_1 - \lambda_2) T\} \\ \times \{(\lambda_2 - \lambda_3) P - (\lambda_3 - \lambda_1) \Sigma - (\lambda_1 - \lambda_2) T\} \end{array} \right.$$

berechnet. Nach der bekannten Formel

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c) = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$$

ist Ψ zunächst von der Form

$$\text{11)} \quad \Psi = \alpha_{11} F^2 + 2\alpha_{12} FX + \alpha_{22} X^2 + 2\alpha_{13} F\Phi + 2\alpha_{23} X\Phi + \alpha_{33} \Phi^2,$$

worin die α_{ik} nur von λ_1, λ_2 und λ_3 abhängig sind. Nimmt man in der letzten, für alle Werthe der u_i bestehenden Identität speciell an, dass

$$F - \mu X = 0, \quad X - \mu \Phi = 0,$$

so wird der erste Factor von Ψ Null und daher auch

$$\alpha_{11}\mu^4 + 2\alpha_{12}\mu^3 + (\alpha_{22} + 2\alpha_{13})\mu^2 + 2\alpha_{23}\mu + \alpha_{13} = 0$$

oder, da μ willkürlich gewählt werden konnte:

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{22} = -2\alpha_{13},$$

und die Identität 11) geht über in die folgende:

$$\Psi = \alpha_{22}(X^2 - F\Phi).$$

Lässt man, um α_{22} zu bestimmen, in dieser Gleichung vermittelst passender Annahme der u_i

$$F-2\lambda_1 X+\lambda_1^2\Phi \quad\text{und}\quad F-2\lambda_2 X+\lambda_2^2\Phi$$

gleich Null, d. h.

$$F=\lambda_1\lambda_2\Phi,\quad X=\tfrac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)\Phi$$

werden, so geht sie über in

$$4(\lambda_2-\lambda_3)^2(\lambda_3-\lambda_1)^2(\lambda_1-\lambda_2)^4\Phi^2=\alpha_{22}(\lambda_1-\lambda_2)^2\Phi^2,$$

d. h.

$$\alpha_{22}=4\{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_1-\lambda_2)\}^2.$$

Fassen wir die bis jetzt erhaltenen Resultate zusammen, so ergiebt sich folgendes Theorem:

Dem Systeme von zwei quadratischen und $n-3$ linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2+\ldots\qquad &+b_{nn}x_n^2=0,\\
c_{11}x_1^2+2c_{12}x_1x_2+\ldots\qquad &+c_{nn}x_n^2=0,\\
k_1x_1+k_2x_2+\ldots+k_nx_n\qquad &=0,\\
l_1x_1+l_2x_2+\ldots+l_nx_n\qquad &=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad &\\
q_1x_1+q_2x_2+\ldots+q_nx_n\qquad &=0
\end{aligned}$$

wird durch vier Werthsysteme der $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}\ldots\frac{x_{n-1}}{x_n}$ genügt. Nennt man dieselben $\frac{y_1}{y_n}, \frac{y_2}{y_n}\ldots\frac{y_{n-1}}{y_n}$; $\frac{z_1}{z_n}, \frac{z_2}{z_n}\ldots\frac{z_{n-1}}{z_n}$; $\frac{t_1}{t_n}, \frac{t_2}{t_n}\ldots\frac{t_{n-1}}{t_n}$ und $\frac{r_1}{r_n}, \frac{r_2}{r_n}\ldots\frac{r_{n-1}}{r_n}$, so ist das Product

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} y_i u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} z_i u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} t_i u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{i=n} r_i u_i\right),$$

abgesehen von constanten Factoren, identisch mit $F\Phi-X^2$, wofern F, Φ und X durch die Gleichung definirt sind:

$$\begin{pmatrix}kl\ldots qu\\ kl\ldots qu\end{pmatrix}_{b_{ik}-\lambda c_{ik}}$$

$$\equiv\begin{vmatrix}
b_{11}-\lambda c_{11} & b_{12}-\lambda c_{12} & \ldots b_{1n}-\lambda c_{1n} & k_1 & \ldots q_1 & u_1\\
b_{21}-\lambda c_{21} & b_{22}-\lambda c_{22} & \ldots b_{2n}-\lambda c_{2n} & k_2 & \ldots q_2 & u_2\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
b_{n1}-\lambda c_{n1} & b_{n2}-\lambda c_{n2} & \ldots b_{nn}-\lambda c_{nn} & k_n & \ldots q_n & u_n\\
k_1 & k_2 & \ldots k_n & 0 & \ldots 0 & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
q_1 & q_2 & \ldots q_n & 0 & \ldots 0 & 0\\
u_1 & u_2 & \ldots u_n & 0 & \ldots 0 & 0
\end{vmatrix}=-(F-2\lambda X+\lambda^2\Phi).$$

Sind λ_1, λ_2 und λ_3 die Wurzeln der cubischen Gleichung

$$12)\qquad \begin{pmatrix}kl\ldots q\\ kl\ldots q\end{pmatrix}_{b_{ik}-\lambda i_{ik}}\equiv B-3\lambda\Theta+3\lambda^2\Theta'-\lambda^3 C=0,$$

so bedeuten

$$\sqrt{F - 2\lambda_1 X + \lambda_1^2 \Phi} = P,$$
$$\sqrt{F - 2\lambda_2 X + \lambda_2^2 \Phi} = \Sigma,$$
$$\sqrt{F - 2\lambda_3 X + \lambda_3^2 \Phi} = T$$

lineare, nur in den Coefficienten mit Irrationalitäten behaftete Ausdrücke der u_i. Vermittelst derselben ist die endgiltige Darstellung der vier Factoren von $F\Phi - X^2$ durch die Identität gegeben:

$$13)\qquad \Psi = 4\{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2)\}^2 (X^2 - F\Phi),$$

worin Ψ den in Gleichung 10) definirten Ausdruck bezeichnet.

§ IV. Specielle Fälle.

Die Formel 13) verliert ihre Giltigkeit, wenn zwei oder sämmtliche Wurzeln λ_i einander gleich werden. Die Behandlung dieser besonderen Fälle kann mit den hier vorausgesetzten Hilfsmitteln theils nur sehr mühsam und schwerfällig, theils überhaupt nicht mehr endgiltig erledigt werden, sondern erfordert ein tieferes Eingehen in die Theorie der Zwischenformen. Ich beschränke mich daher hier auf die Angabe der Resultate, welche sich ohne Weiteres vermittelst des im Eingange dieser Arbeit erwähnten Uebertragungsprincips aus den für $n=3$ bekannten Sätzen ableiten lassen.

1. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Doppellösung des vorgelegten Gleichungensystems ist

$$4(\Theta^2 - B\Theta')(\Theta'^2 - C\Theta) - (\Theta\Theta' - BC)^2 = 0.$$

Das Quadrat des Doppelfactors von $F\Phi - X^2$ ist identisch mit

$$F - 2\lambda X + \lambda^2 \Phi,$$

worin

$$\lambda = \frac{2(\Theta' B - \Theta^2)}{BC - \Theta\Theta'},$$

d. h. gleich der alsdann vorhandenen Doppelwurzel der Gleichung 12).*

2. Verschwinden dagegen sämmtliche Coefficienten des soeben definirten Ausdrucks $F - 2\lambda X + \lambda^2 \Phi$, ist also

$$(\Theta\Theta' - BC)^2 F + 2(\Theta' B - \Theta^2)(\Theta'\Theta - BC) X + 4(\Theta' B - \Theta^2)^2 \Phi \equiv 0,$$

so existiren zwei Doppellösungen, und umgekehrt.

Das Product der beiden ungleichen Factoren von $F\Phi - X^2$ ergiebt sich aus der alsdann bestehenden Identität

$$\lambda^2 (X^2 - F\Phi) = (F - \lambda X)^2.$$

* Das Product der beiden übrigen ungleichen Factoren $\left(\frac{F\Phi - X^2}{F - 2\lambda X + \lambda^2 \Phi}\right)$ lässt sich, wenn die Bruchform vermieden werden soll, ohne Zwischenformen nicht mehr darstellen.



3. Damit ein Tripelsystem existire, ist nöthig und hinreichend, dass die cubische Gleichung 12) eine dreifache Wurzel

$$\lambda = \frac{\Theta'}{C} = \frac{\Theta}{\Theta'} = \frac{B}{\Theta}$$

besitze. Der dreifache Factor von $F\Phi - X^2$ ist identisch mit

$$\sqrt{F - 2\lambda X + \lambda^2 \Phi}.$$

4. Verschwinden endlich sämmtliche Coefficienten des Ausdrucks $\Theta'^2 F - 2\Theta\Theta' X + \Theta^2 \Phi$, so fallen die vier Lösungen zusammen und $\Theta' F - \Theta X$ repräsentirt das Quadrat des vierfachen Factors von $F\Phi - X^2$.

XX.

Ueber Curven auf Rotationsflächen.

Von

Dr. BIEHRINGER,

Professor an der k. Industrieschule in Nürnberg.

Nimmt man irgend ein Element ds der Loxodrome auf einer Rotationsfläche, legt durch den einen Endpunkt dieses Elements den zugehörigen Parallelkreis und Meridian, nimmt von den letzteren Linien die Elemente dp und dm, welche mit ds bezüglich zwischen denselben Meridianen und Parallelkreisen liegen, so können diese drei Elemente zu einem rechtwinkligen Dreieck zusammengesetzt werden, das ds zur Hypotenuse hat und das längs der ganzen Loxodrome die gleichen Winkel behält. Aus dieser Eigenschaft kann man für diese gegebenen Winkel die Gleichungen der Loxodrome unmittelbar herleiten; auf die nämliche Art kann man aber auch die Gleichungen von Linien erhalten, bei welchen das oben bezeichnete Dreieck längs der ganzen Linie nicht blos ähnlich bleibt, sondern sich nach beliebig gegebenen Gesetzen ändert.

1. Es sei demzufolge die Aufgabe gegeben, die Gleichungen einer Curve auf einer gegebenen Rotationsfläche aufzufinden, deren Elemente auf die Rotationsaxe, sowie auf die durch die einen Endpunkte der Elemente gelegten Parallelkreise beliebig gegebene Projectionen haben.

Die z-Axe des Coordinatensystems wird in der Rotationsaxe angenommen, so dass, wenn $x = f_z$ den Meridian in der xz-Ebene bestimmt, $x^2 + y^2 = f^2_z$ die Gleichung der Rotationsfläche wird. f_z bezeichnet irgend eine Function von z. Zur Bestimmung der Projectionen der Elemente der gesuchten Curve soll neben den Coordinaten x, y, z die Veränderliche t eingeführt und durch $dz = F_t\,dt$ die verlangte Projection des Elements auf die z-Axe, durch $dp = P_{t,z}\,dt$ die andere Projection desselben Elements auf den Parallelkreis gegeben werden, welcher dem Endpunkte des Elements zu dem Werthe t oder z entspricht. F_t und $P_{t,z}$ stellen beliebige Functionen von t vor, doch soll F_t vor der Hand keinen Coordinatenwerth, $P_{t,z}$ höchstens z enthalten. So lange diese letzteren Bedingungen gelten,

kann man in den folgenden Resultaten nur z für t substituiren. In Bezug auf das Element des Parallelkreises, dessen Anfangsstelle dem Werthe t und dessen Endstelle dem Werthe $t + dt$ entsprechen soll, wird vorausgesetzt, dass es, wenn $P_{t,z}\,dt > 0$ ist, nach der Drehrichtung von OX nach OY, und im andern Falle nach der entgegengesetzten Drehrichtung liegt. $\partial^n F_t$ bezeichnet die n^{te}, ∂F_t die erste Ableitung nach t etc.

Nach den gegebenen Voraussetzungen sind zur Bestimmung der gesuchten Curve drei Gleichungen nothwendig. Als eine dieser Gleichungen kann

$$x^2 + y^2 = f^2$$

oder die Gleichung der Rotationsfläche genommen werden. Eine zweite Gleichung ergiebt sich, wenn man $dz = F\,dt$ integrirt; sie wird

$$z = \int F\,dt.$$

Um die dritte Gleichung zu erhalten, ist zu berücksichtigen, dass ds, dp und dm ein rechtwinkliges Dreieck bilden, in dem ds die Hypotenuse ist, folglich $ds^2 = dm^2 + dp^2$ wird. Weil dazu noch $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, $dp^2 = P^2\,dt^2$, $dm^2 = df^2 + dz^2$ stattfindet, so wird

$$dx^2 + dy^2 = df^2 + P^2\,dt^2.$$

Zu demselben Resultat kann man unmittelbar gelangen, wenn man berücksichtigt, dass die Projection des Elementendreiecks aus ds, dm und dp auf die xy-Ebene wieder ein rechtwinkliges Dreieck ist, das $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ zur Hypotenuse, $dp = P\,dt$ zur einen und df zur andern Kathete hat.

Aus unserer letzten Gleichung folgt

$$\partial x^2_t + \partial y^2_t = \partial f^2_t + P^2,$$

aus $x^2 + y^2 = f^2$ folgt

$$x\,\partial x_t + y\,\partial y_t = f\,\partial f_t;$$

eliminirt man aus den beiden Gleichungen ∂y_t, so erhält man mit Zuziehung von $x^2 + y^2 = f^2$

$$\frac{f\,\partial x_t - x\,\partial f_t}{\sqrt{f^2 - x^2}} = P \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\left(\frac{x}{f}\right)_t}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{f^2}}} = Pf.$$

Diese Gleichung integrirt, giebt als dritte Gleichung unserer Curve

$$\arccos\frac{x}{f} = \int \frac{P}{f}\,dt \quad \text{oder} \quad x = f\cos\int \frac{P}{f}\,dt.$$

Der Symmetrie halber kann man aus der ersten und dritten Gleichung der Curve die Gleichung herleiten

$$y = f\sin\int \frac{P}{f}\,dt$$

und nun als Bestimmungsgleichungen der Curve nehmen

$$1)\qquad x = f.\cos\int\frac{P}{f}\,dt,$$

$$2)\qquad y = f.\sin\int\frac{P}{f}\,dt,$$

$$3)\qquad z = \int F\,dt.$$

z in 1) und 2) stellt den Werth aus 3) vor. Die Integrationsconstanten können dadurch bestimmt werden, dass man die Curve für einen gewissen t-Werth durch einen bestimmten Punkt gehen lässt.

Es hält nicht schwer, die Eliminationen anzugeben, welche mit den Gleichungen vorgenommen werden müssen, um eine verlangte Projection auf irgend eine Coordinatenebene zu bestimmen.

2. Will man aus den erhaltenen Resultaten die Gleichungen der Curve für Polarcoordinaten herleiten, so wählt man hierzu am besten die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = f^2, \quad z = \int F\,dt,$$

sowie die durch Division von 2) mit 1) entstehende Gleichung

$$\frac{y}{x} = \tang\int\frac{P}{f}\,dt.$$

Wird mit r der Radius vector irgend eines Punktes, mit ψ der Winkel des r mit der $+z$-Axe, und mit φ der Winkel der Projection von r auf die xy-Ebene mit der $+X$-Axe bezeichnet, wobei die positive Drehrichtung des φ von OX bis OY geht, so ist

$$x = r\sin\psi\,.\cos\varphi, \quad y = r.\sin\psi\,.\sin\varphi, \quad z = r\cos\psi.$$

Diese Werthe in die obigen Gleichungen eingesetzt, geben:

$$a)\qquad r^2\sin^2\psi = f^2_{r\cos\psi},$$

$$b)\qquad r\cos\psi = \int F\,dt,$$

$$c)\qquad \tang\varphi = \tang\int\frac{P_{t,\,r\cos\psi}}{r\sin\psi}\,dt \quad \text{oder} \quad \varphi = \int\frac{P}{r\sin\psi}\,dt,$$

wobei $f_{r\cos\psi}$ andeuten soll, dass statt z $r\cos\psi$ zu setzen ist.

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Elimination von r und t eine Gleichung zwischen φ und ψ, welche die Kegelfläche bestimmt, deren Schnitt mit der Rotationsfläche die verlangte Curve ist. Soll die Polargleichung der Projection der Curve auf die xy-Ebene bestimmt werden, so darf man nur aus $\varrho = r\sin\varphi$ und aus den Gleichungen a), b), c) die Grössen r, ψ und t eliminiren. Um die Bestimmung der Polargleichung der Projection auf eine andere Coordinatenebene, etwa auf die xz-Ebene, anzudeuten, bezeichne ϱ' die Projection von r auf die xz-Ebene und φ' den zugehörigen Stellungswinkel gegen die x-Axe; es ist dann

$$\varrho'^2 = x^2 + z^2 = r^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi\cos^2\varphi) = r^2(1 - \sin^2\varphi\sin^2\psi)$$

und

$$\tang \varphi' = \frac{z}{x} = \frac{r \cos \psi}{r \sin \psi \cos \varphi} = \frac{1}{\tang \psi \,.\, \cos \varphi},$$

und die verlangte Projection wird bestimmt, wenn man aus diesen zwei Gleichungen und aus a), b) und c) die Grössen r, ψ, φ und t eliminirt.

Anmerkung. Sind die Polargleichungen der Curve zuerst aufzusuchen, so kann man die Gleichungen a) und b) aus den gegebenen Beziehungen leicht auffinden; aber auch die Gleichung c) kann sehr einfach hergeleitet werden. Da nämlich $dp = P\,dt$ das zu dem Element ds der Curve gehörige Element des Parallelkreises vorstellt und das Vorzeichen des letzteren der Drehrichtung des φ entsprechend genommen wird, so ist offenbar $\frac{dp}{f}$ die Aenderung des bezüglichen φ-Werthes, und man hat deshalb

$$d\varphi = \frac{dp}{f} = \frac{P\,dt}{f} = \frac{P\,dt}{r \sin \psi}$$

oder

$$\varphi = \int \frac{P}{r \sin \psi}\,dt.$$

Würde man bei der in Nr. 1 vorgenommenen Bestimmung der Axengleichungen der Curve den Stellungswinkel φ anwenden, φ auf die eben angegebene Weise bestimmen und berücksichtigen, dass $x = f.\cos\varphi$ und $y = f.\sin\varphi$ ist, so würden sich die Gleichungen 1), 2) und 3) der Nr. 1 auf höchst einfache Weise ergeben.

3. Zur Betrachtung der Form der Curven und ihrer Projectionen auf die Coordinatenebenen ist ein Gemenge der Gleichungen der Nr. 1 und 2 am geeignetsten, nämlich die Gleichungen

$$\varrho = f_z, \quad z = \int F\,dt \text{ und } \varphi = \int \frac{P}{f}\,dt.$$

Die erste Gleichung bestimmt die Rotationsfläche, die zweite die Ebenen der Parallelkreise und die dritte die Ebenen der Meridiane. Denkt man sich aus der zweiten und dritten Gleichung das t eliminirt, so erhält man eine Gleichung zwischen φ und z, welche eine windschiefe Fläche bestimmt, deren Erzeugende die z-Axe senkrecht schneiden und deren Schnitt mit der durch $\varrho = f_z$ bestimmten Rotationsfläche die verlangte Curve giebt. Durch Elimination von z und t erhält man eine Gleichung zwischen φ und ϱ oder statt der windschiefen Fläche einen Cylinder parallel der z-Axe. Die Werthe ϱ, z und φ müssen, um einen Punkt der Linie bestimmen zu können, gleichzeitig reell sein. Sind z und φ reell und ist ϱ imaginär, so schneiden die zugehörigen Erzeugenden unserer windschiefen Fläche die Rotationsfläche nicht; sind ϱ und φ reell und ist z imaginär, so findet ein gleiches Verhalten in Bezug auf die durch ϱ und φ bestimmten, zur z-Axe

parallelen Geraden statt; sind ϱ und z reell und ist φ imaginär, so trifft der durch ϱ und z bestimmte Parallelkreis die windschiefe Fläche nicht. In Zukunft wird bei Schlüssen aus einer der Gleichungen stillschweigend vorausgesetzt, dass sämmtliche Gleichungen für die Coordinaten zugleich reelle Werthe liefern.

Um die Constanten der Integrale zu bestimmen oder, was dasselbe ist, um der erwähnten windschiefen Fläche eine bestimmte Lage gegen das Coordinatensystem anzuweisen, wird festgesetzt, dass bei $t=t'$ $z=z'$ und $\varphi=\varphi'$ sein soll. t', z', φ' können beliebige reelle endliche Werthe vorstellen, die in Bezug auf t constant sind. Im Allgemeinen darf keines der Integrale für $t=t'$ unendlich werden. Die Gleichungen der Curve sind jetzt

$$\varrho=f_z, \quad z=\int_{t'}^{t} F\,dt+z', \quad \varphi=\int_{t'}^{t}\frac{P}{f}\,dt+\varphi'.$$

Nähern sich z und f_z für aufeinanderfolgende t-Werthe stetig einer bestimmten Grenze und wächst dabei φ in das Unendliche, so läuft die Linie in unendlich vielen Windungen um die z-Axe asymptotisch an den Parallelkreis hin, welcher zu dem Grenzwerthe von z gehört. Wird unter sonst gleichem Verhältnisse $z=\infty$ und nähert sich φ zugleich einer bestimmten Grenze, so geht die Curve, sich mehr und mehr von der xy-Ebene entfernend, asymptotisch gegen den Meridian, welcher dem genannten φ-Werthe entspricht. Wenn z und φ miteinander unendlich werden, so windet sich die Curve in unendlich vielen Schlingen um die z-Axe und geht in der Richtung dieser Axe in das Unendliche hinaus. Mit Hilfe der t-Werthe aus $\partial z_t = F_t = 0$ lassen sich die Parallelkreise bestimmen, welche die Curve berührt. Dass diese Berührung eintritt, ergiebt sich entweder daraus, dass die Curve an den Stellen mit den fraglichen Parallelkreisen Elemente gemeinschaftlich hat, oder daraus, dass dort die Cosinusse der Winkel der Tangenten mit der z-Axe gleich Null werden. Bei $\partial^2 z_t<0$ ist mit dieser Berührung ein Maximum, bei $\partial^2 z_t>0$ ein Minimum des z-Werthes verbunden. Sollte $\partial^2 z_t$ für diese t-Werthe auch Null werden, so wird zwar die bezeichnete Berührung, aber nicht zugleich ein grösster oder kleinster Werth von z vorhanden sein; die Curve erhält an der Stelle einen Wendepunkt. Diese letzteren Werthe treten nur dann wieder auf, wenn $\partial^3 z_t$ ebenfalls $=0$ wird. In diesem Falle entscheidet bekanntlich $\partial^4 z_t$ zwischen einem Maximum oder Minimum, wie denn überhaupt beim abermaligen Auftreten von Nullwerthen in der bekannten Weise weiter gegangen werden muss. Die z zu t-Werthen, welche ∂z_t auf $\frac{1}{0}$ bringen, können, sobald sie nicht unendlich gross sind, ebenfalls noch Maxima und Minima liefern, doch sind diese bei der Entscheidung direct mit ihren Nachbarwerthen zu vergleichen. Für solche t, die zwischen zwei t-Werthen liegen, welche in Bezug auf z ein Maximum und ein nächstliegendes Minimum geben, bleibt



die Curve zwischen den beiden Parallelkreisen, die zu dem grössten und kleinsten z-Werth gehören; sind also diese letzteren Werthe stets die nämlichen, so liegt zum mindesten der Theil der Curve zwischen den nämlichen Parallelkreisen, der alle Maxima und Minima umfasst.

Diese letzteren Bemerkungen über die z-Werthe lassen sich unmittelbar auf die φ Werthe übertragen, wenn man statt der durch z bestimmten Parallelkreise die durch φ bestimmten Meridiane setzt; man kann hier nur noch berücksichtigen, dass der Meridian, sobald er dem halben Schnitte einer durch die z-Axe gelegten Ebene mit den Rotationsfläche entspricht, wieder derselbe wird, wenn der φ Werth um eine gerade Anzahl π wächst oder abnimmt.

Existiren keine grössten und kleinsten Werthe von φ und z, so läuft die Curve schraubenförmig auf der Rotationsfläche um die z-Axe, ohne sich je selbst schneiden oder in sich zurücklaufen zu können. Giebt es kein Maximum oder Minimum von φ, wohl aber solche Werthe von z, so geht die Curve wellenförmig um die z-Axe, liegt zwischen den zu den grössten und kleinsten z-Werthen gehörigen Parallelkreisen und hat so viele Ausbeugungen nach der Richtung der positiven oder negativen z-Axe, als es Maxima oder Minima von z giebt. Sind jedoch Maxima von φ, hingegen keine solchen Werthe von z vorhanden, so liegt die Curve wellenförmig zwischen den Meridianen, welche zu den bezeichneten φ-Werthen gehören, und bekommt diesen φ-Werthen entsprechende Ausbeugungen im Sinne der positiven oder negativen Drehrichtung von φ. Bestehen Maxima und Minima von z und φ, so kann die Curve durch je zwei Punkte, welche zu einem Maximum und einem nächstliegenden Minimum von z oder φ gehören, in Theile abgetheilt werden, für welche einzeln dieselben Bemerkungen gelten, die eben unter entsprechenden Voraussetzungen im zweiten oder ersten der letzten Fälle für die ganzen Linien aufgestellt wurden. Im Falle für einerlei t-Werth $\partial \varphi_t$ und ∂z_t Null, x und y aber nicht Null werden, kann aus den hier stattfindenden Gleichungen

$$x \, \partial x_t + y \, \partial y_t = 0, \quad x \, \partial x_t - y \, \partial y_t = 0$$

geschlossen werden, dass ∂x_t und ∂y_t auch Null sein müssen. Die Tangentenformeln nehmen an diesen Stellen stets die Form $\frac{0}{0}$ an und die Curve erhält hier eine Spitze. Die Linie wird sich selbst schneiden, wenn für gewisse t-Werthe t'' und t''', sowie für irgend eine ganze Zahl $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{a} = 0$ die Gleichungen stattfinden:

$$\varphi_{t''+t'''} = \varphi_{t''} \pm 2 \mathfrak{a} \pi, \quad z_{t''+t'''} = z_{t''}$$

und wenn f_z für $z_{t''}$ reell wird. Zwischen je zwei zu solchen aufeinanderfolgenden t-Werthen gehörigen Punkten bildet die Curve eine Schlinge, die sich ganz oder nur theilweise um die Rotationsfläche herumlegt, je nachdem der grösste Intervall, den φ zwischen den Punkten zu t'' und t''' durchläuft, grösser oder kleiner als 2π ist. Im ersten Falle legt sich die Schlinge so

oftmal um die Fläche, als der bezeichnete Intervall 2π in sich begreift. Die Curve läuft in sich selbst zurück und wird also geschlossen, wenn in den letzten Bedingungen t'' nicht einen bestimmten, sondern einen veränderlichen t-Werth vorstellt.

Alle die Eigenschaften, welche oben aus dem z-Werth für die Curve im Raume angegeben wurden, können wörtlich auf ihre Projectionen in der xz- und yz-Ebene übertragen werden, sobald man statt der Parallelkreise ihre Projectionen auf die entsprechenden Coordinatenebenen, d. h. parallele Gerade zur x- oder y-Axe in diesen Ebenen setzt. Ebenso gelten für die Projection auf die xy Ebene die nämlichen Eigenschaften, welche für die Curve im Raume aus den φ-Werthen angedeutet wurden; nur hat man auch hier statt der Meridiane ihre Projectionen auf die xy-Ebene oder, was das Nämliche ist, die Radii vectores zu den nämlichen φ-Werthen zu setzen. Die Rolle der z-Werthe übernehmen bei dieser Projection die dem z entsprechenden ϱ-Werthe. So lässt sich z. B. sagen, dass, wenn φ unendlich wird, die Linie unendlich viele den Ursprung umkreisende Windungen erhält, welche entweder nach dem Ursprunge herein oder in das Unendliche hinaus, oder asymptotisch an einen Kreis hinlaufen, der den Ursprung zum Mittelpunkte hat, je nachdem sich gleichzeitig das ϱ der Null oder dem Unendlichen, oder einem bestimmten Grenzwerth nähert. Beim Wachsen des ϱ gegen seinen Grenzwerth gehen die asymptotischen Windungen von innen, beim Abnehmen des ϱ von aussen nach dem Kreise, welcher dem Grenzwerthe von ϱ entspricht. Wird ferner ϱ nach und nach unendlich und nähert sich dabei φ einer gewissen Grenze, so ist der Radius vector zu letzterer eine Asymptote an die Projection. Es hält auch nicht schwer, die durch das Zusammenhalten der z- und φ Werthe über die Curve im Raume angestellten weiteren Betrachtungen für die Projection auf die xy-Ebene auszusprechen, wenn man mit den entsprechenden Modificationen ϱ und φ statt z und φ in Betracht zieht.

Aus der Gleichung $\varrho = f_z$ können für die Projection auf die xy-Ebene mehrere mit der Curve auf der Rotationsfläche im anschaulichen Zusammenhang stehende Schlüsse gezogen werden. Bei $\partial f_t = 0$ tritt im Allgemeinen ein Maximum oder Minimum von ϱ und zugleich eine Berührung des Kreises der xy-Ebene ein, welcher den Ursprung zum Mittelpunkt und das entsprechende ϱ zum Radius hat. Diese Berührung des Kreises geschieht von innen oder von aussen, je nachdem ϱ ein Maximum oder Minimum ist. Weil $\partial f_t = \partial f_z . \partial z_t$, so finden diese Fälle statt, sowie ∂f_z oder $\partial z_t = 0$ wird, sowie also entweder der Radius des Parallelkreises im Raume einen grössten oder kleinsten Werth annimmt, oder sowie dieser Kreis selbst von der Curve berührt wird. Es ist weiter

$$\partial^2 \varrho_t = \partial^2 f_z . \partial z^2_t + \partial f_z . \partial^2 z_t$$

und es besteht demnach bei $\partial f_z = 0$ ein Maximum oder Minimum von ϱ, wenn bezüglich $\partial^2 f_z < 0$ oder > 0 ist, mit anderen Worten, wenn der Radius des Parallelkreises im Raume entsprechende Werthe erhält. Für $\partial z_t = 0$

wird zwischen einem Maximum oder Minimum von ϱ durch das Vorzeichen von $\partial f_z \partial^2 z_t$ entschieden, und man erhält den ersten Werth, im Falle die beiden Factoren dieses Products ungleiches, und den letztern Werth, im Falle sie gleiches Vorzeichen erhalten. Unter der ersteren Bedingung ist entweder $\partial f_z < 0$ und $\partial^2 z_t$, daher auch $d^2 z > 0$, oder $\partial f_z > 0$, also auch $\partial^2 z < 0$ und die Radien der Parallelkreise nehmen ab; unter der letzteren Bedingung sind ∂f_z und $\partial^2 z_t$ oder $d^2 z$ zugleich positiv oder negativ, und die bezeichneten Radien nehmen zu, wie auch in beiden Fällen t geändert wird. Werden ∂f_z und ∂z_t mit einander Null, so wird auch $\partial^2 \varrho_t = 0$, so dass ein Maximum oder Minimum von ϱ nur dann eintritt, wenn, wie hier,

$$\partial^3 \varrho_t = \partial^3 f_z \, \partial z^3_t + 3 \partial^2 f_z \, \partial z_t \, \partial^2 z_t + \partial f_z \, \partial^3 z_t$$

für die nämlichen Voraussetzungen Null wird. Ob nun dieser oder jener Werth von ϱ stattfindet, ist von dem Vorzeichen des betreffenden $\partial^4 \varrho_t$ oder, weil $\partial^4 \varrho_t$ sich für $\partial z_t = \partial f_z = 0$ auf $3 \partial^2 f_z \, \partial^2 z^2_t$ zurückzieht, von dem Vorzeichen des $\partial^2 f_z$ abhängig. Bei $\partial^2 f_z < 0$ wird also hier der Radius der Projection mit dem Radius des Parallelkreises ein Maximum, bei $\partial^2 f_z > 0$ werden diese beiden Radien zugleich Minima. Aus der Formel für den Krümmungsradius, die später ins Auge gefasst werden soll, ergiebt sich, dass in diesem letzteren Falle ϱ den Werth dieses Radius annimmt. Sollte $\partial^2 f_z$ oder $\partial^2 z_t$ ebenfalls Null werden, so treten die Berührungen wieder ohne nothwendige Verbindung mit einem grössten oder kleinsten Werthe des ϱ auf, diese Werthe gehen aber dann immer in die der Krümmungsradien über, was sich entweder aus der betreffenden Formel oder bei $\partial^2 z_t = 0$ auch daraus einsehen lässt, dass hier der Parallelkreis der Krümmungskreis der Curve im Raume ist; die entsprechenden Punkte sind mit anderen Worten Wendepunkte in Bezug auf die entsprechenden Parallelkreise. Die weiter hierher gehörigen Betrachtungen, bei welchen die folgenden Ableitungen noch gleich Null gedacht werden, sind auf die bekannte Art durchzuführen.

4. Um den Einfluss zu untersuchen, welchen verschiedene Bestimmungen der Integrationsconstanten auf die Lage und Form der Curve haben, sollen zwei Curven vorausgesetzt werden, für welche beziehungsweise f, F und P gleich, die Constanten der Integrale aber ungleich sind.

Wird für $t = t'$ in beiden Curven $z = z'$, in der ersten Linie $\varphi = \varphi'$ und in der zweiten $\varphi = \varphi''$, so sind die Gleichungen der Curven

$$1) \qquad \varrho = f_z, \quad z = \int_{t'}^{t} F \, dt + z', \quad \varphi = \int_{t'}^{t} \frac{P}{f} \, dt + \varphi',$$

$$2) \qquad \varrho = f_z, \quad z = \int_{t'}^{t} F \, dt, \qquad \varphi = \int_{t'}^{t} \frac{P}{f} \, dt + \varphi''.$$

Es kann nun behauptet werden, dass für dasselbe t zu jedem Punkte der ersten ein Punkt der zweiten Curve existirt, der auf dem nämlichen Parallelkreise liegt und von dem ersteren um $\varphi'-\varphi''$ absteht, oder auch, dass je zwei dieser Punkte auf einerlei Parallelkreis von den Meridianen zu φ' und φ'' in gleichem Sinne um gleiche Bogen entfernt sind. Durch eine Drehung der zweiten Curve um die z-Axe im Betrage von $\varphi'-\varphi''$ müssen die Curven zusammenfallen; sie sind demnach ursprünglich congruent. Wenn man die zweite Curve auf ein anderes, mit dem ersten congruentes Coordinatensystem bezieht, für welches in 2) $\varphi-\varphi'+\varphi''$ gesetzt werden muss, so ergiebt sich dasselbe Resultat. Wegen dieser Congruenz darf in Betrachtungen, die sich nur auf die Gestalt solcher Linien beziehen, bei $t=t'$ stets $\varphi=0$ gesetzt werden, ohne dass man in der Folge befürchten muss, eine Art der Curven ausser Acht gelassen zu haben.

Für $t=t'$ werde jetzt z einmal gleich z', das andere Mal gleich z'', und φ entsprechend gleich φ' und φ'', so dass die Gleichungen der zwei Curven übergehen in

$$1)\qquad \varrho=f_z,\quad z=\int_{t'}^{t} F\,dt+z',\quad \varphi=\int_{t'}^{t}\frac{P}{f}\,dt+\varphi',$$

$$2)\qquad \varrho=f_z,\quad z=\int_{t'}^{t} F\,dt+z'',\quad \varphi=\int_{t'}^{t}\frac{P}{f}\,dt+\varphi''.$$

Hier giebt es zu den nämlichen t-Werthen stets zwei Punkte der Curven, welche auf Parallelkreisen liegen, die von einander um $\pm(z'-z'')$, oder die von den Parallelkreisen zu z' und z'' nach derselben Seite hin um gleichviel entfernt sind. Sollte $P=P'.f$ sein und P' kein z enthalten, oder sollte $\frac{P}{f}$, also auch $\int\frac{P}{f}dt$ bei demselben t ausser z für $z=z'+m$ und $z=z''+m$ gleiche Werthe annehmen, was auch m vorstellen mag, so liegen die vorhin zusammengenommenen Punktepaare noch voneinander um $\pm(\varphi'-\varphi'')$, oder entsprechend von den Meridianen zu φ' und φ'' nach einerlei Drehrichtung um gleiche Bögen ab. Ist die Bedingung $f_{z'+m}=f_{z''+m}$ vorhanden, so erhalten die oben bezeichneten Parallelkreise gleiche Radien. Man kann hieraus auch die Eigenschaften ablesen, welche in den besonderen Fällen die beiden Projectionen auf die xy-Ebene erfüllen. Bei $\varphi'=\varphi''$ werden im Allgemeinen die φ-Werthe nicht gleich und liegen nur da je zwei Punkte zu denselben t-Werthen auf gleichen Meridianen, wo wieder $\frac{P}{f}$ für $z=z'+m$ und $z=z''+m$ gleiche Werthe annimmt. Diese Punkte liegen noch in derselben Parallelen zur z-Axe, wenn auch f die analoge Bedingung erfüllt. In diesem letzteren Falle erhalten die beiden Linien einerlei Projection auf die xy-Ebene. Dies in Bezug auf die Lage der zwei Curven.

Eine Congruenz der Curven findet im Allgemeinen nicht statt; sie ist jedoch vorhanden, sobald f und $\frac{P}{f}$ für $z'+m$ und $z''+m$ bezüglich gleiche Werthe annehmen. Denn bei Einführung eines neuen Systems für die zweite Linie, wo beim Uebergange $z+z''-z'$ statt z und $\varphi+\varphi''-\varphi'$ statt φ gesetzt werden muss, ergeben sich bei gleichem t für z, ϱ und φ der ersten Linie gegen das alte System die nämlichen Werthe, wie z, ϱ und φ der zweiten Linie gegen das neue System, und beide Systeme sind dazu noch congruent. Dass bei ϱ und φ die genannte Eigenschaft eintritt, folgt aus den Bedingungen für f und $\frac{P}{f}$, wenn statt m $z-z'$ gesetzt wird.

Sollen die Constanten z'' und φ'' der zweiten Linie zu dem t-Werth t'' genommen werden, so kann man durch die Umformungen

$$\int_{t''}^{t} F\,dt = \int_{t'}^{t} F\,dt + \int_{t''}^{t'} F\,dt, \quad \int_{t''}^{t} \frac{P}{f}\,dt = \int_{t'}^{t} \frac{P}{f}\,dt + \int_{t''}^{t'} \frac{P}{f}\,dt,$$

sowie durch Einführung von

$$z'' + \int_{t''}^{t'} F\,dt \quad \text{und} \quad \varphi'' + \int_{t''}^{t'} \frac{P}{f}\,dt$$

als neue Constanten der zweiten Linie genau die vorigen Fälle und die an sie geknüpften Betrachtungen herbeiführen. Die beiden Integrale zwischen den Grenzen t' und t'' müssen bei der Substitution bestimmte Werthe haben. Wenn

$$z'' + \int_{t''}^{t'} F\,dt = z' \quad \text{und} \quad \varphi'' + \int_{t''}^{t'} \frac{P}{f}\,dt = \varphi'$$

wird, so fallen die beiden Linien zusammen; wenn nur eine dieser Gleichungen stattfindet, so finden die Fälle statt, wo oben entweder die Constanten zu z oder die zu φ gleich sind.

5. Setzt man in den Gleichungen der Nr. 3 auch $-F$ statt F und $-P$ statt P, so erhält man die Gleichungen von folgenden vier Linien:

$$\text{I)} \qquad \varrho = f_z, \qquad z = \int F\,dt, \qquad \varphi = \int \frac{P}{f}\,dt;$$

$$\text{II)} \qquad \varrho = f_z, \qquad z = \int F\,dt, \qquad \varphi = -\int \frac{P}{f}\,dt;$$

$$\text{III)} \qquad \varrho = f_z, \qquad z = -\int F\,dt, \qquad \varphi = \int \frac{P}{f}\,dt;$$

$$\text{IV)} \qquad \varrho = f_z, \qquad z = -\int F\,dt, \qquad \varphi = -\int \frac{P}{f}\,dt.$$

Je zwei dieser Linien bieten gewisse leicht erkennbare Beziehungen dar, welche nun aufgesucht werden sollen. Alle die Bemerkungen, welche sich für die Curven I) und II), I) und III), I) und IV) aufstellen lassen, kann man offenbar ohne Weiteres bezüglich auf III) und IV), II) und IV), II) und III) übertragen. Die Constanten der Integrale werden zu demselben t-Werth genommen, indem die Fälle, wo sie zu verschiedenen t-Werthen gehören, sich durch das am Schlusse der vorigen Nummer angegebene Verfahren auf den festgesetzten Fall zurückführen lassen. z und φ sollen bei $t=t'$ in der Linie I) gleich z' und φ', in der Linie II) gleich z'' und φ'' sein. Die Gleichungen der zwei Linien sind dann

$$\text{I)} \qquad \varrho = f_z, \quad z = \int_{t'}^{t} F\,dt + z', \quad \varphi = \int_{t'}^{t} \frac{P}{f}\,dt + \varphi',$$

$$\text{II)} \qquad \varrho = f_z, \quad z = \int_{t'}^{t} F\,dt + z'', \quad \varphi = -\int_{t'}^{t} \frac{P}{f}\,dt + \varphi''.$$

Irgend zwei Punkte der zwei Linien, welche zu gleichen t-Werthen gehören, liegen auf zwei Parallelkreisen, die entsprechend von denen zu z' und z'' nach derselben Seite hin um gleichviel entfernt sind. Findet für ein beliebiges m die Bedingung statt $f_{z'+m} = f_{z''+m}$, so erhalten die Parallelkreise gleiche Radien. Ist $P = P'.f$, ohne dass P' z enthält, oder allgemein, hat $\frac{P}{f}$ und damit $\int \frac{P}{f}\,dt$ die Eigenschaft, dass es bei gleichem t ausser z für $z'+m$ und $z''+m$ einerlei Werth annimmt, so liegen die zu gleichen t-Werthen gehörigen Punkte bezüglich von den Meridianen zu φ' und φ'' oder gemeinschaftlich von dem Meridian zu $\frac{\varphi'+\varphi''}{2}$ nach entgegengesetzten Drehrichtungen um gleiche Winkel ab. Treten die genannten Bedingungen für f und $\frac{P}{f}$ zugleich auf, so gelten gleichzeitig alle erwähnten Eigenschaften der zwei Curven und zu den zuletzt bemerkten gleichen Winkeln gehören noch gleiche Bögen der entsprechenden Parallelkreise.

Im Falle $z' = z''$ ist, kann unmittelbar und ohne weitere Bedingung für F und $\frac{P}{f}$ behauptet werden, dass die zu gleichen t-Werthen gehörigen Punkte auf denselben Parallelkreisen liegen und dass sie von dem Meridian zu $\frac{\varphi'+\varphi''}{2}$ nach entgegengesetzten Drehrichtungen um gleiche Bögen entfernt sind. Die zwei Linien liegen hier symmetrisch gegen den Meridian zu $\frac{\varphi'+\varphi''}{2}$.



Auch die Projectionen der Curven in den Coordinatenebenen stehen in den angedeuteten besonderen Fällen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, namentlich aber für ein Coordinatensystem, welches durch eine Drehung des Systems um die z-Axe erhalten wird, die $\frac{\varphi'+\varphi''}{2}$ beträgt. Um dieses neue System einzuführen, hat man $\varphi+\frac{\varphi'+\varphi''}{2}$ statt φ zu setzen. Die neuen Gleichungen sind:

$$\text{I)} \qquad \varrho = f_z, \quad z = \int_t^t F\,dt + z', \quad \varphi = \int_t^t \frac{p}{f}\,dt + \frac{\varphi'-\varphi''}{2};$$

$$\text{II)} \qquad \varrho = f_z, \quad z = \int_t^t F\,dt + z'', \quad \varphi = -\int_t^t \frac{p}{f}\,dt - \frac{\varphi'-\varphi''}{2}.$$

Im Falle f und $\frac{p}{f}$ für $z'+m$ und $z''+m$ gleich werden, liegen die Projectionen der zwei Curven auf die xy-Ebene symmetrisch gegen die neue x-Axe. Dies lässt sich entweder aus den über die Curve im Raume gegebenen Bemerkungen, oder auch sehr einfach aus den Gleichungen $x=\varrho\cos\varphi$, $y=\varrho\sin\varphi$ einsehen. Die ϱ der Punkte zu gleichen t-Werthen sind für beide Linien dieselben, die φ hingegen sind gleich und entgegengesetzt; folglich stimmen die x-Werthe vollständig, ihre y-Werthe aber nur hinsichtlich des absoluten Werthes überein. Da ferner die eben zusammengenommenen Punkte einerlei x haben und ihre z-Werthe sich um $\pm(z'-z'')$ unterscheiden, so müssen, wenn die Projection von II) in der xz-Ebene parallel der z-Axe um $z'-z''$ verschoben wird, die Projectionen von I) und II) in der Coordinatenebene zusammenfallen. In Bezug auf die Projectionen der zwei Linien in der yz-Ebene kann aus den Bemerkungen über die y- und z-Werthe geschlossen werden, dass, wenn die Projection von II) in ihrer Coordinatenebene parallel der z-Axe um $z'-z''$ verschoben wird, die beiden Projectionen symmetrisch gegen die z-Axe liegen, also auch ursprünglich congruente Curven sind.

Ist $z''=z'$, so liegen ohne besondere Voraussetzungen die Projectionen der zwei Curven auf die xy-Ebene symmetrisch gegen die neue x-Axe, die Projectionen auf die yz-Ebene symmetrisch gegen die z-Axe, und die Projectionen auf die xz-Ebene, welche in der Meridianebene zu $\frac{\varphi'+\varphi''}{2}$ liegt, fallen zusammen.

Um die Linien I) und III) miteinander zu vergleichen, sollen die Gleichungen zu Grunde gelegt werden:

$$\text{I)} \qquad \varrho = f_z, \quad z = \int_{t'}^{t} F\,dt + z', \qquad \varphi = \int_{t'}^{t} \frac{P}{f}\,dt + \varphi';$$

$$\text{III)} \qquad \varrho = f_z, \quad z = -\int_{t'}^{t} F\,dt + z'', \quad \varphi = \int_{t'}^{t} \frac{P}{f}\,dt + \varphi''.$$

Hier giebt es zu gleichen t-Werthen je zwei Punkte der zwei Curven, welche auf zweien, bezüglich von den Parallelkreisen zu z' und z'', oder gleichzeitig von dem Parallelkreis zu $\frac{z'+z''}{2}$ nach verschiedenen Richtungen gleichweit abstehenden Parallelkreisen liegen. Diese Parallelkreise erhalten gleiche Radien, wenn $f_{z'+m} = f_{z''+m}$ wird. Weil für ein veränderliches n das $m = n + \frac{z''-z'}{2}$ gesetzt werden kann, so geht die letzte Bedingung über in

$$f_{\left(\frac{z'+z''}{2}+n\right)} = f_{\left(\frac{z'+z''}{2}-n\right)};$$

die Gerade der xz-Ebene, welche zu dem z-Werthe $\frac{z'+z''}{2}$ gehört und parallel der x Axe läuft, hat also in dem Falle eine Axe des Meridians in der xz Ebene zu sein. Sobald die Bedingung, welche eben für f angenommen wurde, bei $\frac{P}{f}$ vorhanden ist, liegen die zusammengenommenen Punkte der zwei Curven auf ihren Parallelkreisen entsprechend von den Meridianen zu φ' und φ'' nach einerlei Drehrichtung hin um gleiche Winkel ab. Sind die zwei Bedingungen für f und $\frac{P}{f}$ gleichzeitig vorhanden, so können nicht nur sämmtliche obigen Folgerungen durch die zwei Curven angewendet werden, sondern zu den letzterwähnten Winkeln kommen auch noch gleiche Bögen der zugehörigen Parallelkreise. Die beiden Projectionen auf die xy-Ebene sind unter den letzten Bedingungen congruent, weil durch eine Drehung der Curve III) um die z-Axe, die $\varphi'-\varphi''$ beträgt, die ersten und dritten Gleichungen von I) und III) vollständig übereinstimmend gemacht werden können. Ein Zusammenfallen der Projectionen findet von selbst statt, wenn hier $\varphi' = \varphi''$ ist. In Bezug auf die hierher gehörigen Projectionen in der xz- und yz-Ebene ist bei $\varphi' = \varphi''$ zu berücksichtigen, dass die Punkte zu gleichen t-Werthen übereinstimmende x und y haben und dass ihre z-Werthe sich von $\frac{z'+z''}{2}$ nach beiden Seiten hin um gleichviel unterscheiden. Aus diesen Gründen liegen diese Projectionen bezüglich symmetrisch gegen die Geraden in der xz- und yz-Ebene, welche zu dem

z-Werthe $\frac{z'+z''}{2}$ gehören und parallel der x- und y-Axe sind. Diese Projectionen sind also in jeder der beiden Ebenen congruent.

Zur Vergleichung der Linien I) und IV) sollen die Gleichungen benützt werden:

$$\text{I)} \qquad \varrho = f_z, \quad z = \int_{t'}^{t} F\,dt + z', \qquad \varphi = \int_{t'}^{t} \frac{p}{f}\,dt + \varphi';$$

$$\text{III)} \qquad \varrho = f_z. \quad z = -\int_{t'}^{t} F\,dt + z'', \quad \varphi = -\int_{t'}^{t} \frac{p}{f}\,dt + \varphi''.$$

Je zwei Punkte der zwei Linien, welche zu demselben t gehören, liegen auf zwei Parallelkreisen, die entsprechend von denen zu z' und z'', daher auch von dem Parallelkreise zu $\frac{z'+z''}{2}$ im entgegengesetzten Sinne gleichweit entfernt sind. Die Radien der Parallelkreise dieser Punkte werden gleich, sobald $f_{z'+m} = f_{z''-m}$ oder, was nach früher dasselbe ist, sobald $f_{\left(\frac{z'+z''}{2}+n\right)} = f_{\left(\frac{z'+z''}{2}-n\right)}$ wird. Ist die analoge Bedingung für $\frac{p}{f}$ vorhanden, so liegen die bezeichneten Punkte auf ihren Parallelkreisen von den zugehörigen Meridianen zu φ' und φ'', mithin auch von dem Meridian zu $\frac{\varphi'+\varphi''}{2}$ nach entgegengesetzten Drehrichtungen um gleiche Winkel ab.

Finden die erwähnten Bedingungen für f und $\frac{p}{f}$ gleichzeitig statt, so gelten sämmtliche Folgerungen und zu den zuletzt bemerkten gleichen Winkeln gehören wieder gleiche Bögen der zugehörigen Parallelkreise. In diesem letzteren Falle müssen offenbar die Projectionen der zwei Linien auf die xy Ebene symmetrisch gegen den Radius vector zu $\frac{\varphi'+\varphi''}{2}$ liegen. Es wird nun zur weiteren Betrachtung der Linien ein neues Coordinatensystem in der Weise angenommen, dass das alte System in das neue übergeht, wenn sein Ursprung längs der z-Axe um $\frac{z'+z''}{2}$ verschoben und seine xy-Ebene um die z-Axe um $\frac{\varphi'+\varphi''}{2}$ gedreht wird. Damit die Curven auf dieses neue System bezogen sind, ist in den obigen Gleichungen $z + \frac{z'+z''}{2}$ statt z und $\varphi + \frac{\varphi'+\varphi''}{2}$ statt φ zu setzen; diese gehen dadurch über in

$$\text{I)}\quad \varrho = f_{\left(z+\frac{z'+z''}{2}\right)}, \quad z = \int_{t'}^{t''} F\,dt + \frac{z'-z''}{2},$$

$$\varphi = \int_{t'}^{t} \frac{P_{\left(t,\,z+\frac{z'+z''}{2}\right)}}{f_{\left(z+\frac{z'+z''}{2}\right)}}\,dt + \frac{\varphi'-\varphi''}{2};$$

$$\text{IV)}\quad \varrho = f_{\left(z+\frac{z'+z''}{2}\right)}, \quad z = -\int_{t'}^{t} F\,dt - \frac{z'-z''}{2},$$

$$\varphi = -\int_{t'}^{t} \frac{P_{\left(t,\,z+\frac{z'+z''}{2}\right)}}{f_{\left(z+\frac{z'+z''}{2}\right)}}\,dt - \frac{\varphi'-\varphi''}{2}.$$

Unter der Voraussetzung, dass f und $\frac{F'}{f}$ die oben bezeichneten Eigenschaften erfüllen, stimmen die ϱ-Werthe der Punkte zu gleichen t-Werthen vollständig, die z und φ dagegen nur hinsichtlich des absoluten Werthes überein. Mit Hinzunahme von $x=\varrho\cos\varphi$ und $y=\varrho\sin\varphi$ folgt weiter, dass die neuen x Werthe der Punkte in Bezug auf Grösse und Vorzeichen, die neuen y aber nur in Bezug auf Grösse gleich sind. Zieht man diese Resultate zusammen, so ergiebt sich, dass die Projectionen der zwei Curven auf die xy und xz-Ebene symmetrisch gegen die x-Axe, die Projectionen auf die yz-Ebene verkehrt symmetrisch gegen die y- oder z-Axe liegen. Die Radii vectores der bezeichneten Punkte bilden in den letzten Projectionen eine Gerade und die Linien decken sich, sobald man sich eine derselben in der yz-Ebene um den Ursprung um 180° gedreht denkt. — Wird für die Curve IV) ein besonderes Coordinatensystem angenommen, dessen y- und z-Axe gegen dieselben Axen des letzten Systems entgegengesetzt gerichtet sind, dessen Drehrichtung von φ also auch entgegengesetzt wird, so hat man in IV) $-z$ statt z und $-\varphi$ statt φ zu setzen. Durch diese Substitution und durch unsere Bedingungen für f und $\frac{P}{f}$ stimmen die Gleichungen von I) und IV) gegen ihre congruenten Systeme vollständig überein, und es müssen daher auch die Curven selbst congruent sein.

6. Im Folgenden sollen einige besondere Fälle betrachtet werden, die sich an die Bemerkungen der letzten Nummer anschliessen.

Wenn für eine Function R_t die Bedingung besteht:

$$R_{t'+\vartheta} = R_{t'-\vartheta},$$

wo t' einen bestimmten, θ einen beliebigen positiven t-Werth vorstellt, so gilt

$$\int_{t'}^{t'+\theta} R_t\,dt = -\int_{t'}^{t'-\theta} R_t\,dt;$$

wenn hingegen bei sonst gleichen Umständen

$$R_{t'+\theta} = -R_{t'-\theta}$$

wird, so ist

$$\int_{t'}^{t'+\theta} R\,dt = \int_{t'}^{t'-\theta} R\,dt.$$

Für die folgenden Betrachtungen wird jede Curve in zwei Theile getheilt, von welchen der eine Theil zu $t > t'$, der andere Theil zu $t < t'$ gehört; diese Theile werden bei I) in Nr. 5 vorgestellt durch

$$\varrho = f_z, \quad z = \int_{t'}^{t'+\theta} F\,dt + z', \quad \varphi = \int_{t'}^{t'+\theta} \frac{P}{f}\,dt + \varphi',$$

$$\varrho = f_z, \quad z = \int_{t'}^{t'-\theta} F\,dt + z', \quad \varphi = \int_{t'}^{t'-\theta} \frac{P}{f}\,dt + \varphi'.$$

Gelten nach einander die Bedingungen

1) $$F_{t'+\theta} = F_{t'-\theta},$$
2) $$f_{z'+m} = f_{z'-m},$$
3) $$\left(\frac{P}{f}\right)_{t'+\theta} = -\left(\frac{P}{f}\right)_{t'-\theta},$$

so lassen sich mit Hilfe der obigen Gleichungen, nach denen stattfindet

$$\int_{t'}^{t'+\theta} F\,dt = -\int_{t'}^{t'-\theta} F\,dt, \quad \int_{t'}^{t'+\theta} \frac{P}{f}\,dt = \int_{t'}^{t'-\theta} \frac{P}{f}\,dt,$$

sowie mit den gegebenen Gleichungen für die Theile einer Curve zu $t > t'$ und $t < t'$ alle die Eigenschaften, welche in Nr. 5 für die Curven I) und III) unter den entsprechenden Bedingungen für f und $\frac{P}{f}$ bei $z'' = z'$ und $\varphi' = \varphi''$ enthalten sind, auf die genannten Theile jeder Curve übertragen, wenn man nur statt der Punkte zu gleichen t-Werthen Punkte zu solchen t-Werthen zusammennimmt, die um gleichviel grösser und kleiner als t' sind. — Tritt zu den Bedingungen 1), 2), 3) noch

4) $$\left(\frac{P}{f}\right)_{z'+m} = \left(\frac{P}{f}\right)_{z'-m}$$

hinzu und wird in den Linien I) und III) der Nr. 5 noch $z'' = z'$ und $\varphi'' = \varphi'$, so müssen nach dem eben angegebenen Verhalten der Theile jeder dieser Curven

die Curven I) und III) selbst zusammenfallen, und zwar muss der Theil zu $t > t'$ der einen auf dem Theile zu $t < t'$ der andern Curve liegen. Bei $\varphi'' \gtrless \varphi'$ fallen diese Linien erst dann zusammen, wenn die Curve III) im Betrage von $\varphi' - \varphi''$ um die z-Axe gedreht wird. Das nämliche Verhalten findet unter den gleichen Bedingungen bei II) und IV) statt.

Für die Bedingungen 2) und 4), sowie für $z'' = z'$ sind nach Nr. 5 die Curven I) und IV) und zwar die Theile dieser Linien congruent, welche gleichen t Werthen entsprechen. Für 1), 2), 3) und 4) sind nach dem eben bemerkten Resultat II) und IV) congruent, jedoch die Theile, welche zu $t > t'$ und $t < t'$ gehören; folglich müssen für die vier Bedingungen auch I) und II) und zwar, wie im letzten Falle, bezüglich ihre Theile zu $t > t'$ und $t < t'$ congruent sein. Analoges gilt von III) und IV), so dass alle vier Curven hier congruent werden.

Es sollen jetzt nach einander die Bedingungen bestehen:

1) $$F_{t'+\theta} = -F_{t'-\theta},$$

2) $$\left(\frac{p}{f}\right)_{t'+\theta} = \left(\frac{p}{f}\right)_{t'-\theta},$$

also auch stattfinden

$$\int_{t'}^{t'+\theta} F\,dt = \int_{t'}^{t'-\theta} F\,dt, \quad \int_{t'}^{t'+\theta} \frac{p}{f}\,dt = -\int_{t'}^{t'-\theta} \frac{p}{f}\,dt.$$

Weil durch die vorletzte Gleichung das z einer Curve für $t' + \theta$ und $t' - \theta$ das nämliche wird, so lässt sich die Bedingung 3) nur auf das unmittelbar darin vorkommende t beschränken. — Aus einer Vergleichung der zu $t > t'$ und $t < t'$ gehörigen Theile dieser Curven folgt, dass sämmtliche Eigenschaften, welche in Nr. 5 bei $z'' = z'$ und $\varphi'' = \varphi'$ für die Curven I) und II) enthalten sind, auf die bezeichneten Theile der Curven übertragen werden können, sobald man Punkte zu t-Werthen zusammennimmt, die von t' nach beiden Seiten hin gleichweit abliegen. — Würden sowohl für die Curve I) als II) der Nr. 5 $z'' = z'$ und $\varphi'' = \varphi'$, sowie die obigen Bedingungen vorausgesetzt, so gelten für die Theile der zwei Curven zu gleichen t-Werthen und für die Theile jeder einzelnen Curve zu $t > t'$ und $t < t'$ die nämlichen Eigenschaften, so dass nothwendig der Theil zu $t > t'$ der einen mit dem Theile zu $t < t'$ der andern Curve, und deshalb auch die Curve II) mit der Curve I) zusammenfallen muss. Für $\varphi'' \gtrless \varphi'$ erfolgt dieses Zusammenfallen erst bei einer Drehung der Curve um die z-Axe, welche $\varphi' - \varphi''$ beträgt. In den gleichen Beziehungen stehen auch die Curven III) und IV). — Nach Nr. 5 sind die Curven I) und IV) oder II) und III) congruent, wenn bei $z'' = z'$

$$f_{z'+m} = f_{z'-m}, \quad \left(\frac{p}{f}\right)_{z'+m} = \left(\frac{p}{f}\right)_{z'-m}.$$

Finden diese Beziehungen neben 1) und 2) statt, so werden alle vier Linien unter sich congruent, und zwar bei der einen Parthie die Theile zu gleichen t-Werthen, bei der andern Parthie bezüglich die Theile zu $t > t'$ und $t < t'$. Für $\varphi' = \varphi''$ ziehen sich die vier Linien auf zwei zusammen.

Im Falle nacheinander die Bedingungen vorhanden sind:

$$1) \qquad F_{t'+\theta} = F_{t'-\theta},$$

$$2) \qquad f_{z'+m} = f_{z'-m},$$

$$3) \qquad \left(\frac{P}{f}\right)_{t'+\theta} = \left(\frac{P}{f}\right)_{t'-\theta},$$

also auch

$$\int_{t'}^{t'+\theta} F\,dt = -\int_{t'}^{t'-\theta} F\,dt, \quad \int_{t'}^{t'+\theta} \frac{P}{f}\,dt = -\int_{t'}^{t'-\theta} \frac{P}{f}\,dt$$

ist, im Fall ferner $z'' = z'$ gedacht wird, und endlich statt der Punkte zu gleichen t-Werthen Punkte zu solchen t-Werthen zusammengenommen werden, die von t' um gleichviel verschieden sind, bestehen für die Theile zu $t > t'$ und $t < t'$ von jeder dieser Curven die sämmtlichen Bemerkungen, welche in Nr. 5 über die Curven I) und IV) unter ähnlichen Voraussetzungen für f und $\frac{P}{f}$ aufgestellt wurden; die genannten Theile jeder Curve sind also auch congruent. — Kommt zu den Bedingungen 1), 2) und 3) die Bedingung

$$4) \qquad \left(\frac{P}{f}\right)_{z'+m} = \left(\frac{P}{f}\right)_{z'-m}$$

hinzu, so kann man ganz in der früheren Weise schliessen, dass bei $\varphi'' = \varphi'$ beziehungsweise die Theile zu $t > t'$ und $t < t'$ von I) und IV), daher diese Linien selbst zusammenfallen müssen, und dass bei $\varphi'' \gtrless \varphi'$ dies erst dann eintritt, wenn die Curve IV) im Betrage von $\varphi' - \varphi''$ um die z-Axe gedreht wird. Das Nämliche gilt für die Curven II) und III). Die Curven I) und II) oder III) und IV) werden hier nicht congruent, indem sich ihre Gleichungen für die vorhandenen Bedingungen nur in Bezug auf Coordinatensysteme übereinstimmend machen lassen, welche nicht congruent sind. Jedoch kann bemerkt werden, dass z. B. für I) und II) nicht nur die in Nr. 5 über diese Linien, sondern auch die dort über I) und III) ausgesprochenen Eigenschaften gelten, wenn man nur im letzten Falle Punkte zusammennimmt, welche zu t-Werthen gehören, die um gleichviel grösser oder kleiner als t' sind.

Finden endlich die Bedingungen statt

$$F_{t'+\theta} = -F_{t'-\theta}, \quad \left(\frac{P}{f}\right)_{t'+\theta} = -\left(\frac{P}{f}\right)_{t'-\theta},$$

daher auch

$$\int_{t'}^{t'+\theta} F\,dt = \int_{t'}^{t'-\theta} F\,dt, \quad \int_{t'}^{t'+\theta} \frac{P}{f}\,dt = \int_{t'}^{t'-\theta} \frac{P}{f}\,dt,$$

so fällt bei jeder Curve der Theil zu $t < t'$ mit dem Theile zu $t > t'$ zusammen. Man kann hier also ohne Veränderung der Umstände die Voraussetzung machen, t soll entweder nur grösser oder nur kleiner als t' sein. Bei einer Vergleichung der Nr. 5 kann unter den jetzigen Bedingungen den dort gegebenen Bemerkungen nichts Besonderes mehr beigefügt werden.

In den bisherigen Betrachtungen zweier Curven wurde stets vorausgesetzt, dass $z'' = z'$ ist. Um nun auch einen Fall zu verfolgen, wo $z'' \gtrless z'$ ist, sollen für $F, f, \frac{P}{f}$ die ersten Bedingungen dieses Paragraphen gelten. Die Resultate für die anderen Fälle können auf ähnliche Weise erhalten werden. Für die Curve I) erhält man zunächst die Bedingungen

1) $$F_{t'+\theta} = F_{t'-\theta},$$

2) $$\left(\frac{P}{f}\right)_{t'+\theta} = -\left(\frac{P}{f}\right)_{t'-\theta},$$

3) $$f_{z'+m} = f_{z'-m},$$

4) $$\left(\frac{P}{f}\right)_{z'+m} = \left(\frac{P}{f}\right)_{z'-m}.$$

Damit für die Curve II) die gleichen Umstände vorhanden sind, hat neben 1) und 2) noch stattzufinden

5) $$f_{z''+m} = f_{z''-m},$$

6) $$\left(\frac{P}{f}\right)_{z''+m} = \left(\frac{P}{f}\right)_{z''-m}.$$

Besteht ausser diesen Voraussetzungen noch

7) $$f_{z'+m} = f_{z''-m},$$

8) $$\left(\frac{P}{f}\right)_{z'+m} = \left(\frac{P}{f}\right)_{z''-m},$$

so zeigt sich, dass die Seiten der Gleichungen des Theiles zu $t > t'$ der einen mit den Seiten der Gleichungen des Theiles zu $t < t'$ der andern Curve übereinstimmende Werthe liefern, sobald die Curve II) auf ein besonderes Coordinatensystem bezogen wird, wo beim Uebergang auf dasselbe $-z + z'' + z'$ statt z, und $-\varphi + \varphi' + \varphi''$ statt φ gesetzt werden muss. Da ausserdem das neue System congruent dem alten System ist, so sind die eben zusammengenommenen Theile der zwei Curven und daher die letzteren selbst congruent. Die acht Bedingungen dieses Falles können reducirt werden, weil sich zeigen lässt, dass 5) und 6) in den Gleichungen 3), 4), 7) und 8) enthalten sind; es folgt nämlich aus 3) und 7)

$$f_{z'-m} = f_{z''-m},$$

aus 7) folgt

$$f_{z'-m} = f_{z''+m},$$

und aus den beiden letzten Gleichungen folgt die Gleichung 5). Analog kann nachgewiesen werden, dass 6) in 4) und 8) enthalten ist. — Die Cur-

ven I) und III) sind unter den obigen Bedingungen ebenfalls congruent. Dies lässt sich entweder deshalb schliessen, weil die Curve III) in Bezug auf ein neues Coordinatensystem, für welches beim Uebergange $z+z''-z'$ statt z und $\varphi+\varphi''-\varphi'$ statt φ zu setzen ist, dieselben Gleichungen erhält, wie die Cnrve I) gegen das alte System, und beide Systeme dazu noch congruent sind, oder deshalb, weil I) und II) nach dem Vorausgegangenen, und wenn in II) und III) z'' und φ'' als Constante zu z und φ genommen werden, diese letzten Linien nach Nr. 5 congruent sind. Endlich werden auch die Curven I) und IV) congruent, denn die Bedingungen 7) und 8) führen unmittelbar zu denjenigen, welche in Nr. 5 die Congruenz I) und IV) nach sich gezogen haben. Zu dem nämlichen Resultat gelangt man auch aus der eben gezeigten Congruenz von I) und IV) und aus dem Zusammenfallen von II) und IV), das nach dem ersten besondern Falle dieser Nummer dann eintritt, wenn bei diesen letzten Linien z'' und φ'' die Constanten zu z und φ sind.

Wären bei den letzten Voraussetzungen zuerst I) und IV) oder II) und III) miteinander verglichen worden, so hätte auf die angedeutete Art mit Hilfe von Nr. 5 die Congruenz dieser Linien, durch das zuletzt berührte Zusammenfallen von II) und IV) die Congruenz von I) und II) und dadurch die Congruenz sämmtlicher vier Linien ohne eine besondere Coordinatenänderung eingesehen werden können.

Zum Schlusse der Betrachtungen dieses Paragraphen soll noch erwähnt werden, dass die Resultate irgend eines der besonderen Fälle dann stets gelten, wenn überhaupt ein Paar von t- und z-Werthen existirt, welches den Bedingungen dieses Falles Genüge leistet. Die besonderen Umstände, die oben vorhanden sind, dass nämlich der genannte t-Werth eine Grenze des Integrals ist und zu ihm der fragliche z-Werth gehört, können theils durch eine am Schlusse der Nr. 4 angedeutete Aenderung der Grenzen der Integrale, theils durch eine passende Verschiebung des Coordinatensystems längs der z-Axe herbeigeführt werden.

7. Es sollen jetzt einige besondere Fälle der Curven betrachtet werden.

Wenn $F=0$, also $z=c$ constant ist, so bestimmen unsere Gleichungen den Parallelkreis zu $z=c$, oder nur einen Theil desselben, je nachdem die äussersten Werthe, zwischen welchen $\int\frac{P}{f}dt$ für die verschiedenen t-Werthe variirt, sich um mindestens 2π unterscheiden oder nicht.

Für $P=0$ wird $\varphi=C$ constant und man erhält den Meridian zu diesem Winkel. Die Axencoordinaten dieses Meridians genügen nach Nr. 1 den Gleichungen

$$x=f\cos C,\quad y=f\sin C,\quad z=\int F\,dt.$$

Mit Zuziehung der dritten Gleichung erhält man den Meridian ganz oder nur zum Theil, je nachdem $\int F dt$ alle reellen Werthe durchläuft, für die f_z reell wird, oder nicht.

Sind die Gleichungen der Loxodrome herzuleiten, so darf man nur berücksichtigen, dass das in Nr. 1 näher bezeichnete Elementendreieck längs der ganzen Linie ähnlich sein muss. Bezeichnet α den constanten Winkel des Dreiecks, welchen das Element der Curve mit dem zugehörigen Element des Parallelkreises bildet, so ist

$$cotang\,\alpha = \frac{dp}{dm} = \frac{P\,dt}{\sqrt{df^2 + dz^2}}$$

oder

$$P = cotang\,\alpha . \frac{\sqrt{df^2 + dz^2}}{dt} = cotang\,\alpha . \partial z_t . \sqrt{1 + \partial f_z^2}.$$

Die Gleichungen der Loxodrome sind deshalb

1) $$\varrho = f_z,$$

2) $$z = \int F\,dt,$$

3) $$\varphi = cotang\,\alpha \int \frac{\sqrt{1 + \partial f_z^2}}{f}\,dz$$

oder in Axencoordinaten

$$x = f\,cos\left[cotang\,\alpha \int \frac{\sqrt{1 + \partial f_z^2}}{f}\,dz\right],$$

$$y = f\,sin\left[cotang\,\alpha \int \frac{\sqrt{1 + \partial f_z^2}}{f}\,dz\right],$$

$$z = \int F\,dt.$$

Die ersten der drei letzten Gleichungen bestimmen die Loxodrome und zwar zunächst ihre Projectionen auf die xz- und yz-Ebene. Durch Hinzunahme der dritten Gleichung erhält man, wie oben, die ganze Linie oder nur einen Theil derselben, je nachdem z alle Werthe annimmt, für die x und y reell werden oder nicht. Die Projection auf die xy-Ebene erhält man durch Elimination von z aus den Gleichungen für x und y.

Aehnliche Resultate können für alle die Linien aufgestellt werden, bei welchen $P = P' \partial z_t$ ist und P' kein unmittelbares t, sondern nur z enthält. Für diese Linien ist

$$\varphi = \int \frac{P'}{f}\,\partial z_t\,dt = \int \frac{P'}{f}\,dz$$

und daher

$$x = f . cos \int \frac{P'}{f}\,dz, \quad y = f\,sin \int \frac{P'}{f}\,dz, \quad z = \int F\,dt.$$

Sollte hier aus der ersten oder zweiten Gleichung das f sich wegheben, so wird die Projecton auf die xz- oder yz-Ebene für alle möglichen Rota

tionsflächen die nämliche. Um den Fall herbeizuführen, darf man nur, sobald F' eine beliebige Function von z vorstellt:

$$P = P'\partial z_t = \frac{f\partial F'_z - F'\partial f_z}{\sqrt{f^2 - F_1^2}} \cdot \partial z_t = f \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{F'}{f}\right)^2}} \cdot \partial\left(\frac{F'}{f}\right)_z \cdot \partial z_t$$

setzen; es wird dann

$$\varphi = \int \frac{P'}{f}\, dz = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{F'}{f}\right)^2}}\, \partial\left(\frac{F'}{f}\right)_z dz = arc\cos\frac{F'}{f}$$

und also

$$x = f \cdot \frac{F'}{f} = F' \text{ etc.}$$

Hieran schliesst sich unmittelbar die Aufgabe, das P oder F so zu wählen, dass die Projection der Curve in der xz- oder yz-Ebene eine gegebene wird. Man hat dabei noch zu beachten, dass die bestimmten Grenzen der Integrale der gegebenen Curve entsprechend angenommen werden müssen.

Enthält $\frac{P}{f}$ ausser durch f kein z und auch kein t, und ist $P = P''_f \cdot \partial f_t$ so werden die Gleichungen der Curve

$$\varphi = \int \frac{P''}{f}\, dt = \int \frac{P''}{f}\, \partial f_t\, dt = \int \frac{P''}{f}\, df,$$

daher

$$x = f\cos\int \frac{P''}{f}\, df, \quad y = f\sin\int \frac{P''}{f}\, df, \quad z = \int F\, dt.$$

Die beiden ersten Gleichungen bestimmen die Projectionen der Curve auf die xz- und yz-Ebene; sie bestimmen aber auch die Projection auf die xy-Ebene, sobald in einer von ihnen $\sqrt{x^2+y^2}$ statt f gesetzt wird. Weil in dieser die Projection auf die xy-Ebene bestimmenden Gleichung kein f mehr vorkommt, sondern nur x und y, so bleibt die Projection offenbar für alle Rotationsflächen unverändert. Mit diesem besondern Falle lässt sich daher die Aufgabe lösen, F oder P so zu bestimmen, dass die Curve eine gegebene Projection auf die xy-Ebene erhält. Die hier vorhandene Bedingungsgleichung ergiebt sich am leichtesten, wenn man sich die Polargleichung der gegebenen Projection nach y aufgelöst denkt und berücksichtigt, dass

$$\varphi = \int \frac{P''}{f}\, df$$

die Gleichung der Curve auf der Rotationsfläche ist, welche der vorher genannten Polargleichung zu entsprechen hat.

8. Durch die Lösung der Aufgaben, die Gleichungen der Linien auf Rotationsflächen mit Zuziehung der Functionen P und F zu bestimmen, welche gegebene Projectionen auf eine der Coordinatenebenen haben, ist

zugleich auch die Aufgabe gelöst, P oder F so zu wählen, dass überhaupt die Curve auf die Fläche eine gegebene wird. Man darf nämlich nur die Projection der gegebenen Linie auf eine der Coordinatenebenen aufsuchen und F oder P dem entsprechenden Falle der vorigen Nummer gemäss annehmen. Uebrigens ist es bei der letzten Aufgabe nicht einmal nothwendig, vorerst die Projectionen der gegebenen Curve auf eine der Coordinatenebenen aufzusuchen, da man unmittelbar an die Lösung derselben gehen kann. Ist etwa neben $x^2+y^2=f^2$ noch $f'_{x,y,z}=0$ eine Gleichung der gegebenen Curve, und setzt man in die letzte Gleichung statt x, y, z ihre Werthe aus Nr. 1, so erhält man unmittelbar die Bedingungsgleichung, welche $\int F\,dt$ und $\int \frac{P}{f}\,dt$ erfüllen müssen, damit die Curve im Raume die verlangte wird. Eines der beiden Integrale kann demnach als beliebige Function von t angenommen werden; das andere Integral ist dazu aus der genannten Gleichung zu bestimmen. Mit diesen Integrnlen sind natürlich auch F und P bekannt. Im Allgemeinen ist noch zu bemerken, dass das beliebig zu wählende Integral nicht gleich einer Constanten gesetzt werden darf, indem das andere Integral sich dann auch als unabhängig von t findet und die Gleichungen der Nr. 1 nicht eine Curve, sondern nur einen Punkt der Rotationsfläche bestimmen können. Hiervon machen die Fälle, bei welchen die Bedingungsgleichung blos ein Integral aufnimmt, in gewisser Beziehung eine Ausnahme; hier ergiebt sich aus der Gleichung für das darin enthaltene Integral ein bestimmter Werth, während das andere Integral wieder beliebig, jedoch auch da nicht constant angenommen werden darf. Diese letzteren Umstände treten ein, wenn die zu erhaltende Curve ein Parallelkreis oder ein Meridian sein soll.

Am einfachsten gestalten sich natürlich die Bedingungen für F und P, wenn die verlangte Curve durch $\varrho = f_z$ und $\varphi = \varphi_z$ bestimmt ist (es wäre hier oben in $f'_{x,y,z}=0$ statt $x=f_z \cos\varphi$, $y=f_z \sin\varphi$ zu setzen und nach φ aufzulösen); hier wird nämlich

$$\int \frac{P}{f}\,dt = \varphi_z, \quad \frac{P}{f} = \partial\varphi_z \,.\, \partial z_t \text{ oder } \frac{P}{f} = \partial\varphi_z \,.\, F.$$

Soll die Curve noch unbestimmt bleiben und sollen F und P so gewählt werden, dass die Curve etwa durch zwei gegebene Punkte geht, die durch z', φ' und $\varrho'=f_{z'}$, dann z'', φ'', $\varrho''=f_{z''}$ bestimmt sind, so können zu dem ersten und zweiten Punkt beliebige constante Werthe t' und t'' angenommen werden. Man erhält dann dafür, dass die Curve durch den ersten Punkt geht, die Gleichungen

$$z = \int_{t'}^{t} F\,dt + z', \quad \varphi = \int_{t'}^{t} \frac{P}{f}\,dt + \varphi',$$

wo F eine beliebige Function von t, P eine solche von t und z vorstellen kann. Damit die Curve auch durch den zweiten Punkt geht, muss

$$z'' = \int_{t'}^{t''} F\,dt + z', \quad \varphi'' = \int_{t'}^{t''} \frac{P}{f}\,dt + \varphi'$$

stattfinden; diesen Bedingungen kann Genüge geleistet werden, wenn je eine der constanten, von z oder t unabhängigen Grössen in den Integralen so bestimmt wird, dass die zwei Gleichungen erfüllt sind. Ausser diesen zwei bestimmten constanten Werthen in diesen Functionen bleibt nach wie vor alles Uebrige beliebig wählbar. Sollte die Curve noch durch mehr Punkte gehen, so könnten wieder die zugehörigen t-Werthe beliebig angenommen werden und es müssten in derselben Weise, wie es bei dem zweiten Punkte geschehen ist, soviel neue Constanten in $\int_{t'}^{t} F\,dt$ und $\varphi = \int_{t'}^{t} \frac{P}{f}\,dt$ den neuen z- und φ-Werthen angepasst werden, als Punkte vorhanden sind. Es ist daraus ersichtlich, dass, wenn die beliebigen Functionen F und P einmal angenommen sind, die zugehörige Curve nur durch soviel Punkte geführt werden kann, als die geringste Zahl der constanten Grössen in $\int F\,dt$ oder $\int \frac{P}{f}\,dt$ beträgt.

9. Die Formel für die Rectification der Curven ist

$$L = \int \sqrt{P^2 + (1 + \partial f^2{}_z)\, F^2}\, dt = \int \sqrt{f^2 \partial \varphi^2{}_t + (1 + \partial f^2{}_z)\, \partial z^2{}_t}\, dt.$$

Den Ausdruck unter dem Integralzeichen hat man, insofern es als Länge eines Elements gedacht wird, stets absolut zu nehmen. Wenn dieses Integral zwischen den Grenzen t und t' genommen wird, so erhält man die Länge des Theiles der Curve, welcher zwischen den zu t und t' gehörigen Punkten liegt. Will man die Länge der Curve zwischen Punkten zu gegebenen Coordinaten, so kann man in die Gleichungen, welche den gegebenen Coordinatenwerthen entsprechen, einmal die eine, das andere Mal die andere Grenze einsetzen und die aus den Gleichungen sich ergebenden t-Werthe als entsprechende Grenzen des obigen Integrals nehmen.

Aus der Formel für L ergiebt sich, dass, wenn in den Curven I) und II) oder III) und IV) der Nr. 5 $z' = z''$ ist, zwischen Punkten zu gleichen t-Werthen oder zwischen den nämlichen Parallelkreisen gleichlange Stücke der zusammengenommenen Curven liegen. Dasselbe Resultat lässt sich auch leicht auf die zwei Theile einer Curve zu $t > t'$ und $t < t'$ übertragen, sobald die bezüglichen Bedingungen der Nr. 6 gelten.

Es lassen sich verschiedene Beziehungen angeben, wo L besondere Bedingungen erfüllt. Um ein Beispiel dieser Art zu verfolgen, soll zwischen P und F die Bedingung bestehen

$$\frac{P}{\sqrt{1+\partial f^2{}_z F}} = N,$$

wo N nur eine Function von z sein soll. Die Bedingung drückt aus, dass in unserem Elementendreieck das Verhältniss von dp und dm oder von den Elementen des Parallelkreises und des Meridians einer nur von z abhängigen Function entspricht, oder dass diese Function gleich $tang\,\alpha$ oder gleich der trigonometrischen Cotangente des Winkels ist, den die Tangente unserer Curve mit dem Parallelkreis bildet. Hier wird

$$L = \int_{z'}^{z''} \sqrt{1+\partial f^2{}_z} \,.\, \sqrt{1+N^2}\, dz = (\sqrt{1+N^2}\,.\,M_z)_{z'}^{z''} - \int_{z'}^{z''} \frac{N\,\partial N_z}{\sqrt{1+N^2}}\,.\,M_z\,dz,$$

M ist die Meridianlänge und z', z'' sind die z-Werthe der Endpunkte. Wird berücksichtigt, dass $N = cotang\,\alpha$, so kann noch gesetzt werden

$$L = \left(\frac{M}{sin\,\alpha}\right)_{z'}^{z''} - \int_{z'}^{z''} \frac{\sqrt{1-sin^2\alpha}}{sin^2\alpha}\,.\,M_z\,.\,\partial\alpha_z\,.\,dz.$$

Diese letzte Form eignet sich insbesondere für den Fall, dass $\sphericalangle\,\alpha$ als Function von z gegeben ist. Die Gleichung zwischen α und z könnte auch noch nach z aufgelöst und dann L die Form gegeben werden

$$L = \left(\frac{M}{sin\,\alpha}\right)_{\alpha'}^{\alpha''} - \int_{\alpha'}^{\alpha''} \frac{\sqrt{1-sin^2\alpha}}{sin\,\alpha}\,.\,M\,d\alpha.$$

Hier wären α'' und α' die Werthe, welche α für $z=z'$ und $z=z''$ annimmt. Für die Loxodrome ist $N = cotang\,\alpha$ oder auch α constant, daher wird

$$L = \frac{M_{z''} - M_{z'}}{sin\,\alpha}$$

oder gleich der Meridianlänge zwischen den Parallelkreisen der Endpunkte, getheilt durch den Sinus des Winkels der Curve mit den Parallelkreisen.

Sowie oben zwischen dp und dm eine gewisse Beziehung angenommen wurde, so könnte dies auch zwischen dp und ds oder zwischen dm und ds geschehen und die obige Formel für L diesen Beziehungen entsprechend umgeformt werden.

Die Formel für die Krümmung kann aus

$$\eta^2 = \frac{(\partial^2 x_t\,\partial y_t - \partial^2 y_t\,\partial x_t)^2 + (\partial^2 z_t\,\partial x_t - \partial^2 x_t\,\partial z_t)^2 + (\partial^2 y_t\,\partial z_t - \partial^2 z_t\,\partial y_t)^2}{(\partial x^2{}_t + \partial y^2{}_t + \partial z^2{}_t)^3}$$

erhalten werden, wenn man die verschiedenen Ableitungen aus den Gleichungen für x, y, z in Nr. 1 herholt. Es ergiebt sich durch eine ziemliche Rechnung das Resultat



$$1)\ \eta^2 = \frac{P^4\left[-P+f^2\partial\left(\frac{\partial f_z F}{fP}\right)_t\right]^2 + F^2[-P^2+F^2 f.\partial^2 f_z]^2 + f^4 P^4\left[\partial\left(\frac{F}{fP}\right)_t\right]^2}{f^2[P^2+(1+\partial f^2_z)F^2]^3}.$$

Will man das Resultat ohne Hinzunahme der Veränderlichen t erhalten, so darf man nur $t=z$ und $F=\partial z_t=1$ setzen; dadurch wird

$$\eta^2 = \frac{P^4\left[-P+f^2\partial\left(\frac{\partial f_z}{fP}\right)\right]^2 + [-P^2+f\partial^2 f_z]^2 + f^4 P^4\left[\partial\left(\frac{1}{fP}\right)_z\right]^2}{f^2[P^2+1+\partial f^2_z]^3}.$$

Aus diesem Resultat folgt durch Entwickelung der zusammengesetzten Ableitungen und geeignetes Zusammenfassen die andere Form

$$2)\ \eta^2 = \frac{[-P^2+f\partial^2 f_z]^2 + [\partial(Pf)_z]^2 + [(-P^2+f\partial^2 f_z)P - \partial(Pf)_z\,.\,\partial f_z]^2}{f^2(1+\partial f^2_z + P^2)^3}$$

oder auch, weil $P=f\partial\varphi_t = f\partial\varphi_z$ ist,

$$3)\ \eta^2 = \frac{[-f^2\partial\varphi^2_z + f\partial^2 f_z]^2 + [\partial(f^2\partial\varphi_z)_z]^2 + [(-f^2\partial\varphi^2_z + f\partial^2 f_z)\,.\,f\partial\varphi_z - \partial(f^2\partial\varphi_z)_z\,.\,\partial f_z]^2}{f^2(1+\partial f^2_z + f^2\partial^2_z)^3}.$$

Die letzte Form eignet sich zur Bestimmung in allen Fällen, wo die Curve auf die Rotationsfläche in der angemessensten Art, nämlich durch z, f und φ bestimmt ist. Für $F=0$ oder z constant geht die Gleichung 1) über in $\eta^2 = \frac{1}{f^2}$, d. h. die Krümmung entspricht der des zugehörigen Parallelkreises. Die Formeln 2) und 3) sind für diesen besondern Fall nicht unmittelbar zu gebrauchen, weil in ihnen nicht nach z aufgelöst gedacht wird. Setzt man $P=0$ oder φ constant, so erhält man $\eta^2 = \frac{\partial^2 f^2_z}{(1+\partial f^2_z)^3}$ oder die Krümmung des Meridians. Wird

$$P = cotang\,\alpha\,.\sqrt{1+\partial f^2_z}\,.\,F$$

in 1) oder

$$P = cotang\,\alpha\,.\sqrt{1+\partial f^2_z}$$

in 2) oder

$$\partial\varphi_z = cotang\,\alpha\,.\,\frac{1}{f}\,.\sqrt{1+\partial f^2_z}$$

in 3) gesetzt, so erhält man die Formeln für die Krümmung der Loxodrome.

10. Würde in Nr. 1 bei sonst gleichen Voraussetzungen statt $\partial z_t = F_t$ irgend eine Differentialgleichung zwischen t und z gegeben sein, so würden die gefundenen Gleichungen ebenfalls noch giltig bleiben; man dürfte hier nur aus der erwähnten Differentialgleichung z bestimmen und den gefundenen Werth in die Gleichungen 1), 2) und 3) einsetzen. Wenn in P Ableitungen von z vorkommen sollten, so hält es nicht schwer, nöthigenfalls aus der Differentialgleichung für z soviele neue Gleichungen herzuleiten, als zur Bestimmung der Ableitungen nothwendig sind.

Hierher gehört der Fall, wo $F\,dt$ bei dem Elementendreieck der Nr. 1 nicht gleich dem Elemente der z-Axe, sondern gleich dem zugehörigen Elemente des Meridians oder $= M\,dt$ werden soll. Statt der Gleichung 3) erhält man hier aus $\sqrt{1+\partial f^2_z}\,.\,\partial z_t = M$ die Gleichung

$$\int\sqrt{1+\partial f^2_z}\,\partial z = \int M\,dt.$$

Die Gleichungen 1) und 2) bleiben unverändert; man hat nur das z dem Werthe gleich zu nehmen, welcher sich aus der letzten Gleichung ergiebt.

Die in Nr. 1 vorkommenden Integrationen lassen sich so unmittelbar nicht durchführen, sobald die Gleichung der Rotationsfläche nicht in der Form $x^2+y^2=f^2$, sondern in der Form $f_{z,w}=0$ gegeben ist und diese Gleichung nicht wohl nach $w=\sqrt{x^2+y^2}$ aufgelöst werden kann. An die Stelle der Gleichung in Nr. 1, $\partial x^2_t + \partial y^2_t = \partial f^2_t + P^2$, tritt hier

$$\partial x^2_t + \partial y^2_t = \partial w^2_t + P^2$$

oder, weil

$$\partial w_t = \frac{x\,\partial x_t + y\,\partial y_t}{w}$$

ist, nach gehöriger Umformung

$$\frac{y\,\partial x_t - x\,\partial y_t}{w} = P.$$

Zu dieser Gleichung ist noch $f_{z,w}=0$ und die daraus abgeleitete Gleichung

$$\partial f_z . \partial z_t + \partial f_w . \frac{x\,\partial x_t + y\,\partial y_t}{w} = 0$$

zu nehmen. Nimmt man, wie früher, z und seine Ableitungen als bestimmt an, so muss man, um eine Gleichung zur Bestimmung von x zu erhalten, aus den drei letzten Gleichungen y und ∂y_t eliminiren. Bei der Bestimmung von y müssen x und ∂x_t eliminirt werden.

Kommen in F und P neben t auch z, x, y und deren Ableitungen vor, so sind zu den eben aufgestellten drei Gleichungen, sowie zu der Gleichung für ∂z_t durch geeignetes Ableiten der Gleichungen mit den niedrigeren Differentialquotienten oder durch passendes Integriren soviel neue Gleichungen herzuleiten, dass durch die Elimination zweier Coordinatenwerthe mit ihren Ableitungen eine Differentialgleichung zur Bestimmung des dritten Coordinatenwerthes übrig bleibt. In diesen Fällen kann in den Resultaten t nicht blos gleich z, sondern auch gleich x oder y genommen werden.

11. Wird t als Zeit gedacht, so kann man sich die Linie der Nr. 1 durch die Bewegung eines Punktes auf der Rotationsfläche beschrieben denken, welcher sich in der Richtung der z-Axe mit einer Geschwindigkeit $=F$ oder, was zu der nämlichen Linie führt, auf dem zugehörigen Meridian mit einer Geschwindigkeit $=\sqrt{1+\partial f^2_z}\,.\,F$ und gleichzeitig auf dem zugehörigen Parallelkreise mit einer Geschwindigkeit $=P$ fortbewegt. Man

könnte auch dem Punkte nur die genannten Geschwindigkeiten längs der z-Axe oder längs seines Meridians geben und gleichzeitig die Rotationsaxe fläche um die z Axe mit einer Winkelgeschwindigkeit $= -\frac{P}{f}$ sich drehen lassen; oder man könnte die Rotationsfläche in der Richtung der z-Axe mit einer Geschwindigkeit $= -F$ und den Punkt auf den Parallelkreisen mit einer Geschwindigkeit $= P$ sich bewegt denken; oder man könnte endlich den Punkt feststehend annehmen und die Rotationsfläche mit einer Geschwindigkeit $= -F$ längs der z-Axe sich fortbewegen, zugleich aber mit einer Winkelgeschwindigkeit $= -\frac{P}{f}$ um die letztere Axe sich drehen lassen. Durch die Bestimmung der Constanten der Integrale wird für eine gewisse Zeit die Lage des erzeugenden Punktes auf der Rotationsfläche bestimmt. Um bei dieser Anschauungsweise auch den Theil der Curve zu erhalten, der zu t-Werthen gehört, die kleiner sind als der Anfangswerth, kann man sich in den die Bewegung bestimmenden Gleichungen Anfangswerth weniger t anstatt Anfangswerth plus t setzen und nun dem t wieder absolute Werthe geben.

In Nr. 8 ist unter den jetzigen Voraussetzungen die Aufgabe gelöst, die Beziehungen aufzufinden, in welchen die bezeichneten zweierlei Bewegungen stehen müssen, damit die Curve auf der Rotationsfläche eine verlangte wird. Da bei dieser Erzeugung der Linien nach den dortigen Bemerkungen eine der Bewegungen willkürlich gewählt werden kann und die andere entsprechend dazu bestimmt werden muss, so lässt sich noch darauf Rücksicht nehmen, möglichst solche Bewegungen zu erhalten, die sich am leichtesten einleiten lassen. Wird jede der zwei Bewegungen auf diese Weise selbstständig ausgedrückt, so kann jede derselben durch einen besondern Mechanismus hervorgebracht werden und es handelt sich nur darum, beide so zu stellen, dass für den Zeitanfang der erzeugende Punkt die verlangte Lage hat. Ist, wie bei $\frac{P}{f} = \partial\varphi_z . F$ oder $\partial\varphi = \partial\varphi_z . dz$ in Nr. 8, das t beseitigt und eine Beziehung zwischen $d\varphi$ und dz vorhanden, so können beide Bewegungen einem und demselben Mechanismus übertragen werden, der 1. die geradlinige Bewegung längs der z-Axe in eine kreisförmige um diese Axe oder umgekehrt verwandelt und 2. zwischen dem Wege dz und der zugehörigen Drehung $d\varphi$ ein Grössenverhältniss herstellt, das für die Stellung z dem Werthe von $\partial\varphi_z$ entspricht. Die Drehbank ist eine solche Vorrichtung, bei welcher die angedeuteten Bewegungsrichtungen vorhanden sind. Bei Bestimmung des $\partial\varphi_t$ und ∂z_t können die Drehung der Axe und die Fortbewegung des Supports selbstständig eingeleitet werden; bei Ermittelung der Gleichung zwischen $d\varphi$ und dz ohne Zuhilfenahme des t kann die eine Bewegung durch die andere hervorgebracht werden, wenn die Bewegungsübersetzung zwischen $d\varphi$ und dz das dem $\partial\varphi_z$ entsprechende Verhältniss herstellt. Im

letzteren Falle kann die Geschwindigkeit der einen Bewegung irgendwie genommen werden; die andere Geschwindigkeit wird dann von selbst diejenige, welche zur Zeichnung der verlangten Curve nothwendig ist.

12. Um die Anwendbarkeit der obigen Betrachtungen zu zeigen, sollen hier einige besondere Fälle von Curven ins Auge gefasst werden. Auf eine besondere Discussion der Curven wird dabei nicht eingegangen werden, da im Vorausgegangenen, so namentlich in Nr. 3, in Bezug auf die Ermittelung der Form der Curven und ihrer Projectionen alle die allgemeinen Anhaltspunkte entwickelt wurden, welche bei diesen Betrachtungen zu Grunde zu legen sind.

Sind die beiden Bewegungen gleichförmig, also $\partial \varphi_t = \frac{P}{f} = w$ constant, desgleichen $\partial z_t = v$, so werden die Gleichungen der Curve

$$\varrho_z = f_z, \quad z = vt + z', \quad \varphi = wt + \varphi',$$

wo z' und φ' die z- und φ-Werthe bei $t = 0$ bezeichnen. Die windschiefe Fläche der Nr. 3 wird bestimmt durch

$$\varphi = w \frac{z - z'}{v} + \varphi'.$$

Die Axengleichungen der Curven sind

$$x = f \cos(wt + \varphi'), \quad y = f \sin(wt + \varphi'), \quad z = vt + z';$$

die Projectionen auf die verschiedenen Coordinatenebenen werden bestimmt durch

$$x = f.\cos\left(w.\frac{z - z'}{v} + \varphi'\right), \quad y = f.\sin\left(w.\frac{z - z'}{v} + \varphi'\right), \quad x^2 + y^2 = f^{2}_{z},$$

wo statt z in der letzten der Werth aus einer der vorletzten Gleichungen, oder umgekehrt der Werth von z aus dieser in eine jener Gleichungen zu setzen ist. Die Polargleichung der Projection auf die xy-Ebene ergiebt sich, wenn in $\varrho = f_z$, $z = vt + z'$, oder

$$z = v.\frac{\varphi - \varphi'}{w} + z'$$

gesetzt wird, daher auch die Axengleichung dieser Projection durch Substitution von $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = arctang \frac{y}{x}$. Weil $\frac{d\varphi}{dz}$ hier constant ist, so braucht die Bewegungsübersetzung nur so eingerichtet zu werden, dass Drehung und Verschiebung proportional sind.

Nimmt man als Rotationsfläche den Cylinder, so ist $f = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ constant; daher werden unter den letzten Voraussetzungen die obigen Gleichungen der Curve und ihrer Projectionen:

$$\varrho = r. \quad z = vt + z', \quad \varphi = wt + \varphi';$$

$$x = r\cos(wt + \varphi'), \quad y = r\sin(wt + \varphi'), \quad z = vt + z';$$

$$x = r\cos\left(w.\frac{z - z'}{\varphi} + \varphi'\right), \quad y = r\sin\left(w.\frac{z - z'}{v} + \varphi'\right), \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Die Curve ist hier bekanntlich die Schraubenlinie; ihre Ganghöhe entspricht der Differenz zweier z-Werthe, die um $t=\frac{2\pi}{w}$ auseinanderliegen, oder es wird $h=v.\frac{2\pi}{w}$; ihren Neigungswinkel gegen die z-Axe oder die Mantellinie giebt

$$tang\,\beta=\frac{dp}{dm}=\frac{r\,d\varphi}{dz}=\frac{rw}{v}.$$

Weil β constant ist, wird die Curve eine Loxodrome. Aus den Gleichungen für h und β ergiebt sich, in welchem Verhältnisse w und v stehen müssen, damit die Ganghöhe oder der Neigungswinkel verlangte werden.

Die Länge der Curve zwischen den Punkten zu z und z' ist nach Nr. 9

$$L=\frac{z-z'}{cos\,\beta},$$

die Krümmung

$$\eta=\frac{r^2\frac{w^2}{v^2}}{r\left(1+\frac{r^2w^2}{v^2}\right)}=\frac{tang^2\beta}{r\,(1+tang^2\beta)}=\frac{sin^2\beta}{r}$$

oder der Krümmungsradius $=\frac{r}{sin^2\beta}$.

Für den Rotationskegel, dessen Spitze wir im Ursprung annehmen wollen, wird $f=az$, wo $a=tang\,\gamma$ und γ den Winkel der Mantellinie mit der z-Axe vorstellt. Hier erhalten die obigen Gleichungen die Form

$$\varrho=az,\quad z=vt+z',\quad \varphi=wt+\varphi';$$
$$x=az\,cos\,(wt+\varphi'),\quad y=az\,sin\,(wt+\varphi'),\quad z=vt+z';$$

die Projectionen der Curve werden bestimmt durch

$$x=az\,.\,cos\left(w.\frac{z-z'}{v}+\varphi'\right),\quad y=az\,sin\left(w.\frac{z-z'}{v}+\varphi'\right),$$

die auf die xy-Ebene durch Einführung von

$$z=\frac{\varrho}{a}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}$$

in eine der letzten Gleichungen. Die Polargleichung der letzten Projection wird

$$\varrho=az=av.\frac{\varphi-\varphi'}{w}+z'=\frac{av}{w}.\varphi-\frac{av}{w}.\varphi'+z';$$

da in dieser $d\varrho$ proportional dem $d\varphi$ ist, so ist diese Projection die gemeine Spirale. Die Ganghöhe ist gleich der Länge des Meridians für

$$z''-z'=h=v.\frac{2\pi}{w}\ \text{oder}\ =\frac{z''-z'}{cos\,\gamma}=\frac{v.2\pi}{w.cos\,\gamma};$$

der Neigungswinkel gegen den Meridian wird

$$tang\beta = \frac{dp}{dm} = \frac{\varrho \, . \, d\varphi}{\left(\frac{dz}{cos\gamma}\right)} = \frac{az \, . \, tang\gamma \, . \, z \, . \, w}{\left(\frac{v}{cos\gamma}\right)} = \frac{z \, . \, w}{v} \, . \, sin\gamma.$$

Die Curve ist also keine Loxodrome und ihr Winkel gegen die Mantellinien wird um so kleiner, je mehr sich die Curve von der Spitze entfernt. Die Rectification und Krümmung können mit Hilfe von Nr. 9 bestimmt werden.

Für die Kugel wäre

$$\varrho = \sqrt{r^2 - z^2}, \quad z = vt + z', \quad \varphi = wt + \varphi'.$$

Die übrigen Bestimmungen sind leicht auf die bereits angegebene Weise zu treffen.

Bleibt die drehende Bewegung gleichförmig und wird die Bewegung parallel der z-Axe eine gleichförmig beschleunigte, so wird

$$z = \tfrac{1}{2} g t^2 + ct + z'.$$

c stellt die Anfangsgeschwindigkeit und g die Beschleunigung vor. Die übrigen Gleichungen bleiben $\varrho = f_z$, $\varphi = wt + \varphi'$. Eliminirt man aus z und φ das t, so erhält man als Gleichung der windschiefen Fläche, die für die Bewegungen eine bestimmte ist und als Schnitt mit der Rotationsfläche die verlangte Curve giebt,

$$z = \tfrac{1}{2} g \, . \left(\frac{\varphi - \varphi'}{w}\right)^2 + c \, . \, \frac{\varphi - \varphi'}{w} + z'.$$

Die anderen hierher gehörigen Gleichungen sind analog dem Obigen zu erhalten. Wird g negativ gesetzt, so ist die Bewegung parallel der z-Axe eine gleichförmig verzögerte. Setzt man $g =$ der Beschleunigung der Schwere, so erhält man die Curven, welche ein Punkt auf die sich gleichförmig um ihre Axe drehende Rotationsfläche zeichnet, der parallel der verticalen Rotationsaxe geführt wird und dessen Führung unter dem Einflusse der Schwere steigt oder fällt. Hierher gehört demnach auch die Curve auf dem Cylinder des Morin'schen Fallapparates; für dieselbe ist noch $c = 0$ und kann der Ursprung des Systems so angenommen werden, dass auch z' und $\varphi' = 0$ sind. Man erhält demnach zur Bestimmung dieser Curve

$$z = \tfrac{1}{2} g t, \quad \varrho = r, \quad \varphi = wt;$$

die windschiefe Fläche wird bestimmt durch

$$z = \tfrac{1}{2} g \, . \, \frac{\varphi^2}{w^2}.$$

Weiter erhält man die Gleichungen

$$x = r \cos wt, \quad y = r \sin wt, \quad z = \tfrac{1}{2} g t^2;$$

$$x = r \cos\left(w\sqrt{\frac{2z}{g}}\right), \quad y = r \sin\left(w\sqrt{\frac{2z}{g}}\right), \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Der Abstand nächstliegender Punkte auf derselben Mantellinie wird

$$z = \frac{2g\pi(wt+\pi)}{w^2} = \frac{2g\pi(\varphi+\pi)}{w^2},$$

also in der Folge immer grösser; der Neigungswinkel mit der Mantellinie führt zu

$$tang\,\beta = \frac{dp}{dm} = \frac{rw}{gt} = \frac{rw^2}{\varphi}$$

und wird demnach immer kleiner. In Bezug auf die Rectification und Krümmung, die nach Nr. 9 leicht zu bestimmen sind, ist eine besondere Bemerkung nur insofern zu machen, als der Krümmungshalbmesser um so grösser wird, je grösser das z ist. Die Entwickelung der Curve entspricht der Parabel, welche entsteht, wenn ein Körper mit einer horizontalen Geschwindigkeit $= rw$ hinausgeworfen würde und kein Luftwiderstand vorhanden wäre.

Aehnlich, wie im letzten Falle das z, könnte man die Winkelgeschwindigkeit φ durch eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte Drehung und das z durch eine gleichförmige Bewegung entstehen lassen. Man würde dadurch auch die Curven erhalten, welche entstehen, wenn die Rotationsaxe horizontal liegt und die Rotation mittels einer auf einem cylindrischen Ansatze sich abwickelnden und mit einem fallenden Gewicht versehenen Schnur hervorgebracht und die zeichnende Spitze parallel der Axe gleichförmig fortgeführt wird. Die Gleichungen der Curven für diesen Fall sind

$$\varrho = f_z, \quad z = vt + z', \quad \varphi = \frac{\theta . t^2}{2} + w . t + \varphi',$$

θ bezeichnet die Winkelbeschleunigung und w die anfängliche Winkelgeschwindigkeit. Für die verzögerte Bewegung ist θ negativ zu nehmen. θ wäre, wenn die Drehung durch ein fallendes Gewicht hervorgebracht und von der Massenbewegung und den Bewegungswiderständen abgesehen wird, $= \frac{g}{m}$; dabei ist g die Beschleunigung der Schwere und m der Radius des cylindrischen Ansatzes. — Nun liessen sich beide Bewegungen als beschleunigte oder verzögerte, oder abwechselnd als solche auffassen; oder man könnte das z und φ durch Schwingungen elastischer Körper, welche nach $z = \mathfrak{z}\, sin\, t\sqrt{\mu}$ oder $\varphi = f . sin\, t\sqrt{u}$ erfolgen, entstehen lassen, oder endlich nur die eine dieser Grössen den Schwingungen entsprechend annehmen und bei der andern eine gleichförmige oder beschleunigte, oder verzögerte Bewegung annehmen — in allen den Fällen hält es nicht schwer, die Gleichungen der verlangten Curve sofort anzuschreiben. Ausserdem sind alle Andeutungen im Allgemeinen gegeben, welche bei der Discussion dieser Linien zu betrachten sind.

Ist die Geschwindigkeit des zeichnenden Punktes nicht längs der z-Axe, sondern längs des Meridians bekannt, so hat man nach Nr. 11 aus $v = \sqrt{1 + \partial f^2_z} . \partial z_t$ das $\partial z_t = \frac{v}{\sqrt{1 + \partial f^2_z}}$ und daraus z zu bestimmen. Die

Gleichungen für ϱ und φ bleiben unverändert. Lässt man beispielsweise die Bewegung auf dem Meridian und die Drehung gleichförmig sein, so sind w und v constant und man erhält aus $\partial z_t = \frac{v}{\sqrt{1+\partial f^2_z}}$

$$t = \frac{1}{v}\int \sqrt{1+\partial f^2_z}\, dz.$$

Diese Gleichung bestimmt neben $\varrho = f_z$ und $\varphi = wt + \varphi'$ unsere Curve. Die weiteren Gleichungen sind hieraus ohne Mühe abzuleiten. Für $f =$ constant ergeben sich die Gleichungen der Schraubenlinie, für $f = az$ die der entsprechenden Linie auf der Kegelfläche.

Man kann nun im letzten Falle auch statt der Winkelgeschwindigkeit die Geschwindigkeit auf dem Parallelkreise constant sein lassen; dann erhält man die Gleichungen

$$t = \frac{1}{v}\int \sqrt{1+\partial f^2_z}\, dz = \frac{M_z}{v}, \quad \varphi = p\int \frac{1}{f}\, dt, \quad \varrho = f_z.$$

Das M_z ist die Länge des Meridians bis zur Stelle zu z. Da hier

$$cotang\, \alpha = \frac{dp}{dm} = \frac{p\, dt}{v\, dt} = \frac{p_t}{v}$$

constant ist, so sind diese Curven nichts Anderes, als die Loxodromen. Aus

$$M_z = vt, \quad \partial M_z . \partial z_t = v \text{ oder } \sqrt{1+\partial f^2_z} . \partial z_t = v \text{ und } \frac{p}{v} = v_z\, cotang\, \alpha$$

folgt

$$p = cotang\, \alpha . \sqrt{1+\partial f^2_z} . \partial z_t,$$

daher

$$\varphi = \int \frac{p}{f}\, dt = cotang\, \alpha \int \frac{\sqrt{1+\partial f^2_z}}{f}\, dz$$

oder die frühere Gleichung. Sehr einfach gestaltet sich mit den neuen Bestimmungsstücken die Rectification; es wird nämlich

$$L = \int \sqrt{f^2 \partial \varphi^2_t + (1+\partial f^2_z)\partial z^2_t}\, dt = \int \sqrt{p^2+v^2}\, dt = (\sqrt{p^2+v^2})t;$$

ein Resultat, das sich auch unmittelbar ergiebt.

13. Die Geschwindigkeit P auf dem Parallelkreise kann auch aus zwei Theilen bestehen und etwa $= P' \pm P''$ sein, alsdann lässt sich der eine Theil als Geschwindigkeit auf dem Parallelkreise noch fortbetrachten, der andere Theil aber, durch f dividirt und mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen, als Winkelgeschwindigkeit des Körpers einführen. Aehnliches gilt für ∂z_t. Umgekehrt ist man beim Vorhandensein zweier solcher Bewegungen im Stande, sie auf leicht ersichtliche Weise nur auf eine Bewegung zurückzuführen und dadurch unsere obigen Resultate unmittelbar zur Anwendung zu bringen.

Als Beispiel dieser Art soll Folgendes genommen werden. Eine Rotationsfläche drehe sich mit constanter Winkelgeschwindigkeit w um ihre Axe

und auf ihr habe ein Punkt eine constante Geschwindigkeit p in der Richtung des jeweiligen Parallelkreises und eine constante Geschwindigkeit v in der Richtung des Meridians. Die xy-Ebene sei so gewählt, dass p und w positiv oder negativ zu nehmen sind, je nachdem sie mit der Drehrichtung von $OX - OY$ übereinstimmen oder nicht. Will man nun die Rotationsfläc' ⌄ als feststehend betrachten, so muss man dem erzeugenden Punkte noch die Geschwindigkeit $-fw$ auf dem zugehörigen Parallelkreise geben; die Gesammtgeschwindigkeit wird dann $p - fw$. Man erhält demnach für die Curve folgende Gleichungen:

$$\varrho = f_z, \quad \int \sqrt{1 + \partial f^2_z}\, dz = vt, \quad \varphi = \int \frac{p - fw}{f}\, dt = p \int \frac{1}{f}\, dt - wt.$$

Aus

$$cotang\, \alpha = \frac{dp}{dm} = \frac{p - fw}{v}$$

folgt, dass α nicht constant und die Curve daher keine Loxodrome ist. Die anderen Eigenschaften der Curve ergeben sich auf bekannte Weise. Je nach den verschiedenen Vorzeichen von p, w und v erhält man zu denselben absoluten Grössen verschiedene Curven. Ist an einer bestimmten Stelle $p = fw$, so geht die Curve in diejenige über, welche ein Punkt beschreibt, der in der Richtung des Meridians, etwa der Erde, mit einer Geschwindigkeit v fortzugehen und gleichzeitig vermöge der Trägheit die Geschwindigkeit der Punkte des anfänglichen Parallelkreises beizubehalten sucht, welche dieselben vermöge der Umdrehung der Erde haben. Für diese Anwendung ist es vortheilhaft, die Umdrehungszeit einzuführen; sie sei $= \tau$. Nun wird, wenn f' den Radius des anfänglichen Parallelkreises vorstellt:

$$w = \frac{2\pi}{\tau} \text{ und } p = f' . \frac{2\pi}{\tau};$$

folglich geht die Gleichung für φ über in

$$\varphi = \frac{2\pi}{\tau}\left(f' \int \frac{1}{f}\, dt - t\right).$$

Nimmt man die Erde als Kugel an, versetzt die Anfangsstelle an den Aequator und lässt die x-Axe durch diese Stelle gehen, so ist für $t = 0$ φ und $z = 0$; dann ist

$$\tau = 24.60.60, \quad f' = r,$$

mithin

$$1) \quad \varrho = \sqrt{r^2 - z^2}, \quad \int \sqrt{1 + \partial f^2_z}\, dz = \int \frac{r}{\sqrt{r^2 - z^2}}\, dz, \quad \text{d. i. } r\, arcsin\, \frac{z}{r} = vt,$$

oder

$$2) \quad z = r \sin \frac{vt}{r},$$

welche Gleichung sich auch unmittelbar einsehen lässt; endlich ist

$$\varphi = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(r\int\frac{1}{\sqrt{r^2-z^2}}dt - t\right) = \frac{2\pi}{24.60.60}\left(\int\frac{1}{\cos\frac{vt}{r}}dt - t\right)$$

$$= \frac{2\pi}{24.60.60}\left(-\frac{r}{v}\,.\,Log\left[tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{vt}{2r}\right)\right]-t\right).$$

Man sieht hieraus, dass für φ nur so lange reelle Werthe existiren, als

$$\frac{vt}{2r} < \frac{\pi}{4},\quad t < \frac{r\pi}{2v},$$

als, mit Worten, der Punkt vermöge seiner Geschwindigkeit v nicht den Pol erreicht. Für die Werthe vorher ist *tang* ein echter Bruch, daher *Log* negativ und das erste Glied demnach, wie es sein soll, positiv. Setzt man $t = \frac{r\pi}{2v}$, so wird $\varphi = \infty$; die Curve umkreist also den Pol mit unendlich vielen Windungen. Es ist, wenn β die geographische Breite eines Ortes bezeichnet, $z = r\sin\beta$, folglich ist auch $\beta = \frac{vt}{r}$, und daher

$$\varphi = \frac{2r\pi}{v.24.60.60}\left[-Log\,tang\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)-\frac{\beta}{v}\right].$$

Setzt man z negativ, so erhält man die Curve auf der andern Hemisphäre; beide Curven stehen in denselben gegenseitigen Beziehungen, wie I) und III) in Nr. 5.

Um auch ein Zahlenbeispiel zu verfolgen, sei $v = 10^m$ = der Geschwindigkeit eines mittleren Windes, und es soll nun bestimmt werden, in welcher Weise sich dieser Wind verhalten würde, wenn er vom Aequator ohne weitere Hindernisse bis in unsere Breiten, also beiläufig bis zu 50 Graden käme. Aus

$$t = \frac{r\beta}{v} = \frac{r.5\pi}{18v} = \frac{1000000^m}{18}\text{ Sec.} = 6{,}43 \text{ Tage}$$

folgt, dass dieser nicht ganz $6\frac{1}{2}$ Tage brauchen würde, um zu uns zu gelangen. Die Formel für φ ergiebt

$$\varphi = \frac{40000000}{24.60.60}\left(-Log\,tang\,20^0 - \frac{5\pi}{18}\right)$$

in Bogenmass und dies mit $\frac{180}{\pi}$ multiplicirt, $\varphi = c.366{,}1^0$; der Wind, welcher zu uns gelangt, hätte daher im Golf von Guinea zu entstehen. Er umkreist die Erde in südwestlicher Richtung und überschreitet den vollständigen Umlauf um 6^0. Sucht man den Winkel desselben mit dem Parallelkreise bei 50^0, so hat man nach oben

$$cotang\,\alpha = \frac{dp}{dm} = \frac{p - fw}{v} = \frac{2r\pi - 2r.\cos\beta.\pi}{\tau.v} = \frac{2r\pi(1-\cos\beta)}{v.\tau}$$

$$= \frac{4r\pi\sin^2\frac{\beta}{2}}{v.\tau} = \frac{80000000\,.\,\sin^2 25^0}{10.24.60.60},$$

daraus $\alpha = 3^0 27' 37''$; der Wind ist also fast ein vollständiger Westwind. Soll endlich noch die Geschwindigkeit desselben ermittelt werden, so erhält man für dieselbe

$$\sqrt{(p-fw)^2+v^2} = \sqrt{\frac{4r^2\pi^2}{\tau^2}(1-cos^2\beta)^2+v^2} = \sqrt{\frac{4r^2\pi^2}{\tau^2}\,.\,sin^4\frac{\beta}{2}+v^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{40000000\,.\,2}{24\,.\,60\,.\,64}\,.\,sin^2\frac{\beta}{2}\right)^2+10^2} = c\ 165{,}4^m,$$

allerdings einen Werth, der durch die verschiedenen Widerstände nicht aufkommen kann. Im Uebrigen ist ersichtlich, dass im Allgemeinen die Geschwindigkeit um so grösser wird, je grösser das β, d. h. je grösser die geographische Breite ist, und dass viel von seiner theoretischen Grösse verloren gehen und er trotzdem noch eine bedeutende Stärke behalten kann. In ganz entsprechender Weise liesse sich mittels des φ die durch die Drehung der Erde bedingte Ablenkung von Kugeln ermitteln, welche an einer bestimmten Stelle der Erdoberfläche mit einer gegebenen Geschwindigkeit in der Richtung des Meridians abgeschossen werden, desgleichen die übrigen Elemente dieser Bewegung, soweit man den Vorgang auf die Erdoberfläche bezieht und von den Widerständen absieht. Bei einer in der Folge sich darbietenden Gelegenheit wollen wir einen derartigen Fall ins Auge fassen.

(Fortsetzung folgt.)

XXI.

Die Fundamentaleigenschaften der Linsensysteme in geometrischer Darstellung.

Von

A Beck,

Docent am eidgen. Polytechnikum in Zürich.

(Hierzu Tafel VII, Fig. 1—8.)

Den bekannten Fundamentalsätzen über den Zusammenhang zwischen Object und Bild bei einem centrirten Linsensystem liegen die beiden Voraussetzungen zu Grunde: 1. Alle Lichtstrahlen bilden mit der Axe verschwindend kleine Winkel. 2. Von den brechenden Kugelflächen werden nur Segmente von verschwindend kleinem Centriwinkel benützt.

Nach der von Gauss gegebenen Ableitung dieser Sätze (Gauss' Werke, Bd. 5) sind dieselben mehrfach analytisch behandelt worden: von Helmholtz (physiologische Optik 1865), Maxwell (*Quarterly journal of pure and applied mathematics, vol. II*, 1858), Hansen (Abhandlungen der math.-physikalischen Classe der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 10, 1871) u. s. w. In anderen Ableitungen sind mit gutem Erfolg geometrische Betrachtungen angewandt worden: C. Neumann (Haupt- und Brennpunkte eines Linsensystems, Leipzig 1866), Martin, Reusch, Töpler u. s. w. Möbius (Berichte über die Verhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig, Bd. 7, 1855) hatte schon darauf aufmerksam gemacht, dass zwischen Object und Bild die Beziehungen der Collineation bestehen. Es wird sich also zu einer anschaulichen Darstellung am besten die Betrachtungsweise der neueren Geometrie eignen. In diesem Sinne ist die Theorie von Lippich (Fundamentalpunkte eines Systems centrirter brechender Kugelflächen, Graz 1871) bearbeitet worden.

In der Abhandlung von Casorati: *Alcuni strumenti topografici a riflessione e le proprietà cardinali dei cannocchiali anche non centrali, Milano* 1872) ist die analytische Ableitung durch Anwendung der Deter-

minanten sehr vereinfacht und es wird gezeigt, dass die Fundamentaleigenschaften auch dann noch fortbestehen, wenn das System nicht genau centrirt ist. Im Folgenden soll die Theorie der Linsensysteme mit Einschluss der Verallgemeinerung von Casorati rein geometrisch abgeleitet werden.

I. Durchgang des Lichtes durch eine einzige brechende Fläche.

1. Es sei eine brechende Kugelfläche F mit dem Centrum C gegeben und ein Durchmesser x als Axe bezeichnet, gegen welche alle Lichtstrahlen unter verschwindend kleinen Winkeln geneigt sind. Sei ferner ein auffallender Lichtstrahl l gegeben, der aber die Axe nicht schneide, sondern zu derselben windschief sei. Der gebrochene Strahl l' muss dann zunächst durch den Punkt gehen, in welchem l die Kugelfläche trifft. Da aber nach der Voraussetzung nur ein unendlich kleines Kugelsegment zur Anwendung kommen soll, so kann jenem Punkt der Schnittpunkt S des Strahles l mit der Ebene Σ substituirt werden, welche die Kugel im Schnittpunkt mit der Axe x berührt. Somit haben wir zunächst, wenn wir die Gesammtheit aller einfallenden Strahlen als „erstes System", die Gesammtheit aller gebrochenen Strahlen als „zweites System" bezeichnen: Jedem Strahl l des ersten Systems entspricht ein Strahl l' des zweiten Systems, und zwar so, dass je zwei einander entsprechende Strahlen l und l' sich auf der festen Ebene Σ schneiden.

2. Die Ebene $C.l$, welche durch den einfallenden Strahl und das Centrum der Kugel geht, ist die Einfallsebene und nach dem Brechungsgesetz muss in derselben auch der gebrochene Strahl l' liegen. Je zwei entsprechende Strahlen l und l' liegen also auf einer Ebene, die durch einen festen Punkt C geht.

Nehmen wir ferner im ersten System einen Punkt P an oder denken wir uns alle Strahlen eines Bündels, so ist leicht zu zeigen, dass ihre entsprechenden Strahlen unter der Voraussetzung verschwindend kleiner Einfallswinkel wieder ein Bündel bilden. Wir legen durch C die Ebene Γ senkrecht zur Axe. Wenn A der Schnittpunkt von l mit Γ ist, so muss auf der Geraden AC der Schnittpunkt A' von l' mit Γ liegen (2). Ziehen wir noch den Radius CS oder r, so ist dieser das Einfallsloth und folglich $\sphericalangle\, rl$ der Einfallswinkel, $\sphericalangle\, rl'$ der Brechungswinkel. (Fig. 1.) Nach dem Brechungsgesetz muss der Quotient ihrer beiden Sinusse constant sein, und zwar gleich dem Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten v und v' des Lichtes im ersten und zweiten Medium. Weil aber nur verschwindend kleine Einfallswinkel zugelassen werden, so kann man statt des Verhältnisses der beiden Sinusse das Verhältniss der beiden Tangenten nehmen und weil ferner nur ein verschwindend kleines Kugelsegment benützt, also $\sphericalangle\, rx$ unendlich klein vorausgesetzt wird, so kann man

$\sphericalangle SCA$ als rechten Winkel betrachten, so dass die Abschnitte CA und CA' in dem Verhältniss der beiden Tangenten zu einander stehen.

3. Durch die Strahlen l des Bündels P und ihre entsprechenden Strahlen l' entstehen also auf Γ zwei ebene Systeme, die offenbar zu einander ähnlich und ähnlich gelegen sind, weil alle Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten A, A' durch einen festen Punkt C gehen und die Entfernungen CA und CA' in einem constanten Verhältniss zu einander stehen.

4. Da nun das System der Punkte A für das Bündel P perspectivisch ist zum System der Punkte S auf Σ und ähnlich zum System der Punkte A' auf Γ, so sind diese beiden letzteren Systeme zu einander collinear und zwar in perspectivischer Lage, weil offenbar jeder Punkt der unendlich fernen Schnittlinie beider Ebenen sich selbst entspricht.* Es gehen also alle SA' oder l' durch einen und denselben Punkt P', d. h. jedem Punkt P im ersten System entspricht ein Punkt P' im zweiten. Ferner: Die Verbindungslinien PP' von je zwei entsprechenden Punkten gehen alle durch einen festen Punkt C, denn der Strahl PC des einfallenden Bündels wird nicht gebrochen, fällt also mit seinem entsprechenden zusammen, weil er zur brechenden Fläche normal ist. Damit haben wir den Satz: **Beim Durchgang des Lichtes durch eine einzige brechende Fläche ist das räumliche System im ersten Medium (Object) centrisch collinear zum System im zweiten Medium (Bild), und zwar in Bezug auf die Scheitelebene Σ (brechende Fläche) als Collineationsebene und den Kugelmittelpunct C als Collineationscentrum.**

5. Den Punkten und Strahlen einer Ebene A des ersten Systems entsprechen dann ferner die Punkte und Strahlen einer Ebene A′ des zweiten Systems und zwar sind diese ebenen Systeme zu einander centrisch collinear in Bezug auf C als Collineationscentrum und die gemeinsame Schnittlinie der beiden Ebenen mit Σ als Collineationsaxe. Ist die eine Ebene parallel zu Σ, so muss es die andere auch sein. In Σ, sowie in Γ fallen je zwei entsprechende Ebenen zusammen. Während aber in Σ jeder Punkt mit seinem entsprechenden zusammenfällt, sind die beiden in Γ liegenden einander entsprechenden ebenen Systeme ähnlich und ähnlich gelegen in Bezug auf C als Aehnlichkeitscentrum und mit $v : v'$ als Aehnlichkeitsverhältniss.

Die **Gegenebenen** F und G′ der beiden Systeme heissen hier **Brennebenen**. Sie gehen durch die Gegenpunkte (Brennpunkte) F und G' der beiden auf x liegenden projectivischen Reihen und sind parallel zu Σ.

---

* Reye, Geometrie der Lage, 2. Abth. 3. Vortrag.



6. In Bezug auf diese beiden Reihen auf x ist Folgendes zu bemerken: durch Σ, C und $v:v'$ ist die ganze Brechung bestimmt. Wir nehmen auf einem Perpendikel zur Axe in C zwei Punkte A und A' so an, dass $CA:CA' = v:v'$. (Fig. 2.) Diese Punkte sind dann zwei entsprechende Punkte der beiden Systeme (3., 5.). Um nun zu einem Punkt P von x den entsprechenden P' zu finden, ziehen wir im ersten System den Strahl PA. Sein entsprechender Strahl muss sich mit ihm in S auf Σ schneiden und durch A' gehen. Da nun ein negatives Brechungsverhältniss keinen Sinn hat,* also A und A' immer nach derselben Seite von x liegen, so sieht man ohne Weiteres ein, dass die beiden von P und P' beschriebenen projectivischen Reihen immer *gleichlaufend* sind. C und der Schnittpunkt mit Σ sind ihre beiden Doppelpunkte. Die Brennpunkte F und G' ergeben sich, indem man das eine Mal P', das andere Mal P im Unendlichen auf x annimmt und die vorige Construction anwendet (Fig. 3). Man sieht, dass die Brennpunkte immer ausserhalb der Strecke der beiden Doppelpunkte liegen müssen, und zwar symmetrisch zu den letzteren. Ebenso leicht ergiebt die Figur, dass das Verhältniss, in welchem F oder G' die Strecke zwischen den beiden Doppelpunkten theilen, gleich dem Verhältniss $CA:CA'$, d. h. gleich dem Brechungsverhältniss ist. Wenn wir die Abstände der Brennpunkte F, G' von der brechenden Fläche der Brennweiten f, g' nennen, so lässt sich das Vorige auch so aussprechen: das Brechungsverhältniss $v:v'$ ist gleich dem Verhältniss der Brennweiten $g':f$.

7. Die vorigen Betrachtungen gelten ganz gleich, ob die brechende Fläche convex oder concav (C rechts oder links von Σ) sei und ob der Uebergang vom dünnern zum dichtern oder vom dichtern zum dünnern Medium stattfinde. Aus der angegebenen Construction lassen sich die bekannten Regeln über die gegenseitige Lage von Object und Bild in den verschiedenen Fällen der Brechung ohne Weiteres ablesen. Da die einander entsprechenden ebenen Systeme in zwei zur Axe senkrechten einander entsprechenden Ebenen A, A' zu einander perspectivisch liegen in Bezug auf das Centrum C, so ist das Bild eines in A liegenden Objectes aufrecht oder verkehrt, je nachdem A und A' auf derselben Seite von C liegen oder nicht. Wenn A ausserhalb des Raumes $\Sigma\Gamma$ liegt, so muss A' ebenfalls ausserhalb liegen, und zwar auf derselben Seite oder auf der entgegengesetzten, je nachdem A auf der einen oder andern Seite der Brennebene F liegt. Denn in Σ oder Γ fallen zwei entsprechende Ebenen zusammen, die unmittelbar vorher nicht zu verschiedenen Seiten von Σ oder Γ liegen konnten, weil die Reihen auf x gleichlaufend sind. Da Σ und Γ die Doppelebenen sind und die Brennebenen

---

* Die Reflexion kann zwar als eine Brechung mit dem Brechungsverhältniss -1 angesehen werden; wir betrachten aber nur wirkliche Brechungen; übrigens lassen sich die zu entwickelnden Resultate ohne wesentliche Aenderungen auf die Reflexion übertragen.



immer ausserhalb des Raumes $\Sigma\Gamma$ liegen (6), so muss, wenn A innerhalb $\Sigma\Gamma$ liegt, auch A′ innerhalb liegen, das Bild also aufrecht sein. Verkehrte Bilder reeller Gegenstände können also nur dann vorkommen, wenn F im ersten Medium liegt, d. h. entweder wenn die brechende Fläche convex und das zweite Medium das dichtere ist, oder wenn die brechende Fläche concav und das zweite Medium das dünnere ist (6, Fig. 3).

8. Object und Bild auf zwei Ebenen A, A′, normal zu x, können, weil sie in Bezug auf C perspectivisch sind, nie gleich gross und gleich gerichtet sein, ausser wenn sie in Σ Punkt für Punkt zusammenfallen. Für welche Ebene A ist das Object gleich gross wie das Bild auf A′, aber entgegengesetzt gerichtet? d. h. für welches Ebenenpaar AA′ sind die in ihnen liegenden Systeme centrisch symmetrisch? Diese beiden Ebenen müssen in gleichem Abstand von C, aber nach verschiedenen Seiten liegen. Ziehen wir einen Strahl l parallel zu x, so liegen die Punkte, welche zu den Punkten von l symmetrisch liegen in Bezug auf C, auf der Geraden l^*, die parallel zu x ist und von ihr denselben Abstand hat wie l, aber nach der entgegengesetzten Seite (Fig. 4). Die Gerade l' geht durch die Punkte $\overline{l\Sigma}$ und G' und schneidet l^* in einem Punkt der gesuchten Ebene A′. Die entsprechende Ebene A liegt zu A′ symmetrisch in Bezug auf C. Man sieht, dass es nur ein Ebenenpaar von der angegebenen Eigenschaft giebt und dass die Ebene A (A′) den doppelten Abstand von Σ hat als F (G').

9. Beim Durchgange des Lichtes durch eine einzige brechende Fläche schneidet jeder gebrochene Strahl l' den entsprechenden einfallenden auf Σ. Ein Bildsystem, welches zum Objectsystem nicht diese Beziehung hat, kann also nicht durch eine einzige Brechung erhalten werden. Um die Beziehung zweier solcher centrisch collinearer Systeme, wie sie durch eine einzige Brechung entstehen, zu bestimmen, genügt ausser der Angabe der Axe die Angabe eines Paares von entsprechenden Strahlen l, l', die sich in einem Punkte S schneiden, dagegen zu x windschief sind. Es ist dann nämlich die Ebene durch S und normal zu x die Ebene Σ (brechende Fläche), während die Ebene $\overline{ll'}$ aus x das Centrum C herausschneidet. Die Strahlen, die man durch C parallel zu l und l' ziehen kann, treffen l' und l in je einem Punkt der Brennebenen G′ und F (Fig. 5). (In den Figuren sind die wirklichen Schnittpunkte zweier Geraden durch kleine Kreise von den blos scheinbaren Schnittpunkten unterschieden.) Das Brechungsverhältniss $v : v'$ wird ausser durch die Lage der Brennebenen noch veranschaulicht durch die Abschnitte Cv, Cv', welche die Strahlen l und l' auf der Schnittlinie der Ebenen $\overline{ll'}$ und Γ hervorbringen. Dabei ist noch zu bemerken: wenn die Figuren orthogonale Projectionen sind, wobei die Axe in der Bildebene liegen soll, so wird jenes Verhältniss auch noch durch die Projectionen der beiden Abschnitte dargestellt; es wäre also nur zur

Ermittelung des Schnittpunktes C der Ebene $\overline{ll'}$ mit x die Anwendung einer zweiten Projectionsebene erforderlich.

10. Wenn eine nach Lage und Krümmung gegebene brechende Fläche vorliegt, so bilden die Strahlen l', die einem und demselben Strahl l bei verschiedenen Brechungsverhältnissen entsprechen, ein Strahlbüschel mit dem Scheitel S und der Ebene $\overline{lC}$. Sollen dagegen das Brechungsverhältniss und die Ebene Σ gegeben sein, während die Krümmung sich ändert, so findet Folgendes statt: das Perpendikel Cv beschreibt ein hyperbolisches Paraboloid, dessen eine Richtungsebene die Normalebene zu x ist; auf diesem Paraboloid beschreibt v', da $Cv : Cv'$ constant sein soll, eine Erzeugende λ der andern Schaar, zu welcher auch l und x gehören, und der Strahl l', der einem und demselben l entspricht, beschreibt also ein Strahlbüschel mit dem Scheitel S und der Ebene $\overline{S\lambda}$. Analoges gilt für alle Strahlen l, welche einem und demselben l' entsprechen.

Man hätte die Beziehung zwischen den beiden Systemen auch dadurch bestimmen können, dass man ausser Σ ein Paar entsprechende Punkte P und P' gegeben hätte, die mit x in einer Ebene liegen. Dadurch, dass man diese beiden Punkte mit einem Punkt S auf Σ verbindet, ist dann Alles wieder auf das Vorige zurückgeführt.

II. Durchgang des Lichtes durch beliebig viele brechende Flächen.

1. Die brechenden Flächen seien Σ_1, Σ_2, $\Sigma_3 \ldots \Sigma'$, die zugehörigen Mittelpunkte C_1, C_2, $C_3 \ldots C'$ und die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in den auf einander folgenden Medien v, v_1, $v_2 \ldots v'$. Wenn nun die Mittelpunkte C_1, $C_2 \ldots C'$ zwar nicht genau auf einer Geraden liegen, aber von einer gewissen Geraden y nur verschwindend kleine Abstände haben, so werden die in I, 1 und 2 gemachten Voraussetzungen, welche das Auftreten der Collineation zur Folge hatten, gleichzeitig für alle auf einander folgenden Brechungen erfüllt sein, wenn sie es für die erste Brechung sind. Infolge dessen haben wir eine Reihe von räumlichen Systemen M, M_1, $M_2 \ldots M'$, von denen jedes zum folgenden in der Beziehung der Centralcollineation steht. Zwei nicht auf einander folgende Systeme, wie namentlich das erste System M und das letzte M', sind also auch zu einander collinear, aber im Allgemeinen nicht in centrischer Lage. Wenn wir nun als Collineationsebenen Σ_1, Σ_2, $\Sigma_3 \ldots \Sigma'$ für je zwei auf einander folgende Systeme diejenigen Tangentialebenen der brechenden Kugelflächen nehmen, welche alle zu jener Geraden y normal sind, was offenbar den Voraussetzungen nicht widerspricht, so ist die Collineation zwischen zwei nicht auf einander folgenden Systemen, wie M und M', von folgender Art: die beiden Systeme M und M' haben die Punktreihe auf der unendlich fernen Geraden u der Normalebenen zu y entsprechend gemein; denn in dieser unendlich fernen Geraden schneiden sich alle Collineationsebenen $\Sigma_1 \ldots \Sigma'$. Wenn



aber zwei collineare Systeme eine Punktreihe u entsprechend gemein haben, so müssen sie auch ein Ebenenbüschel x entsprechend gemein haben. Denn zwei Ebenen A, B von M, die durch u gehen, entsprechen zwei Ebenen A′, B′ von M', die auch durch u gehen, und weil jeder Punkt von u sich selbst entspricht, so ist die Collineation der ebenen Systeme auf A und A′, sowie auf B und B′ eine centrische. Die Gerade x, welche das zu AA′ gehörige Collineationscentrum mit dem zu BB′ gehörigen verbindet, ist dann offenbar sich selbst entsprechend in M und M', weil sie einen Punkt von A und einen von B enthält, sowie ihre entsprechenden Punkte auf A′ und B′. Es entspricht aber jede Ebene durch x sich selbst, weil ihr Schnittpunkt mit u sich selbst entspricht.

Es giebt also, auch wenn das System nicht genau centrirt ist, immer einen und nur einen Strahl x des ersten Systems M, welcher mit seinem entsprechenden des letzten Systems M' zusammenfällt (Cardinallinie.)

2. Wenn die Cardinallinie x gegeben ist, so genügt zur Bestimmung der collinearen Beziehung zwischen M und M' die Angabe eines Paares von entsprechenden Strahlen l, l' der beiden Systeme, wenn diese Strahlen zu x windschief sind. Da die unendlich ferne Gerade u sich selbst entspricht, so entspricht einer Normalebene A zu y wieder eine solche Normalebene A′ und die beiden Ebenen sind centrisch collinear (ähnlich) zu einander in Bezug auf einen Punkt A von x als Collineationscentrum. Folglich erhält man zu einer Normalebene A die entsprechende A′ und das zugehörige Centrum A, indem man vom Schnittpunkt $\overline{\mathrm{A}l}$ aus die Transversale zu l' und x zieht. Ihre Schnittpunkte mit l' und x bestimmen A′ und A. Zu irgend einem Punkt P, der nicht auf l oder x liegt, wird der entsprechende P' gefunden, indem man durch P die Normalebene zu y legt, dazu die entsprechende Ebene und das zugehörige Centrum sucht und von letzterem den Strahl nach P zieht. Aus der angegebenen Construction von A zu A oder A′ mit Hilfe der Transversalen zu l, l', x folgt, dass die Reihe der Punkte $A\ldots$ auf x projectivisch ist zu dem Büschel der zu y normalen Ebenen A... oder A′.... Daraus folgt weiter, dass es immer ein und nur ein Ebenenpaar H, H′ giebt, für welches das zugehörige Centrum im Unendlichen liegt, so dass die Systeme auf H und H′ congruent sind (Hauptebenen). H und H' seien die Schnittpunkte von H und H′ mit x (Hauptpunkte). Man erhält diese Ebenen, indem man durch l und l' diejenige Transversale zieht, welche zu x parallel ist.

3. Wenn man jetzt das System M' so weit parallel zu x verschiebt, bis H' mit H zusammenfällt, so ist das System M zu der Verschiebung M^* des Systems M' centrisch collinear, weil die beiden Systeme die Ebene H Punkt für Punkt entsprechend gemein haben (Collineationsebene). Es existirt dann also ein Collineationscentrum K für die beiden Systeme M, M^*, das selbstverständlich auf x liegt, weil x sich selbst entspricht.*

* Reye, *l. c.* S. 24.

Jeder Strahl durch K entspricht sich selbst in den beiden Systemen M und M^*. Verschiebt man nun das System M^* wieder zurück in die Lage M', so kommt der mit K zusammenfallende Punkt von M^* in eine Lage K', so dass der Abstand der beiden einander entsprechenden Punkte K, K' gleich gross ist wie der Abstand HH' der beiden Hauptpunkte oder dass die Strecken HK' und $H'K$ denselben Mittelpunkt O haben. Geht ein Strahl im System M durch K, so ist sein entsprechender zu ihm parallel und geht durch K' (Knotenpunkte).

4. Jedes der beiden Systeme M, M' hat eine Gegenebene, F, G′, normal zu y, entsprechend der unendlich fernen Ebene des andern Systems, und da für die perspectivischen Systeme M, M^* die Gegenebenen symmetrisch liegen müssen zu K und H (I, 6), so müssen die Gegenebenen F, G′ von M, M' symmetrisch liegen zu H, K' (Brennebenen). Sind F, G' die Schnittpunkte von F, G′ mit x (Brennpunkte), so hat die Strecke FG' denselben Mittelpunkt O wie die Strecken HK' und $H'K$. Unter Hauptbrennweiten versteht man die beiden Strecken $HF = f$, $H'G' = g'$.

5. Endlich kann man nach denjenigen Normalebenen zu y fragen, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Für ein solches Ebenenpaar liegt das zugehörige Centrum im Schnittpunkt der beiden zusammenfallenden Ebenen mit x. Diese Ebenen sind die Doppelebenen S, T der beiden projectivischen Büschel der Normalebene zu y und sind offenbar durch diejenigen beiden Transversalen zu l, l', x bestimmt, welche zu y senkrecht sind (symptotische Ebenen)*. Ihre Schnittpunkte mit x seien S, T. Diese sind die Doppelpunkte der beiden projectivischen Reihen auf x und liegen folglich zu den Gegenpunkten F und G' symmetrisch, so dass also die vier Strecken HK', $H'K$, FG' und ST denselben Mittelpunkt O haben.

6. Es ist aber zu bemerken, dass, während die Hauptpunkte, Knotenpunkte und Brennpunkte immer reell sind, die symptotischen Punkte imaginär werden können, da ihre Construction (Doppelpunkte zweier projectivischen Reihen auf x) eine Aufgabe zweiten Grades ist. Diese beiden Reihen auf x sind offenbar gleichlaufend, weil die Ebenenbüschel A ... A′ ... es sind, zu denen sie perspectivisch liegen (das Ebenenbüschel A ... ist gleichlaufend mit A_1 ..., dieses mit A_2 ... u. s. w.). Infolge dessen müssen S und T, wenn sie reell sind, zwischen F und G' liegen (I, 6). Die symptotischen Punkte haben mit den Brennpunkten das gemein, dass sie schon bestimmt sind durch die projectivische Beziehung der beiden Reihen A ... A' ... auf x, was bei den Haupt und Knotenpunkten nicht der Fall ist.

Da die Knotenpunkte, wenn man die Systeme M, M' bis zur perspectivischen Lage verschiebt, zusammenfallen und das Collineations-

* Listing, Pogg. Ann. Bd. 29.



centrum bilden, so können sie in der ursprünglichen Lage von M, M' dadurch erhalten werden (I, 9), dass man durch l die Ebene legt parallel zu l' und durch l' die Ebene parallel zu l; die erstere Ebene schneidet x im Punkte K, die letztere im Punkte K'. Vermöge der Eigenschaft (II, 3.) der Knotenpunkte kann man dieselben (K, K') auffassen als die Aehnlichkeitscentren der Brennebenen (F', G).

7. Wir wollen für das Weitere annehmen, dass die Systeme genau centrirt seien, so dass die beiden Geraden x und y zusammenfallen (Axe). Dann lassen sich die Fundamental Punkte und -Ebenen in einer einzigen Figur anschaulich darstellen: Seien gegeben x, l, l'. Diese drei Geraden bestimmen eine Regelschaar ihrer Transversalen Die Hauptebenen sind bestimmt durch diejenige Erzeugende der Schaar, welche parallel ist zur Leitgeraden x. Die Brennebenen sind bestimmt durch diejenigen Erzeugenden der Schaar, welche parallel sind zu den beiden anderen Leitgeraden l, l'. Die Knotenpunkte sind die Schnittpunkte dieser beiden Erzeugenden mit der Leitgeraden x. Die symptotischen Ebenen oder Punkte sind bestimmt durch diejenigen beiden Erzeugenden der Schaar, welche senkrecht sind zur Leitgeraden x.

8. Um für ein centrirtes System den Satz zu beweisen: „Die Hauptbrennweiten f, g' verhalten sich zu einander wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im letzten und ersten System", betrachten wir zuerst nur die drei Systeme M, M_1, M_2. Die collineare Beziehung der Systeme M und M_2 ist bestimmt durch Angabe eines Strahles l in M (windschief zu x) und seines entsprechenden l_2 in M_2 (II, 2). Der entsprechende Strahl l_1 in M_1 ist dann eine Transversale zu l und l_2. Durch die Punkte $\overline{ll_1}$ und $\overline{l_1 l_2}$ gehen die Ebenen Σ_1, Σ_2, während die Ebenen $\overline{ll_1}$ und $\overline{l_1 l_2}$ die Axe in den Punkten C_1 und C_2 treffen. Durch C_1 geht ein Perpendikel zu x, welches l und l_1 in zwei Punkten v, v_1 schneidet und die Strecken $C_1 v$ und $C_1 v_1$, sowie auch ihre Projectionen (I, 9), stehen zu einander in demselben Verhältniss wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten v, v_1 im ersten und zweiten Medium (Fig. 7). Die Strecken $C_2 v_1$ und $C_2 v_2'$, welche l_1 und l_2 auf dem in C_2 errichteten Perpendikel zu x abschneiden, repräsentiren ebenso das Verhältniss $v_1 : v_2$. Aendert sich nun l_1, während l und l_2 fest bleiben, so ändert sich auch das Verhältniss $v : v_1 : v_2$. In der ursprünglichen Lage von l_1 ziehen wir durch den Punkt v_1 die Gerade λ, welche mit l und x zu derselben Schaar von Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids gehört, das durch l und x als Leitlinien und durch die Normalebene zu x als Richtungsebene bestimmt ist (I, 10). Wenn dann l_1 sich so ändert, dass es auch fortwährend diese Gerade λ schneidet, so bleibt das Verhältniss $v : v_1$ constant. Ebenso giebt es eine Gerade λ_2 durch v'_1, welche von allen denjenigen l_1 geschnitten wird, für welche $v_1 : v_2$ denselben Werth haben soll, wie bei der ursprünglichen Lage von l_1. Nun lässt sich aber leicht beweisen, dass jedes l_1, welches λ

schneidet, auch λ_2 trifft. In der That haben die vier Geraden l, λ, λ_2, l_2 hyperbolische Lage, d. h. sie lassen unendlich viele Transversalen zu, weil man drei solcher Transversalen angeben kann, nämlich die ursprüngliche Gerade l_1 und dann noch die beiden Transversalen zu x, l, l_2, welche senkrecht sind zu x (II, 5). Jedes l_1 bestimmt also eine ganze Regelschaar von Transversalen l_1 zu l und l_2, für welche das Verhältniss $v : v_1 : v_2$ dasselbe ist. Diese Regelschaar, die zu einem bestimmten l_1 gehört, wird gefunden, indem man mit Hilfe des Punktes C_1 (C_2) die Gerade λ (λ_2) construirt, welche die dritte Leitlinie der Regelschaar ist.

9. Um nun die verschiedenen Verhältnisse $v : v_1 : v_2$ in Betracht zu ziehen, welche allen Transversalen l_1 von l und l_2 entsprechen, genügt es nach dem Vorigen, alle diejenigen l_1 zu betrachten, welche durch einen beliebigen festen Punkt S von l gehen. Denn irgend ein anderes l_1 würde eine ganze Regelschaar bestimmen, deren Erzeugende, als l_1 genommen, dasselbe Verhältniss $v : v_1 : v_2$ liefern, und unter diesen Erzeugenden giebt es eine, die durch den Punkt S geht.

Die zu betrachtenden l_1 bilden also jetzt ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel S und der Ebene $\overline{Sl_2}$, so dass für alle diese l_1 die Ebene $\overline{l_1 l_2}$ und damit de Punkt C_2 fest ist, während die Ebene $\overline{ll_1}$ ein Ebenenbüschel mit der Axe l bildet und der Punkt C_1 eine dazu perspectivische Reihe auf x beschreibt. Wir suchen nun das Verhältniss $v : v_2$ darzustellen: die Verhältnisse $v : v_1$ und $v_1 : v_2$ sind auf den Perpendikeln in C_1 und C_2 dargestellt (II, 8). Das zweite dieser Perpendikel ist fest sammt dem Punkt v'_2 auf demselben. Wenn wir in der Projection (Fig. 8) von dem scheinbaren Schnittpunkt R von x und l_1 aus das Perpendikel in C_1 auf das Perpendikel in C_2 projiciren, so projicirt sich C_1 in C_2, v_1 in v'_1 und v in einem Punkt v', so dass also das Verhältniss der Abschnitte $C_2 v'$ und $C_2 v'_2$ dem Verhältniss $v : v_2$ gleich ist. Nun lässt sich aber leicht beweisen, dass dieser Punkt v' fest bleibt, wenn l_1 jenes Strahlenbüschel beschreibt. Es ist nämlich die Reihe, welche v auf l beschreibt, projectivisch zur Reihe der Punkte R auf x, weil die letztere projectivisch ist zur Reihe der Punkte C_1 auf x. Die beiden Reihen $R\ldots$ und $v\ldots$ sind aber in perspectivischer Lage; denn wenn C_1 und damit auch v in den scheinbaren Schnittpunkt von l und x fällt, also die Ebene ll_1 normal zur Zeichnungsebene ist, so fällt auch R mit diesem scheinbaren Schnittpunkt zusammen. Die Geraden Rv bilden also ein Strahlenbüschel. Der Scheitel dieses Büschels muss aber auf dem Perpendikel in C_2 liegen, denn dieses Perpendikel ist selbst ein solcher Strahl Rv; die Gerade SC_2 muss nämlich l_2 wirklich schneiden; nimmt man aber diese Linie SC_2 als l_1, so fällt R nach C_2 und v auf das Perpendikel in C_2. Damit ist bewiesen, dass der Punkt v' auf dem Perpendikel in C_2 fest ist, und da v'_2 auch fest ist, so haben wir den Satz:



Einer bestimmten collinearen Beziehung zwischen dem ersten und dritten System entspricht auch ein bestimmtes Verhältniss $v : v_2$ der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im ersten und dritten Medium, auf welche Weise auch der Uebergang vom ersten zum dritten System mit Hilfe eines zu beiden perspectivischen zweiten Systems gemacht werde.

10. Wir denken uns das System M parallel zu x verschoben, bis es zu M_2 perspectivisch wird (II, 3), und bezeichnen es in dieser verschobenen Lage mit M^*. Dieses System M^* kann nun nach (II, 9) als vermittelndes System genommen werden anstatt M_1; denn es ist sowohl zu M_2 als auch zu M perspectivisch, Letzteres allerdings in der ganz speciellen Weise, dass das Collineationscentrum auf der unendlich fernen Collineationsebene liegt, so dass also für den Uebergang von M zu M^* das Verhältniss $v : v_1$ den Werth $= 1$ hat. Infolge dessen ist das Verhältniss $v_1 : v_2$ für den Uebergang von M^* zu M_2 zugleich das Verhältniss $v : v_2$. Um also dieses Verhältniss $v : v_2$ zu bestimmen, braucht man nur die Systeme M und M_2 bis zur perspectivischen Lage zusammenzuschieben und das Brechungsverhältniss dieser beiden centrisch collinearen Systeme nach (I, 9) zu bestimmen.

11. Es seien jetzt wieder die $n + 1$ centrirten Systeme M, M_1, $M_2 \dots M_{n-1}$, M' gegeben. Alles wird bestimmt sein, wenn ausser der Axe x ein Zug von geraden Linien $l, l_1, l_2 \dots l_{n-1}, l'$ gegeben ist, die diesen Systemen angehören und einander entsprechen, von denen also jede die folgende schneidet, während sie zu x windschief sind. Der Schnittpunkt zweier auf einander folgenden l bestimmt die zwischenliegende brechende Fläche, die Ebene der beiden l bestimmt das zugehörige Kugelcentrum. Zu den auf einander folgenden Brechungen gehören ferner die Brechungsverhältnisse $v : v_1$, $v_1 : v_2, \dots v_{n-1} : v'$ und durch die collineare Beziehung der Systeme, wie sie durch den Linienzug $l, l_1 \dots l'$ bestimmt ist, wird für jedes Medium, z. B. M', eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit, v', bestimmt, sobald die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v im ersten Medium gegeben ist. v_1 wird direct bestimmt durch die centrische Collineation zwischen M und M_1. Um v_2 zu bestimmen, verschieben wir M bis zur perspectivischen Lage mit M_2 und bestimmen das Brechungsverhältniss $v : v_2$, unabhängig von v_1. In derselben Weise bestimmt sich aber weiter v_3 unabhängig von v_2, indem wir M noch weiter verschieben bis zur perspectivischen Lage mit M_3 u. s. w. Damit ist bewiesen: „Wenn die collineare Beziehung zwischen dem ersten und letzten System gegeben ist (durch l, l'), so ist damit auch das Verhältniss $v : v'$ der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im ersten und letzten Medium bestimmt, ganz unabhängig von der Anzahl und Beschaffenheit der vermittelnden Systeme; dieses Verhältniss ist dasjenige, welches der perspectivischen (verschobenen) Lage der beiden Systeme M, M' entspricht, also auch gleich dem Verhältniss der beiden Hauptbrennweiten $g' : f$." (I, 6, II, 4.)

12. Wenn also v und v' gegeben sind, d. h. wenn die äusseren Medien von bestimmter physikalischer Beschaffenheit sein sollen, so kann die

geometrische (collineare) Beziehung zwischen Object und Bild nicht mehr jede beliebige sein; die Strahlen l, l', durch welche diese Beziehung vollkommen bestimmt ist (II, 2.), müssen so liegen, dass beim Zusammenschieben eine centrische Collineation entsteht mit dem Verhältniss $v:v'$. Wir construiren zu l die Gerade λ nach (I, 10), welche dem Verhältniss $v:v'$ entspricht. Dann erhalten wir alle möglichen l', indem wir alle möglichen Transversalen zu l und λ ziehen und dieselben um beliebige Strecken parallel zu x verschieben. Durch jeden beliebigen Zug von geraden Linien l_1, $l_2 \ldots$, welcher l mit l' verbindet, ist dann eine Art des Ueberganges von M zu M' oder eine Combination von brechenden Flächen zwischen bestimmten Medien dargestellt (II, 11), für welche M' das Bild von M ist.

Wenn die äusseren Medien gleich sind, $v = v'$, so sind auch die beiden Hauptbrennweiten einander gleich (II, 11). Die zusammengeschobenen Systeme repräsentiren eine Centralcollineation, in welcher das Centrum auf der Collineationsebene liegt (Γ mit Σ zusammenfällt, weil das Aehnlichkeitsverhältniss auf $\Gamma = 1$ sein soll), während die Gegenebenen sich zu beiden Seiten von derselben in gleichen Abständen befinden. Die Bedingung, welcher l, l' genügen müssen, besteht also in Folgendem: wenn man l' parallel zu x verschiebt, bis es l schneidet, so muss das von diesem Schnittpunkt auf x gefällte Perpendikel mit l und dem verschobenen l' in derselben Ebene liegen. — Der Knotenpunkt K (K') liegt auf der Hauptebene H (H′).

*13. Vergrösserung. Wir betrachten zunächst wieder den allgemeinen Fall. Ist das Object eine ebene Figur in einer Normalebene A zu x, so liegt das Bild ebenfalls in einer solchen Normalebene A′ und Object und Bild sind ähnlich und ähnlich gelegen in Bezug auf ein Centrum C auf x. Seien P und P' ein Paar entsprechender Punkte von A und A′, die mit C in einer Geraden liegen müssen, so stellt das Verhältniss $CP' : CP$ die lineare Vergrösserung für das Ebenenpaar AA′ dar, d. h. das constante Verhältniss einer Strecke in A′ zu der entsprechenden in A. Wie dieses Verhältniss sich ändert, übersieht man deutlich, wenn man sich die collineare Beziehung wieder durch die beiden Strahlen l, l' bestimmt denkt. Die Verbindungslinien PP' der entsprechenden Punktepaare dieser beiden Geraden bilden dann eine Regelschaar mit x als dritter Leitgeraden (II, 2); ihre Schnittpunkte mit x sind die Punkte C. Nun projiciren wir diese Regelschaar orthogonal auf eine Normalebene zu x, wodurch die Verhältnisse nicht geändert werden; da aber die Regelschaar sich als Strahlbüschel projicirt, so sind die Vergrösserungen dargestellt durch die Verhältnisse der Abschnitte, welche die Projectionen von l' und l auf den Strahlen dieses Büschels bestimmen. Man übersieht so deutlich, dass diese Vergrösserung alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft und jeden Werth nur einmal annimmt.

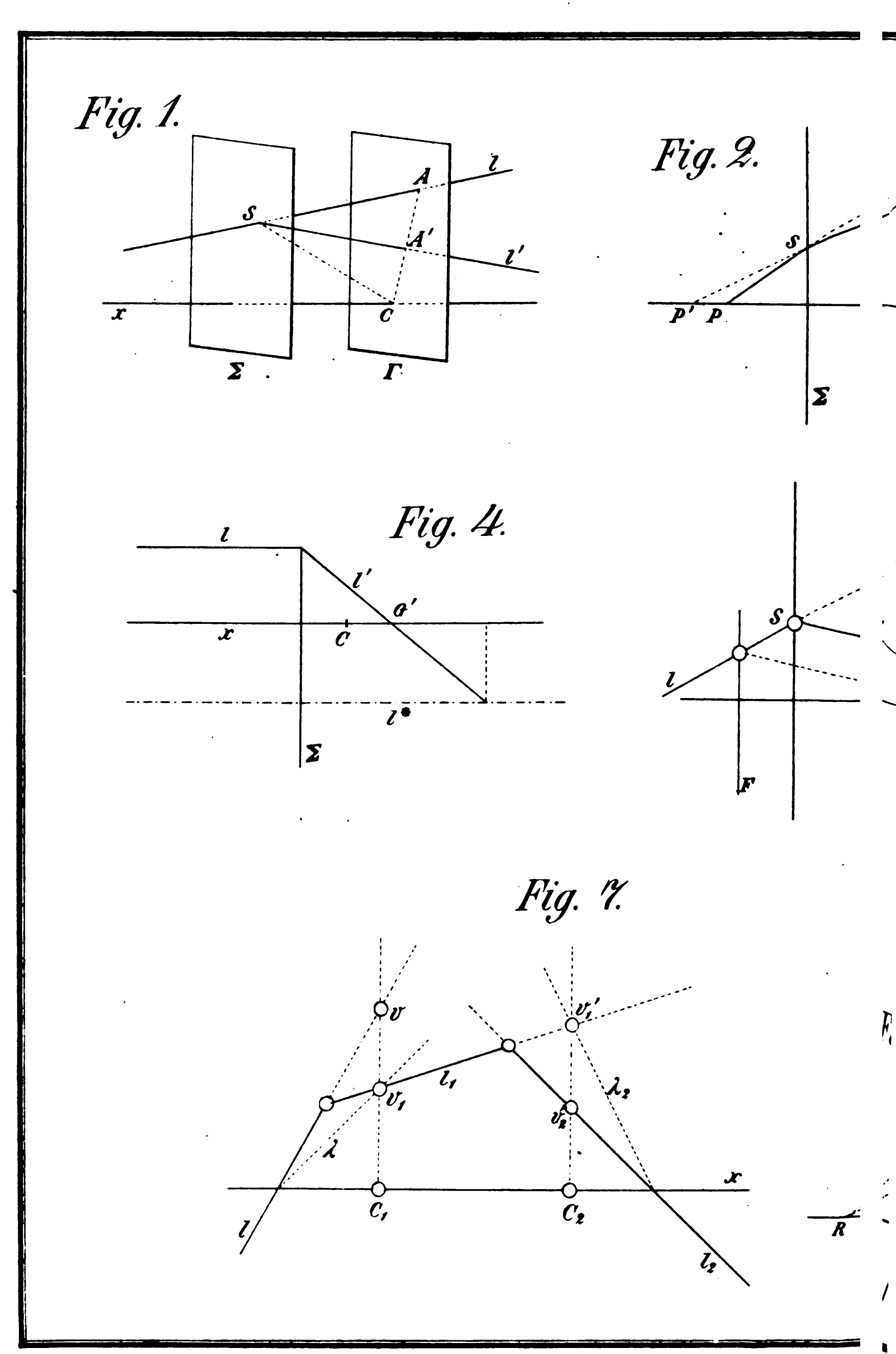
Seien A, A' zwei entsprechende Punkte von x, a, a' zwei durch sie gehende einander entsprechende Strahlen. Dann ist das Verhältniss

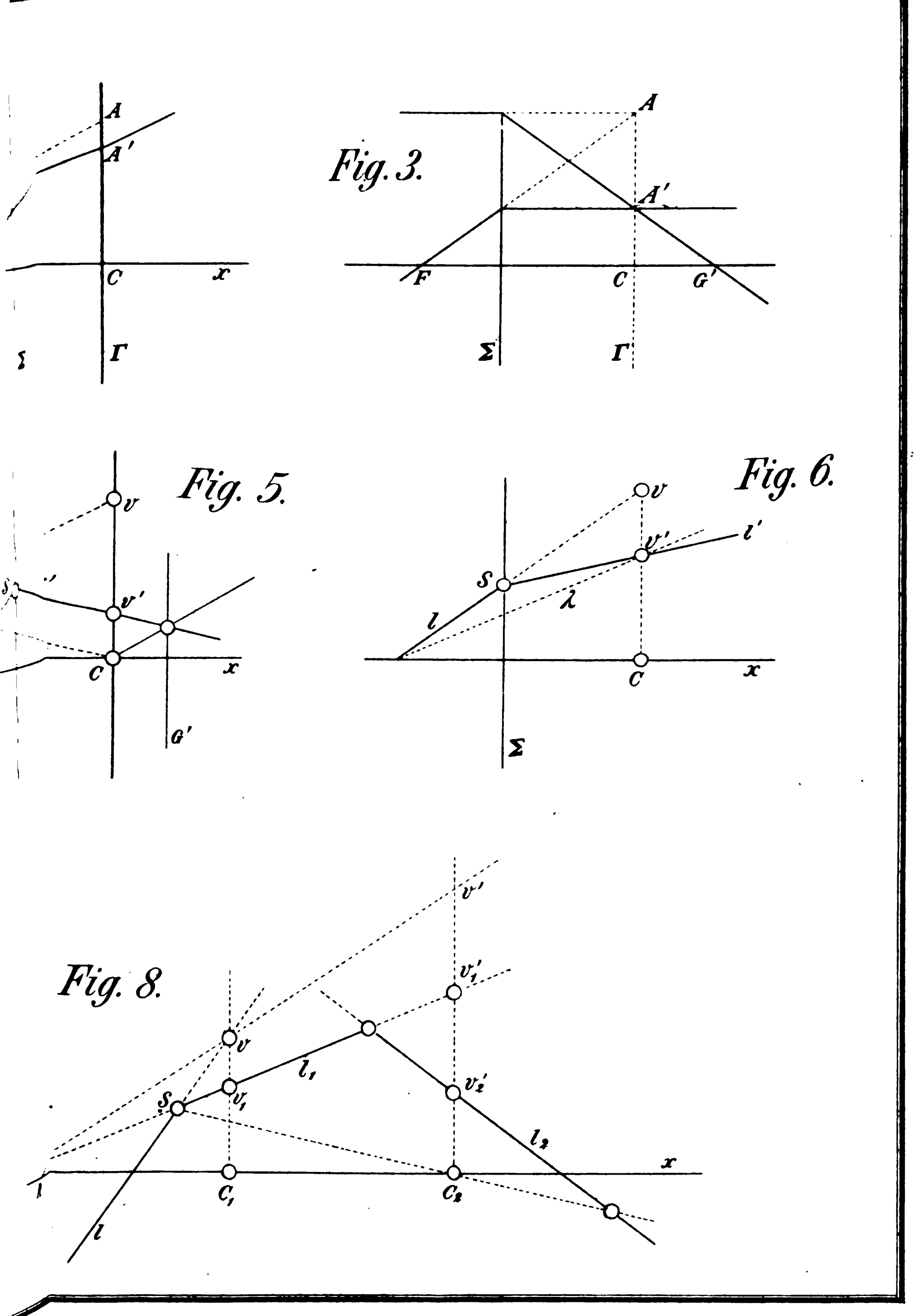
$tg(xa'):tg(xa)$, für welches man wegen der Kleinheit der Winkel das Verhältniss der Winkel selbst nehmen kann (Winkelvergrösserung), constant für alle Strahlenpaare der Bündel A, A'. Denn wenn man die beiden Systeme M, M' bis zur perspectivischen Lage verschiebt, so schneiden sich die Strahlenpaare von A und A' auf der Collineationsebene Σ und es ist $tg(xa'):tg(xa) = SA:SA'$, wo S der Schnittpunkt von Σ mit x ist. Denken wir uns durch A, A' die Normalebenen A, A′ zu x und nennen wir das Collineationscentrum C, so drückt das Verhältniss $CA':CA$ die lineare Vergrösserung für das Ebenenpaar AA′ aus.

In dem speciellen Fall, wo die äusseren Medien identisch sind, fallen C und S zusammen (II, 12), so dass für irgend ein Punktepaar A, A' auf x die lineare Vergrösserung der reciproke Werth der Winkelvergrösserung ist.

Ist noch specieller das System ein teleskopisches, d. h. entsprechen einander die unendlich fernen Ebenen von M und M', so ist die lineare und damit auch die Winkelvergrösserung constant für alle Punktepaare. Denn den Punkten von M, welche auf einem Parallelstrahl zu x liegen, entsprechen wieder die Punkte eines solchen Parallelstrahls in M', da der unendlich ferne Punkt von x sich selbst entspricht.

Von der Beziehung, welche bei einem teleskopischen Linsensystem zwischen M und M' besteht, lässt sich leicht beweisen, dass sie durch Angabe der Axe x und eines Paares entsprechender Punkte PP' bestimmt ist, während im allgemeinen Fall ein Paar entsprechender Strahlen erforderlich war. Zu irgend einem Strahl l durch P lässt sich dann l' durch P' construiren mit Hilfe von (II, 9) und der Bemerkung am Schlusse von (II, 12).


Fig. 1.
l
A
S
A'
l'
x
C
Σ
Γ
Fig. 2.
S
P'
P
Σ
Fig. 4.
l
l'
a'
x
C
l*
Σ
S
l
F
Fig. 7.
v
v₁'
l₁
v₁
λ₂
v₂
λ
x
C₁
C₂
l
l₂
R



Lithogr. a. Georg Heise, Dresden.

Kleinere Mittheilungen.

XXVII. Zurückführung der abstossenden Naturkräfte auf die Newton'sche Anziehungskraft.

Bei dem offen vorliegenden Gegensatz von Anziehung und Abstossung könnte es fast verwegen erscheinen, die Abstossung auf Anziehung zurückführen zu wollen. Wir dürfen aber nicht vergessen, dass wir in unseren Bezeichnungen häufig voreilig sind in unseren Schlüssen von den Wirkungen auf die Ursachen. Wenn ein Körper auf einen anderen stösst und nun zurückprallt, so ist nur thatsächlich, dass sich der zweite Körper nach dem Zusammenstoss von dem ersten entfernt, und dass er abgestossen werde, dass sich zwischen beiden eine abstossende Kraft einstelle, ist ein Schluss. Wenn Kalium dem Wassermolekül den Sauerstoff entreisst, so sagen wir nicht, dass der Wasserstoff von dem Sauerstoff abgestossen werde, obwohl auch hier beide Stoffe sich von einander entfernen, weil hier der wahre Grund: die grössere Anziehung zwischen Kalium und Sauerstoff, zu nahe liegt. Wenn die Flüssigkeiten vom Boden aus bis in die Gipfel der Bäume steigen, so sagen wir nicht, die Erde stosse dieselben ab und treibe sie so in die Höhe; und wenn wir ein enges Röhrchen in eine Flüssigkeit tauchen und diese steigt im Innern zu einer beträchtlichen Höhe, so behaupten wir nicht, die Erde oder die grössere Masse der Flüssigkeit stosse die gehobene ab, sondern vielmehr, dass die Wandungen die dünne Flüssigkeitssäule in die Höhe ziehen, da durch die geringere Entfernung der Röhrchenwände von der Flüssigkeit diese von jener stärker angezogen wird, als von der ganzen Erde. Wenn ein Planet durch das Perihelium gegangen und nun sich von der Sonne entfernt, so schliesst der Astronom daraus nicht, dass die Sonne den Planeten abstosse, und ebenso wenig denkt Jemand daran, wenn ein Planet von der Erde sich entfernt, dass hier eine Abstossung stattfinde, da man weiss, dass die Anziehungskraft der Sonne diese Entfernung bewirkt und jene nur eine Folge des Beharrungsvermögens ist. Wenn also Körper sich abstossen, wenn die Thatsachen uns zwingen anzunehmen, dass die Moleküle, die Atome nach dem Zusammenstoss sich von einander

entfernen, so kann diese sogenannte Abstossung immerhin die Folge von zurückziehenden Anziehungskräften sein. Nach dem Newton'schen Gesetze wird ja jedes Theilchen, auch das kleinste Sonnenstäubchen, von der Gesammtheit der Weltmaterie, also nach allen Seiten angezogen. Je•zwei Kräfte wirken nach gerade entgegengesetzten Richtungen. Es sind also Differenzen von Kräften, welche hauptsächlich die Bewegungen der Körper bewirken. Bei der unmessbaren Ausdehnung der Welt müssen diese Kräfte gegen ihre Differenzen so gross sein, dass letztere nicht in Betracht kämen, wenn jene sich nicht aufheben würden. Allein wenn auch zwei nach entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte sich theilweise oder ganz aufheben, so heisst dieses Aufheben doch nur, dass der betreffende Körper bei sich aufhebenden Kräften weder der einen, noch der anderen Kraft folgt, es kann aber nicht heissen, dass diese Kräfte absolut wirkungslos seien, da es keine Kraft ohne entsprechende Wirkung geben kann. Wie die aufgehobene Massenbewegung nach dem Zusammenstoss zweier Körper nicht spurlos verschwunden, sondern in Wärme übergegangen ist, also die Wirkung der einen Bewegungsgrösse nicht blos in der Aufhebung der anderen besteht, so muss auch eine entsprechende Wirkung eintreten, wenn ein Atom nach zwei entgegengesetzten Richtungen angezogen wird. Da nun aber bei zwei gleichen, nach entgegengesetzten Richtungen ziehenden und in demselben Punkte angreifenden Kräften keine Bewegung eintreten kann, worin besteht denn die Wirkung? — Da Nichts vorhanden, als Ausdehnung und Widerstandskraft oder Undurchdringlichkeit, die Ausdehnung aber nur durch die Widerstandskraft bestehen kann, so liegt der Gedanke nahe, dass die Undurchdringlichkeit in den nach allen Richtungen anziehenden Kräften der Weltmaterie ihren Grund hat. Wir müssen diese daher etwas näher untersuchen.

Die Resultate der Geologie und Astronomie weisen darauf hin, dass ursprünglich die Weltmaterie den Weltenraum gleichmässig erfüllte. Betrachten wir unsere Erde, so ist ihre gegenwärtige Gestalt im Grossen mit der Abplattung an den Polen dieselbe, welche sich ergeben musste, wenn wir sie in flüssiger Form unter dem Einfluss der durch die Rotation sich ergebenden Centrifugalkraft betrachten. War aber die Erde früher in flüssiger Form, so wird sie vordem in Gasform existirt haben, und die Hypothese, wornach sie sich von dem rotirenden gasförmigen Sonnenkörper losgelöst, gewinnt an Wahrscheinlichkeit. Nehmen wir hinzu, dass die Astronomie uns Himmelskörper kennen lehrt, deren Dichtigkeit zwischen den weitesten Grenzen schwankt, so ersetzt uns dieses gleichzeitige Vorkommen von Gebilden, deren Zustand die Stufen zwischen der embryonalen bis zur entwickeltsten Form repräsentirt, den Mangel einer vollständigen Geschichte eines Himmelskörpers. Zu denselben Schlüssen zwingt uns die Betrachtung der Newton'schen An-

ziehungskraft. Wenn das Streben dieser Kraft dahin geht, die Materie immer mehr zu verdichten, so sind wir gezwungen zu der Annahme, dass, je weiter wir in der Vergangenheit zurückgehen, die Verdichtung um so weniger vorgeschritten war, und es einen Zeitpunkt gegeben haben müsse, in welchem die Materie den Weltenraum gleichmässig erfüllte.

In dem Folgenden wollen wir nun hauptsächlich der mathematischen Behandlung wegen eine vollständig gleichmässige Massenvertheilung zu Grunde legen. Wir werden aber nur solche Schlüsse ziehen, die auch bei einer nicht gleichmässigen Massenvertheilung richtig sind.

Denken wir uns nun einen materiellen Punkt, so wird derselbe von allen Seiten angezogen, wirkt seinerseits aber auch anziehend auf alle Materie. Die Masse desselben sei m und er sei der Mittelpunkt einer Kugel, deren Radius R und deren Dichtigkeit μ sein möge. Wir wollen nun die Grösse der Kraft suchen, womit der Punkt m nach einer jeden Richtung angezogen wird. Durch den Mittelpunkt m denken wir uns eine Ebene E gelegt, welche also die Kugel in zwei Halbkugeln theilt. Die Kugel bestehe aus concentrischen Schichten mit der Dicke dR. Wir können nun die eine Schicht in differentielle Elemente zerlegen, indem wir sie durch Ebenen schneiden, die mit E parallel sind. Nennen wir den Winkel, den der Radius R mit dem auf E in m senkrechten Durchmesser bildet, ω, so ist $R \sin\omega$ der Radius des kreisförmigen differentiellen Elementes. Demnach ist das Volumen desselben $2\pi \sin\omega\, R^2\, dR\, d\omega$, die Masse also $2\pi\mu \sin\omega\, R^2\, dR\, d\omega$. Mithin ist die Kraft, womit m nach der auf E senkrechten Richtung angezogen wird,

$$\pm \frac{f.\mu.m.2.\pi R.^2 dR.\sin\omega.\cos\omega.d\omega}{R^2}$$

$$= \pm \tfrac{1}{2}.f.\mu.m.\pi.\, dR.\sin 2\omega.d.(2\omega).$$

Nun ist

$$\pm \tfrac{1}{2} f.\mu.m.\pi.dR \int \sin 2\omega\, d(2\omega) = \mp f.\mu.m.\pi.dR.\cos 2\omega.$$

Dieses Integral ist zu nehmen von $\omega = \frac{\pi}{2}$ bis $\omega = \pi$, also hier von π bis 2π. Die anziehende Kraft der halben Kugelschicht, deren Dicke dR ist, ist mithin $f.\mu.m.\pi.dR$. Nun ist

$$f.\mu.m.\pi \int_0^R dR = f.\mu.m.\pi.R.$$

Die Anziehungskraft, womit m nach irgend einer Richtung von der Kugel gezogen wird, ist also R proportional. Es ist daher die Frage nicht mehr zu umgehen, wie gross R anzunehmen sei oder ob die Welt begrenzt oder unbegrenzt sei. Nach Kant führt sowohl die eine wie die andere Annahme zu Widersprüchen. (Siehe Kritik der reinen Vernunft S. 328.) Doch sein Beweis gegen das Unbegrenztsein der Welt

ist nur eine Wiederholung der Behauptung. Es übersieht nämlich Kant, dass in mathematischem Sinne eine Reihe auch dann noch als unendlich gelten muss, wenn sie nach der einen Seite begrenzt, nach der anderen aber unbegrenzt ist. Mit Recht sagt er, dass eine unendliche Reihe durch successive Synthesis niemals vollendet werden könne. Allein dieses hindert nicht, sich in irgend einen Punkt der Reihe versetzt zu denken, von wo aus die ganze Reihe als aus zwei nach einer Seite begrenzten Stücken bestehend anzusehen ist. Uebrigens vermag nur die Lehre von der Idealität des Raumes und der Zeit die bei der vorliegenden Frage sich ergebenden Widersprüche zu lösen. Diese anzunehmen zwingt uns schon das Wirken in die Ferne; wo Etwas wirkt, da ist es auch. Bei der Idealität des Raumes und der Zeit aber hat es keinen Sinn, von einer Begrenzung dem Raume und der Zeit nach zu sprechen. Wir nehmen daher an, dass R unendlich gross sei, wollen aber auch einmal den Fall untersuchen, dass die Welt dem Raume nach begrenzt sei. Alsdann haben wir in dem obigen Ausdruck für R die kleinste Entfernung des Punktes m von der Weltgrenze zu setzen. Für unser Sonnensystem würde auch in diesem Falle R immer noch eine bedeutende Grösse sein. Zwar haben die Astronomen Stellen im Weltenraum entdeckt, in welchen keine Sternhaufen zu finden sind, sogenannte Kohlensäcke. Allein es giebt schwache Augen, die ausser den hellen Sternen und Sterngruppen unseres Milchstrassensystems nie Etwas am Sternenhimmel wahrgenommen haben, für die es also dort Kohlensäcke giebt, wo Billionen von Sternen stehen. Je höher die Ordnung der Sterngruppen, um so grösser die Entfernung, die also auch so gross sein kann, dass wir sie mit unseren besten Instrumenten nicht zu durchdringen vermögen. Wie gross aber auch R für unser Sonnensystem sein mag, ist die Welt dem Raume nach begrenzt, so ist die Vereinigung in einem Punkte das Ziel des Strebens, welches sich in der Anziehungskraft darstellt. Allein dieses Ziel braucht deshalb doch nicht in einem Momente erreicht zu werden, sondern die nach allen Seiten um so mehr auseinander reissende Kraft, je mehr man sich der Mitte der begrenzten Welt nähert, verhindert die plötzliche Vereinigung und Durchdringung, es ist daher Zeit zur Erreichung des endlichen Zieles erforderlich, und in dieser Zeit lebten wir dann. Man kann nun hier nicht einwenden, dass in dem angenommenen Falle das Ziel schon längst müsste erreicht sein. Dieses unterstellt nämlich, dass die Welt der Zeit nach unendlich sei. Nun liegt es aber auf der Hand, dass die Gründe, die Jemand bestimmen, die Welt dem Raume nach als begrenzt anzunehmen, ihn dann zwingen, einen Anfang der Welt zu setzen, also die Welt auch der Zeit nach als begrenzt zu fassen.

m wird von der Kugel nach allen Richtungen mit gleicher Kraft angezogen; je zwei nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kräfte

jedoch heben sich auf und so bleibt *m* in Ruhe. Und doch müssen diese sich aufhebenden Kräfte eine Wirkung haben! Um diese Wirkung der nach allen Richtungen wirkenden Kräfte zu erkennen, denken wir uns eine Kugel, auf deren Oberfläche in jedem Punkte nach Richtung der Normalen auswärts ziehende gleiche Kräfte wirken. Da je zwei gleiche Kräfte nach entgegengesetzter Richtung wirken, so halten sie sich das Gleichgewicht, wenn die Kugel als absolut starr angesehen wird. Ist sie dieses aber nicht, dabei aber vollständig gleichmässig in allen Punkten, so wird nur der Mittelpunkt in Ruhe bleiben, alle anderen Punkte aber sich mehr oder weniger vom Mittelpunkt entfernen, so dass das Volumen der Kugel grösser wird. Denken wir uns nun die Kugel umgeben von anderen sie berührenden und ihr vollständig gleichen Kugeln, die auch auf dieselbe Weise von jenen gleichen Kräften afficirt werden, so wird in den Berührungspunkten, indem wir dieselben als zweien Kugeln gemeinschaftliche Punkte auffassen, keine Veränderung eintreten, da hier je zwei Kräfte wirken, die gleich und entgegengesetzt sind. Lassen wir nun den Radius der Kugel bis zu einem unendlich kleinen Werthe abnehmen, so tritt bei dieser Grenze zwar keine Vergrösserung der Kugel mehr ein, aber auch keine Verkleinerung, keine Verdichtung. Somit kann also die Materie nicht in die Materie eindringen, wir haben die Undurchdringlichkeit. Die Materie muss in ihrem Aussereinander beharren. Wären nun die betreffenden Kräfte einander absolut gleich, so könnte keine Veränderung eintreten, die Materie müsste in Ruhe bleiben, trotzdem dass in aller Materie in der Form der Anziehungskraft das Bestreben liegt, sich mit einander zu verbinden. Es sind aber jene Kräfte sowohl bei der Annahme einer endlichen, als auch einer unendlichen Ausdehnung der Welt um endliche Grössen von einander verschieden, welches sich mit Nothwendigkeit aus der Verschiedenheit ihrer Lage ergiebt.

Die Undurchdringlichkeit hat also ihren Grund in der Gleichheit der nach allen Richtungen wirkenden sehr grossen, wenn nicht unendlich grossen Kräfte. Da aber diese nicht absolut gleich sind, so ist auch die Undurchdringlichkeit keine absolute. Die Unterschiede der nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte sind aber bei endlicher Ausdehnung der Welt in dem Centraltheile, bei unendlicher überall gegen die Kräfte selbst fast verschwindend klein. Es wird also eine Verrückung der materiellen um fast verschwindend Kleines eintreten müssen, es tritt also eine Verdichtung und eine dieser entsprechende Verdünnung ein. Da diese aber fast verschwindend klein sind, so ist eine sehr lange Zeit erforderlich, bis diese Veränderung merkbar wird. Die Undurchdringlichkeit ist also an sich aufgehoben. Sie kommt, in absolutem Sinne genommen, der Materie nicht zu, besteht aber für sehr lange Zeiträume. Relativ genommen ist die Undurchdringlichkeit thatsächlich.

Dass nun ein Körper, wenn er auf einen anderen stösst, diesen nicht durchdringt, sondern in Bewegung setzt, dass jeder Körper, alle Materie Widerstandskraft hat, können wir uns mit Hilfe des Vorhergehenden erklären. Allein die Erscheinungen der Elasticität lassen sich auf diese Weise nicht vollständig begründen. Folgendes kommt hier in Betracht: Unterliegen die Atome und Moleküle bei ihrer gegenseitigen Wirkung auf einander denselben Kräften, wie die Himmelskörper, so werden sie auch ähnliche Bahnen beschreiben. Es werden also im Allgemeinen, wenn auch je nach den Umständen mit gewaltigen Störungen, bei der Bewegung der Atome und Moleküle umeinander die Kepter'schen Gesetze gelten. Wird also ein Körper neuen Kräften ausgesetzt, mag dieses nun durch Druck oder Wärme oder auf eine andere Weise geschehen, so wird die Folge eine ähnliche sein, als wenn zunächst die äussersten Himmelskörper eines Syztems in ihrer Bewegung eine Aenderung erlitten. Es wird die Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung verändert. Mit der Geschwindigkeit ändert sich aber die grosse Axe und die Art der Curve, ob Hyperbel, Parabel oder Ellipse. Ist nämlich A die Anziehungskraft in der Entfernung 1, v die Geschwindigkeit der Masse m in einem Punkte der Bahn, r die Entfernung in jenem Punkte vom Centralkörper, so ist die Bahn eine Ellipse, wenn $m v^2 < \frac{2A}{r}$, ein Theil einer Parabel, wenn $mv^2 = \frac{2A}{r}$, und ein Stück von einem Arm einer Hyperbel, wenn $mv^2 > \frac{2A}{r}$. War also die Curve Parabel oder Hyperbel, so kann sie durch Verminderung der Geschwindigkeit Ellipse werden. Sie kann aber auch durch Vergrösserung der Geschwindigkeit aus einer Ellipse eine Parabel oder Hyperbel werden.

Sind aber an der Oberfläche eines Körpers Atome und Moleküle in parabolischer oder hyperbolischer Bahn begriffen, so werden sie im Allgemeinen den Körper verlassen, d. h. verdunsten oder verdampfen. Diesem wirken Druckkräfte durch Ueberführung in elliptische Bahnen entgegen. Wären alle Atome oder Moleküle in parabolischer oder hyperbolischer Bahn begriffen, so würden die Druckkräfte durch Ueberführung in elliptische Bahnen den gasförmigen in den flüssigen oder festen Zustand überführen. Da die Wärme die Geschwindigkeit der sich bewegenden Moleküle vergrössert, so hat sie den entgegengesetzten Erfolg, wie Druckkräfte. Diese verdichten den Körper. Wird der Druck aufgehoben, so wird zwar eine der Grösse desselben entsprechende Ausdehnung des Körpers wieder eintreten, indem die Atome und Moleküle, welche bei ihrer Bewegung nach aussen durch den Druck zurückgehalten worden wären, jetzt ihre Bahnen vollenden können. Allein die bereits veränderten Bahnen bleiben in ihrer neuen Gestalt, wofern sie nicht von den anderen Molekülen

wiederum verändert werden, was diese aber nur durch Veränderung der eigenen Bewegung vermögen. Ein vollständiges Wiedererhalten der Gestalt vor dem Drucke ist also ohne Zuhilfenahme anderer Kräfte nicht denkbar. Die durch den Druck geleistete Arbeit kann nur durch andere Kräfte wieder aufgehoben werden. Wir werden daher untersuchen müssen, ob nicht die Repulsion und Elasticität noch anderswo ihren Grund haben. Da mit der Annäherung nach dem Newton'schen Gesetze die Anziehungskraft wächst, so ist die Ursache der Abstossung in der veränderten Beziehung zur gesammten Weltmaterie zu vermuthen. Denken wir uns nun eine Kugel von gleichmässig vertheilter Materie mit der Dichtigkeit μ. Im Mittelpunkt befinde sich der materielle Punkt m im Gleichgewicht, indem er nach allen Seiten mit gleichen Kräften angezogen wird. Nun werde m um r aus der Gleichgewichtslage herausgebracht. Alsdann lehrt die Mechanik, dass m nur der Anziehungskraft der Kugel unterliegt, welche mit der ursprünglichen concentrisch ist und deren Oberfläche durch den Punkt m geht, weil alle diese Kugel umgebenden Schichten der erstern auf m nur sich aufhebende Einwirkungen ausüben. m wird daher nach der Gleichgewichtslage mit der Kraft $f.\frac{\frac{4}{3}\pi . r^3 . \mu . m}{r^2} = \frac{4}{3}f.\mu.m.\pi.r$ angezogen, also mit einer Kraft, welche der Entfernung von der Gleichgewichtslage proportional ist. Nun können wir aber jeden Punkt, der im Gleichgewicht ist, als den Mittelpunkt einer Kräftekugel ansehen. Wird ein materieller Punkt dann aus diesem Gleichgewichtsmittelpunkt herausgebracht, so wird er nach demselben wieder zurückgezogen. Der Zustand eines materiellen Punktes, sowie der eines aus solchen zusammengesetzten Körpers ist ein derartiger, dass in der Gleichgewichtslage die inneren und äusseren Kräfte ein System bilden, dessen Resultirende Null ist. Wird nun aber ein Körper in der Richtung ab bewegt, so wächst die nach der Richtung ba anziehende Kraft, während die in der Richtung ab wirkende abnimmt, da ja die nach der Richtung ba hin liegende Weltmaterie zu-, die nach ab hin gelegene dagegen abnimmt. $\frac{4}{3}f.\mu.m.\pi.r$ stellt aber nur die Kraft dar, womit die Masse m zurückgezogen würde, wenn es sich nur um die Masse m handelte, die benachbarte Materie durchaus keine Aenderung erlitte. Stösst aber ein Körper, und sei er auch nur ein materieller Punkt, auf einen anderen Körper, so bringt er Theile des anderen Körpers aus ihrer Gleichgewichtslage, ja es gilt dieses, wenn auch mit der Entfernung rasch abnehmend, streng genommen von der gesammten Weltmaterie. Auf diese Weise wird die Bewegung des Körpers für einen Augenblick aufgehoben. Wird nun ein Theilchen um ϱ aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, so wird es bei einer Masse m nach dem Obigen mit der Kraft $\frac{4}{3}.f.\mu.m.\pi.\varrho$ zurückgezogen. Bei dieser Zurückbewegung nun wirkt dieses Theilchen mit zur Zurückbewegung der benachbarten Theilchen, vorzugsweise auch des ursprünglichen materiellen

Punktes m. Wenn nun dieser um r verschoben worden ist, so sei der folgende um $\varphi . r$, der zweitfolgende um $\varphi' . \varphi . r$, der drittfolgende um $\varphi'' . \varphi' . \varphi . r$ etc. verschoben. Wird aber der ursprüngliche Punkt $c$mal mehr verschoben, so liegt es auf der Hand, dass dann der nächstfolgende ebenfalls $c$mal weiterrückt, also $c . \varphi . r$, ebenso der zweitfolgende $c . \varphi' . \varphi . r$, der drittfolgende $c . \varphi'' . \varphi' . \varphi . r$ etc. Mithin ist auch für alle die zurückziehende Kraft $c$mal grösser, mithin auch die beschleunigende Wirkung auf den Punkt m. Die Gesammtkraft, die diesen zurücktreibt, ist also der Entfernung von seiner Gleichgewichtslage proportional.

Somit hätten wir also die Kraft gefunden, die man bis jetzt dem sogenannten Aether zuschrieb, einem Stoff, den man nur deshalb annahm, um die Erscheinungen des Lichtes und die Repulsionskräfte zu erklären. Wir brauchen nun nach dem Vorhergehenden nur solche Atome anzunehmen, die anziehend wirken. Diese Atome sind durch Materie getrennt, welche von sehr unbedeutender Dichtigkeit ist, dagegen den Raum stetig erfüllt. Wir können nun zur Erklärung der Lichterscheinungen, wenn jene dünne Materie dazu nicht hinreichend sein sollte, immerhin an Stelle des Aethers Atome annehmen, die im Vergleiche mit den eigentlichen Körperatomen an Grösse und Dichtigkeit sehr unbedeutend und dem bis jetzt angenommenen Aether in dieser Hinsicht ähnlich sind. Ausser den eben angeführten müssen übrigens noch weitere Aenderungen mit den Hypothesen über die Constitution der Körper vorgenommen werden. Nur durch die obige Auffassung der Undurchdringlichkeit verbunden, mit der Annahme, dass die Atome durch weniger dichte, aber stetige Materie getrennt seien, ist der Widerspruch vermieden, der darin liegt, dass die Atome durch leere Räume getrennt seien. Folgenschwerer ist die Annahme, dass die Atome unveränderlich seien. Durch diese Annahme ist eine befriedigende Vermittelung zwischen unorganischer und organischer Welt, zwischen Pflanzen- und Thierreich geradezu abgeschnitten, und daher die abstossenden Erklärungsversuche des Materialismus. Da die Atome ausgedehnt sind, so haben wir in demselben Atom die Materie in der innigsten Berührung. Die Anziehungskraft muss daher sehr gross sein, woher es ja auch kommt, dass die gewöhnlichen Kräfte der Natur das Atom nicht zu theilen vermögen, d. h. die Materie des Atoms nicht voneinander reissen können. Während nun aber die nach aussen gerichteten Kräfte des Atoms, obwohl sie im Vergleiche zu jenen auf das Innere wirkenden sehr klein sind, entsprechende Wirkungen hervorbringen, bringen jene nur die Starrheit des Atoms zu Stande, wir haben also ein fortgesetztes Streben, sich zu durchdringen ohne den geringsten Erfolg. Dieses ist ein Widerspruch. Nehmen wir aber die Unveränderlichkeit des Atoms nur in relativem Sinne, d. h. wird die Veränderlichkeit erst in sehr langen Zeiträumen merkbar, so haben wir den tiefsten Grund des Fortschrittes, und zwar eines nothwendigen Fortschrittes in der Natur. Die organischen Körper unterscheiden sich

dann im letzten Grunde dadurch von den unorganischen, dass sie Atome enthalten, in welchen die Durchdringung der Materie weiter fortgeschritten ist. Doch braucht dieses nicht bei allen Atomen eines organischen Körpers der Fall zu sein.

Die vorstehenden Ergebnisse habe ich bereits in meiner Schrift „Gott und die Welt von Schill" angedeutet; doch wurden dieselben dort mehr auf philosophischem Wege gefunden und ergaben sich als Consequenz eines philosophischen Systems.

Boppard.

GILLES,
Gymnasiallehrer.

XXVIII. Ist Oersted oder Schweigger der eigentliche Entdecker des Electromagnetismus?

Oersted veröffentlichte bekanntlich seine Versuche durch sein Circular mit Datum Copenhagen den 21. Juli 1820, vergleiche Gilbert Annalen, Bd. 66 Seite 295, wo dieses Circular abgedruckt steht.

In der Einleitung sagt Oersted: „Aus diesen Versuchen schien zu erhellen, dass die Magnetnadel sich mittels des galvanischen Apparates aus ihrer Lage bringen lasse, und zwar bei geschlossenem galvanischen Kreise und nicht bei offenem, wie vor mehreren Jahren einige berühmte Physiker umsonst es versucht haben."

Als achter Versuch sagt Oersted: „Wird der verbindende Draht lothrecht nahe bei einem Pole der Magnetnadel ihm gegenübergestellt, und das obere Ende des Drathes erhält die Electricität von dem negativen Ende des galvanischen Apparates, so bewegt sich dieser Pol nach Osten" etc. etc.

Die gleiche Thatsache veröffentlicht Schweigger bereits 12 Jahre früher und zeigt diesen Versuch sowohl an am geschlossenen, als auch am offenen electrischen Kreise.

In Gehlen's Journal der Chemie und Physik etc., Bd. VII. vom Jahre 1808, Seite 206, findet sich Schweigger's Aufsatz mit der Ueberschrift:

„Ueber Benutzung der magnetischen Kraft bei Messung der electrischen."

Der Aufsatz lautet im Auszuge: „Bei den meisten Electrometern wirkt die Kraft der Electricität gegen die Schwerkraft, oder die Drehungskraft eines dünnen Fadens wie bei Coulomb's electrischer Waage; ich weiss aber nicht, ob man schon den mit Electricität so nahe verwandten Magnetismus zu ähnlichen Zwecken benutzt hat."

„Denken Sie sich Coulomb's electrische Waage so eingerichtet, dass die Nadel, statt an einem Faden aufgehängt zu sein, auf einer Nadelspitze schwebt, welche vollkommen isolirt ist. Die Nadel sei übrigens von magnetischem Stahl und mit angesteckten ganz kleinen Messingknöpfchen versehen. Man sieht, dass bei dieser Vorrichtung Electricität und Magnetismus sich wechselseitig zum Maasse dienen können." etc.

„Soeben erhalte ich (vom Mechaniker) ein nach dieser von mir angegebenen Idee verfertigtes Electrometer, das überaus zart ist.“

„Die geringste, dem durch den Deckel (des umgebenden Glases) gehenden isolirten Stifte mitgetheilte Electricität stösst die Nadel aus dem magnetischen Meridian, die dann oft viertelstundenlang von dem Kügelchen des zu leitenden Stiftes absteht, bei dessen Berührung sie jedoch sogleich wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkommt, welche sie indessen alsbald von Neuem verlässt, wenn durch jene Berührung die Electricität nicht vollkommen aufgehoben wurde. etc.“ etc.

„Weiss man, welcher Grad der Electricität erforderlich ist, um den magnetisirten Stahlstift von seiner natürlichen Lage auf eine bestimmte Weite zu entfernen, so lässt sich die Electricität des Turmalin höchst bequem auf gemeine Electrometergrade reduciren.“

Durch obiges Electrometer zeigte also Schweigger die gleiche Erscheinung, welche Oersted als seinen achten Versuch bezeichnet, und zwar am geschlossenen und am offenen electrischen Kreise; denn in dem Augenblicke, wo Schweigger dem isolirten Stifte am oberen Ende Electricität mittheilt, wird dieselbe durch den isolirten Stift geleitet, den man daher auch isolirte Leitung nennen könnte, und bringt, bei der Magnetnadel angekommen, die Ablenkung derselben hervor. Die Magnetnadel musste isolirt sein, sonst würde der Funke überschlagen, ohne die Nadel abzulenken.

Bis jetzt war das Experiment mit offenem electrischen Kreise gemacht; in dem Augenblicke aber, wo Schweigger die Leitung berührt, ist die Verbindung mit der Erde hergestellt und der electrische Kreis geschlossen. Die Electricität in der Leitung durchströmt dieselbe in umgekehrter Richtung und die Magnetnadel, welche zu dieser Umkehrung nicht mehr isolirt zu sein braucht, schlägt nach der entgegengesetzten Seite und stellt sich dann in den Meridian ein, weil der electrische Strom bereits aufgehört hat und sich auch keine Electricität mehr in der Leitung befindet.

Wollten wir uns nun an die anerkannt beste Definition des Begriffes Electromagnetismus halten, welche uns Professor Dr. W. H. Dove in dem Handwörterbuch der Chemie und Physik, Bd. I. Seite 690, giebt, und in welchem jeder Artikel mit der Ueberschrift des Verfassers versehen ist, so bestätigt es sich, dass Schweigger durch seinen Electrometer eine electromagnetische Erscheinung nachgewiesen hat. Die Definition lautet: „Unter Electromagnetismus versteht man die Gesammtheit der magnetischen Erscheinungen, welche hervortreten, wenn ein irgendwie hervorgerufener electrischer Gegensatz sich abgleicht.“

Es ist unbedingt eine magnetische Erscheinung, wenn die Magnetnadel aus dem Meridian abgelenkt wird, also die Richtung verlässt, welche sie dem Erdmagnetismus zufolge einnehmen muss.

Es ist ferner ein mit dem Magneten sich abgleichender electrischer Gegensatz vorhanden, denn Schweigger schreibt, die Nadel habe oft Viertel-

stunden lang von dem zuleitenden Stifte abgestanden, ehe sie sich nach und nach in den Meridian wieder eingestellt habe. Die Langsamkeit der Rückkehr der Nadel hängt mit der langsamen Ausströmung der Electricität in die Luft zusammen; und die Nadel gab also in jedem Augenblick die Stärke der in der Leitung vorhandenen Electricität an, war also in jedem Augenblick mit der Stärke der Electricität des Stiftes abgeglichen. Ja! Schweigger konnte sogar die Stärke der Electricität messen an den Graden der Ablenkung der Magnetnadel, denn er schreibt: „Weiss man, welcher Grad der Electricität erforderlich ist, um die Nadel von ihrer natürlichen Lage auf eine bestimmte Weite zu entfernen, so lässt sich die Electricität des Turmalin höchst bequem auf gemeine Electrometergrade reduciren.“

Wollte man die Definition über Electromagnetismus dahin verstehen, der electrische Gegensatz müsste sich nicht nur durch die magnetischen Erscheinungen abgleichen, wie sich z. B. auf der Waage die Gewichte mit der Waare abgleichen, sondern der electrische Gegensatz müsste sich an und für sich abgleichen, es müsste sich erst + und — Electricität mit einander verbinden, sich gegenseitig aufheben, und auf diese Art abgleichen oder ausgleichen, und erst dann könnte man die dadurch entstehenden magnetischen Erscheinungen Electromagnetismus nennen, so bleibt es dennoch richtig, dass Schweigger eine electromagnetische Erscheinung nachgewiesen hat; denn in dem Augenblicke als Schweigger, die Leitung berührt, gleicht sich eben die + und — Electricität in diesem Sinne ab, und Schweigger beobachtete in diesem Augenblicke die dadurch entstehende magnetische Erscheinung, er sprach es aus und bewies es durch seinen Electrometer, dass sich in diesem Augenblicke die Magnetnadel bewegt, „sogleich“ bewegt.

Es ist nun wohl hinlänglich bewiesen, dass Schweigger's Electrometer ein magnetisches Electrometer ist und auf Electromagnetismus basirt. Schweigger hatte also bereits 1808 durch dieses Instrument eine electromagnetische Erscheinung nachgewiesen, folglich gebührt ihm die Ehre, den Electromagnetismus entdeckt zu haben, da Oersted erst 12 Jahre später seine Entdeckung machte, resp. veröffentlichte, nämlich 1820.

Nebenbei sei hier noch bemerkt, dass Oersted bereits 1808 obige Abhandlung Schweigger's nebst dem dazu gehörigen Instrumente gekannt hat; denn im gleichen Bande von Gehlen's Journal, wo Schweigger's Aufsatz steht, findet sich auch ein Aufsatz von Oersted, und zwar Seite 374.

Wie kam es aber, dass Schweigger's Aufsatz 1808 so ganz übersehen wurde, und besonders, wie kam es, dass Schweigger nicht energisch protestirte, als Oersted mit seiner Entdeckung 1820 hervortrat.

Schweigger's Aufsatz erschien 1808, also zu der Zeit, als Deutschland durch Napoleon niedergeschmettert war und der Minister Stein geächtet wurde. In solch einer Zeit kümmert man sich weniger um wissenschaftliche Arbeiten, als 1820, wo Oersted seine Entdeckung brachte und ganz Deutsch-

land froh aufjauchzte über die glücklich beendeten Freiheitskriege, über die Verbannung des gefürchteten Napoleon. Jetzt wurde jede Entdeckung freudig begrüsst und so auch die Oersted'sche Entdeckung, die man mit Recht eine Vervollkommnung der bereits 1808 gemachten Entdeckung nennen kann, da Oersted die Erscheinung der Ablenkung der Magnetnadel am geschlossenen Kreise der Berührungs-Electricität zeigt, während Schweigger 1808 diese Erscheinung durch Reibungs-Electricität nachgewiesen hatte, und zwar am geschlossenen und am offenen electrischen Kreise.

Warum aber hat Schweigger 1820 nicht energisch protestirt und so lange auf seine 12 Jahre früher gemachte Entdeckung hingewiesen, bis ihm und nicht Oersted die Entdeckung des Electromagnetismus zugesprochen wurde?

Der Grund liegt zum Theile darin, dass der Name „Electromagnetismus" nicht von Schweigger herrührt, vielmehr hatte Schweigger 1808 dafür noch keinen Namen, obwohl er den genauesten Zusammenhang zwischen Electricität und Magnetismus gekannt hat; ja Schweigger schreibt sogar in Gehlens Journal Bd. VII. Seite 158 in einem Aufsatz: „Magnetismus und Electricität sind nur Modificationen ein und derselben Kraft".

Der Grund liegt ferner in Schweigger's damaliger Stimmung, die ihn zu literarischen Arbeiten untauglich machte. Er schreibt darüber in seinem Journal der Chemie und Physik, welches er wahrscheinlich deswegen gleichzeitig an Meinecke übergab, Bd. 33 Seite 2 in einer Anmerkung: „Die schreckliche Nachricht von der Ermordung meines Bruders, des vormaligen Professor der Botanik und Zoologie zu Königsberg, welcher sich in Sicilien auf einer wissenschaftlichen Reise befand, erfüllt mich mit ebenso gerechter als tiefer Trauer, und raubt mir jede Stimmung zu literarischen Arbeiten."

Der Grund liegt endlich in Schweigger's grosser Bescheidenheit, die auch Professor Dr. Fr. Ph. v. Martius in seiner Denkrede am 28. November 1857 (München bei J. G. Weiss) hervorhebt. Man erkennt diese Bescheidenheit sogar in obigem Aufsatz von 1808. In der Einleitung schreibt Schweigger: „Ich weiss aber nicht, ob man schon den mit Electricität so nahe verwandten Magnetismus zu ähnlichen Zwecken benützt hat." Schweigger hat sehr gut gewusst, dass vor 1808 noch kein Mensch die Stärke der Electricität durch Magnetismus gemessen hat, und dennoch schreibt er: „Ich weiss aber nicht." Er schreibt also lieber diese Worte, als dass er irgend einem Nebenmenschen, der möglicherweise den Gedanken vor ihm gehabt haben könnte, zu nahe tritt.

Es wäre nun wohl für die Geschichte der Physik interessant, Stimmen zu hören, ob Oersted oder Schweigger der Entdecker des Electromagnetismus war; dem Verfasser will es scheinen, als ob man Schweigger diese Entdeckung zuschreiben müsste.



XXIX. Bemerkungen über geodätische Linien.

I. Ist ∂s das Bogenelement einer Curve auf einer Fläche, so sei

$$\partial s^2 = E\,\partial u^2 + 2F\,\partial u\,\partial v + G\,\partial v^2.$$

Für eine bestimmte Curve kann man u und v als Functionen einer Variabeln t ansehen und mit Beziehung hierauf sei

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u'', \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v', \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = v''.$$

Bezeichnet man durch φ den Winkel, welchen die Curve im Punkte (x, y, z) mit der Curve bildet, für welche u allein variirt, so ist

$$1)\qquad \frac{Eu' + Fv'}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{1/2}} = \cos\varphi \,.\, \sqrt{E}.$$

Diese Gleichung nach t differentiirt, giebt

$$\frac{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{3/2}}{v'}\,\frac{\partial \cos\varphi\sqrt{E}}{\partial t}$$

$$= (Fu' + Gv')\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}u'^2 + \frac{\partial E}{\partial v}u'v' + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)v'^2 + Eu'' + Fv''\right\}$$

$$- (Eu' + Fv')\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)u'^2 + \frac{\partial G}{\partial u}u'v' + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}v'^2 + Fu'' + Gv''\right\}$$

$$+ \frac{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}{2v'}\left(\frac{\partial E}{\partial u}u'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}u'v' + \frac{\partial G}{\partial u}v'^2\right).$$

Für den Fall einer geodätischen Curve reducirt sich die vorstehende Gleichung einfach auf

$$2)\qquad 2\,.\,\frac{\partial \cos\varphi\sqrt{E}}{\partial t} = \frac{\frac{\partial E}{\partial u}u'^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}u'v' + \frac{\partial G}{\partial u}v'^2}{(Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)^{1/2}}.$$

Sind nun E, F, G von u unabhängig, also Functionen von v allein, so verschwindet in der Gleichung 2) die rechte Seite, es ist also dann

$$\cos\varphi \,.\, \sqrt{E} = a,$$

wo a eine Constante bedeutet. Die Gleichung 1) giebt dann

$$Eu' + Fv' \pm a\sqrt{\frac{EG - F^2}{E - a^2}}\,v' = 0.$$

Durch Integration erhält man hieraus

$$3)\qquad \begin{aligned} u + \int\frac{F}{E}\,\partial v + \int\frac{a}{E}\sqrt{\frac{EG - F^2}{E - a^2}}\,\partial v &= 2u_1, \\ u + \int\frac{F}{E}\,\partial v - \int\frac{a}{E}\sqrt{\frac{EG - F^2}{E - a^2}}\,\partial v &= 2v_1, \end{aligned}$$

wo u_1 und v_1 Constanten sind. Mittels der Gleichungen 3) kann man u und v als Functionen zweier neuen Variabeln u_1 und v_1 ansehen. Man erhält dann

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial u_1}=1-\frac{F}{a}H, \quad \frac{\partial v}{\partial u_1}=\frac{E}{a}H,\\ &\frac{\partial u}{\partial v_1}=1+\frac{F}{a}H, \quad \frac{\partial v}{\partial v_1}=-\frac{E}{a}H,\\ &H=\sqrt{\frac{E-a^2}{EG-F^2}}.\end{aligned}\right.$$

Mittels dieser Gleichungen folgt

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u_1}=\left(1-\frac{F}{a}H\right)\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{E}{a}H\frac{\partial x}{\partial v},\\ &\frac{\partial x}{\partial v_1}=\left(1+\frac{F}{a}H\right)\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{E}{a}H\frac{\partial x}{\partial v}.\end{aligned}\right.$$

Nimmt man also für das allgemeine Bogenelement folgenden Ausdruck:

$$\partial s^2=E_1\,\partial u_1^2+2F_1\,\partial u_1\,\partial v_1+G_1\,\partial v_1^2,$$

so findet man mittels der Gleichungen 5) und vier analoger Gleichungen, mit Rücksicht auf den Werth von H aus 4)

$$6)\quad E_1=G_1=\left(\frac{E}{a}\right)^2, \quad F_1=E\left(1-\frac{E-a^2}{a^2}\right)$$

oder

$$7)\quad E_1=G_1, \quad (F_1+E_1)^2=4a^2E_1.$$

Die Quantitäten u_1 und v_1 sind die Argumente zweier Systeme geodätischer Linien, welche durch die Gleichungen 7) charakterisirt sind. Setzt man

$$F_1=\cos\varphi_1\sqrt{E_1G_1}=E_1\cos\varphi_1,$$

so ergeben die Gleichungen 6)

$$\frac{1+\cos\varphi_1}{2}=\frac{a^2}{E}$$

oder, da $\cos\varphi.\sqrt{E}=a$ ist:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1=\cos\varphi \text{ oder } \varphi_1=2\varphi.$$

Für eine Helikoidfläche finden die Gleichungen statt

$$8)\quad x=p\cos(u-w), \quad y=p\sin(u-w), \quad z=b(u-w)+q,$$

wo p, q, w Functionen von v sind, von denen nur eine arbiträr zu sein braucht und b eine Constante bedeutet. Nimmt man zwischen p, q und w solche Relationen an, dass $F=0$ und $G=1$ ist, so hat man

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{b}{b^2+p^2}\frac{\partial q}{\partial v}, \quad \frac{p^2}{p^2+b^2}\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2=1,$$
$$E=p^2+b^2.$$

Die Gleichungen 3) geben in diesem Falle

$$u=u_1+v_1,$$
$$9)\quad \int\frac{a}{\sqrt{p^2+b^2}\sqrt{p^2+b^2-a^2}}\,\partial v=u_1-v_1.$$

Im Falle einer Schraubenfläche ist in den Gleichungen 8) $p=v$ und $q=0$.

Nimmt man $k<1$ und $k^2+k'^2=1$, so giebt die Gleichung 9)

$$b>a, \quad a=bk, \quad v=bk' \, tang\, am \frac{u_1-v_1}{k},$$

$$b<a, \quad b=ak, \quad v=\frac{ak'}{\cos am\,(u_1-v_1)},$$

$$b=a, \qquad \frac{2a}{v}=e^{v_1-u_1}-e^{-(v_1-u_1)}.$$

Ist das Product der Hauptkrümmungshalbmesser constant, so hat man nach dem Theorem von Gauss, mit Rücksicht darauf, dass E, F und G von u unabhängig sein sollen:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}\right)+\frac{\sqrt{EG-F^2}}{m}=0,$$

wo m das constante Product bedeutet. Ist n eine weitere Constante, so ergiebt sich leicht durch Integration

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2+2\frac{E}{m}=2n,$$

und hieraus

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial v}}{2\sqrt{n-\frac{E}{m}}}=\sqrt{EG-F^2}.$$

Mittels dieser Gleichungen geht dann die Differenz der Gleichungen 3) über in

$$\frac{1}{2}\int\frac{a\,\partial E}{E\sqrt{E-a^2}\sqrt{n-\frac{E}{m}}}=u_1-v_1,$$

welche Gleichung durch eine leicht auszuführende Integration v in Functionen von u_1-v_1 giebt.

Die Gleichungen 6) geben noch zu einem bemerkenswerthen Falle Veranlassung, wenn E constant ist, und zwar $E=2a^2$. Dann ist $F_1=0$. Wenn aber E constant ist, so verschwindet das Krümmungsmass in jedem Punkte einer Fläche, dieselbe ist dann eine developpable Fläche. Da es in diesem Falle bequemer zu sein scheint, von anderen Gleichungen auszugehen, so mögen für die developpabeln Flächen noch die folgenden kurzen Bemerkungen Platz finden.

II. Sind die beiden Variabeln u und v, von denen die Coordinaten eines Punktes einer Fläche abhängen, so gewählt, dass sie die Argumente zweier Systeme geodätischer Linien auf der Fläche sind, so finden die Gleichungen statt:

$$10)\qquad E\left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)=\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u},\quad G\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)=\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v},$$

wenn wieder

$$\partial s^2=E\,\partial u^2+2F\,\partial u\,\partial v+G\,\partial v^2,$$

wo ∂s das Bogenelement einer beliebigen Curve auf der Fläche ist.

Soll $F=0$ sein, so geben die Gleichungen 10)

$$\frac{\partial E}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial G}{\partial u}=0,$$

also E ist nur von u und G nur von v abhängig. Man kann, unbeschadet der Allgemeinheit, dann einfach $E=1$, $G=1$ nehmen. Für $E=1$, $G=1$ und $F=0$ verschwindet das Krümmungsmass, die Fläche ist dann developpabel. Es kann also nur auf einer developpabeln Fläche ein Coordinatensystem existiren, bestehend aus geodätischen Linien, welche sich orthogonal schneiden. Fasst man eine solche Fläche als Tangentenfläche einer beliebigen Raumcurve auf, so finden die Gleichungen statt

$$11)\qquad x=\xi+w\cos\alpha,\quad y=\eta+w\cos\beta,\quad z=\zeta+w\cos\gamma,$$

wo (ξ,η,ζ) ein Punkt einer Raumcurve ist und α,β,γ die Winkel sind, welche die Tangente in diesem Punkte zur Curve mit den Coordinatenaxen bildet. Man bezeichne nun durch ∂s das Bogenelement der Raumcurve, durch ϱ und r resp. den Krümmungsradius und Torsionsradius im Punkte (ξ,η,ζ), endlich durch λ,μ,ν und l,m,n die Winkel, welche die Hauptnormale und die Normale zur Krümmungsebene im bemerkten Punkte mit den Coordinatenaxen bilden. Bezeichnet man den endlichen Hauptkrümmungshalbmesser im Punkte (x,y,z) der developpabeln Fläche durch q, so ist

$$12)\qquad q=w\frac{r}{\varrho}.$$

In den Gleichungen 11) sind nun w und s Functionen von u und v. Mit Rücksicht hierauf erhält man

$$13)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{\partial(w+s)}{\partial u}\cos\alpha+\dfrac{w}{\varrho}\dfrac{\partial s}{\partial u}\cos\lambda,\\[2ex]\dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{\partial(w+s)}{\partial v}\cos\alpha+\dfrac{w}{\varrho}\dfrac{\partial s}{\partial v}\cos\lambda.\end{cases}$$

Aus den Gleichungen 13) und vier ähnlichen Gleichungen ergeben sich für $E=1$, $G=1$ und $F=0$ folgende Relationen:

$$\left(\frac{\partial(w+s)}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{w}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial u}\right)^2=1,\quad \left(\frac{\partial(w+s)}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{w}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial v}\right)^2=1,$$

$$\frac{\partial(w+s)}{\partial u}\frac{\partial(w+s)}{\partial v}+\left(\frac{w}{\varrho}\right)^2\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}=0,$$

oder

$$14)\qquad \frac{\partial(w+s)}{\partial u}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial(w+s)}{\partial v}=-\sin\varphi,$$



$$15)\qquad \frac{w}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial u}=\sin\varphi,\qquad \frac{w}{\varrho}\frac{\partial s}{\partial v}=\cos\varphi,$$

wo φ ein näher zu bestimmender Winkel ist. Eliminirt man $w+s$ zwischen den Gleichungen 14), so folgt

$$16)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{1}{\sin\varphi}=\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{1}{\cos\varphi}.$$

Die Gleichungen 15) geben

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sin\varphi}{w}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\cos\varphi}{w}\right)=0.$$

Mittels der Gleichungen 14) und 15) geht diese Gleichung über in

$$\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{\sin\varphi}{w}\left(-\sin\varphi-\frac{\partial s}{\partial v}\right)+\frac{\cos\varphi}{w}\left(\cos\varphi-\frac{\partial s}{\partial u}\right)=-\frac{1}{w}.$$

Aus der vorstehenden Gleichung und der Gleichung 16) folgt

$$17)\qquad \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{1}{w}.$$

Sieht man umgekehrt u und v als Functionen von s und w an, so geben die Gleichungen 15) und 17) in Verbindung mit

$$\left(\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial w}{\partial u}$$

die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\frac{1}{\varrho},$$

es ist also $\partial\varphi$ das Complement des Contingenzwinkels der Raumcurve im Punkte (ξ, η, ζ).

Mittels der Gleichungen 14) und 15) gehen die Gleichungen 13) über in

$$18)\qquad \frac{\partial x}{\partial u}=\cos\alpha\cos\varphi+\cos\lambda\sin\varphi,\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\cos\alpha\sin\varphi+\cos\lambda\cos\varphi.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 15) und 17) erhält man aus 18)

$$19)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=-\frac{\cos l}{r}\frac{\partial s}{\partial u}\sin\varphi,\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}=-\frac{\cos l}{r}\frac{\partial s}{\partial v}\cos\varphi.$$

Für die Curven, längs welchen nur u oder nur v variirt, mögen im Punkte (x, y, z) $\alpha_u, \lambda_u, l_u, \varrho_u, r_u$ und $\alpha_v, \lambda_v, l_v, \varrho_v, r_v$ analoge Bedeutungen haben wie $\alpha, \lambda, l, \varrho, r$ für die Wendecurve der developpabeln Fläche. Setzt man dann nach 19), 12) und 15)

$$20)\qquad \begin{aligned}\frac{1}{\varrho_u}&=-\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial u}\sin\varphi=-\frac{\varrho}{r}\frac{\sin^2\varphi}{w}=-\frac{\sin^2\varphi}{q},\\ \frac{1}{\varrho_v}&=-\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial v}\cos\varphi=-\frac{\varrho}{r}\frac{\cos^2\varphi}{w}=-\frac{\cos^2\varphi}{q},\end{aligned}$$

so lassen sich die Gleichungen 18) und 19) auch schreiben

$$\cos\alpha_u=\cos\alpha\cos\varphi+\cos\lambda\sin\varphi,\qquad \cos\lambda_u=-\cos l,$$
$$\cos\alpha_v=-\cos\alpha\sin\varphi+\cos\lambda\cos\varphi,\qquad \cos\lambda_v=-\cos l.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit 15), 17) und 20) geben weiter

$$\frac{\cos l_u}{r_u} = (\cos\lambda \cos\varphi - \cos\alpha \sin\varphi)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{q},$$

$$\frac{\cos l_v}{r_v} = (\cos\lambda \sin\varphi + \cos\alpha \cos\varphi)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{q}.$$

Aus diesen Gleichungen und den Gleichungen 20) schliesst man

$$\frac{1}{r_u} = \frac{1}{r_v} = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{q},$$

$$\cos l_u = \cos\alpha_v, \quad \cos l_v = \cos\alpha_u.$$

Die zuletzt entwickelten Gleichungen lassen sich noch leicht weiter untereinander combiniren, was hier der Kürze halber übergangen werden möge; zu bemerken ist nur noch, dass die angeführten Gleichungen implicite die sämmtlichen Resultate der Abhandlung von Molins enthalten: „*Sur les lignes de courbure et les lignes géodésiques des surfaces développables*" (*Journ. de Mathém. Année* 1859, *T. IV p.* 347).

A. Enneper.

Berichtigung.

In meinem Aufsatze im zweiten Hefte dieser Zeitschrift S. 218: „Ueber die dualistische und die unitarische Ansicht in der Elektricitätslehre", findet sich ein bedauerlicher Rechenfehler, der zwar auf den Gang der Betrachtung von wesentlichem, auf die dort am Ende gezogene Schlussfolgerung aber von keinem Einfluss ist, und der mir nur dadurch erklärlich wird, dass ich die bekannte Gleichung der Potentialtheorie: $V' = -\int V\varrho\, d\sigma_1$ (III, S. 220), aus einer andern gleichzeitigen Untersuchung auf die ebengenannte Betrachtung ohne Weiteres übertrug.

Die Gleichung I), S. 219, muss nämlich lauten

$$4\pi q V' = \int\left(V\frac{\partial\left(\frac{q}{r}+W\right)}{\partial n} + \left(\frac{q}{r}+W\right)\frac{\partial V}{\partial n}\right)d\sigma_1,$$

und infolge dessen wird die Gleichung III), S. 220, zu

A) $$V' = -\int V\frac{\varrho}{q}\,d\sigma_1;$$

damit wird aber auch die S. 221 gezogene Folgerung: „Gleichgiltig .... besitzen", hinfällig und die beiden Gleichungen S. 221 müssen lauten:

$$(a+p)V' = -\int V\varrho_a\, d\sigma_1 - \int V\varrho_p\, d\sigma_1,$$

$$(a-p)V' = -\int V\varrho_a\, d\sigma_1 + \int V\varrho_p\, d\sigma_1.$$

Giebt man nun als experimentelle Thatsache zu, dass zwei Körper auch schon durch gegenseitige Annäherung (ohne unmittelbare Berührung) einander elektrisch zu machen im Stande sind,* so bleiben die unter 1 bis 4, S. 222 und 223, gezogenen Schlussfolgerungen in aller Strenge bestehen, da sie nur darauf basiren, dass, wie die Gleichung A) zeigt, für $q=0$ auch $\varrho=0$ sein muss, also nach der dualistischen Ansicht durch Annäherung zweier unelektrischer Körper keine Elektricität entstehen könne.

Freiberg. Dr. Kötteritzsch.

* Vergl. den Versuch von *Gassiot*, *Philos. Mag.* Bd. 25, 1844.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Literaturzeitung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Achtzehnter Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1873.



Inhalt.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Bibliotheca Mathematica. Systematisches Verzeichniss der bis 1870 in Deutschland auf den Gebieten der Arithmetik, Algebra, Analysis, Geometrie, Trigonometrie, Polygonometrie und Stereometrie, Dynamik, Statik und Mechanik, Hydrologie, Hydrodynamik, Hydrostatik und Hydraulik, Carmologie, Astronomie, Astrologie, mathematischen und physikalischen Geographie erschienenen Werke, Schriften und Abhandlungen. Mit Autorenregister etc., bearbeitet von A. Erlecke. Erster Band, die encyklopädisch-mathematische Literatur umfassend. Halle a. S. Verlag von A. Erlecke, 1873. 2 Bde., 307 S. 8⁰. Preis für das ganze Werk 5 Thlr.

Jede auf dem genannten Gebiete neu erscheinende Publication wird bei dem dermaligen Zustande der mathematischen Bibliographie mit Dank aufzunehmen sein; von einem solchen Werke aber, das in der vorgedruckten Ankündigung sich selbst als „epochemachend und sehnlichst erwartet“ hinstellt, ist man berechtigt, in jeder Beziehung Vorzügliches zu verlangen und deshalb an dasselbe einen strengen Massstab der Beurtheilung anzulegen. In dieser Weise hat Referent sich erlaubt, die bis jetzt erschienenen zwei Lieferungen, mit denen der erste Band abschliesst, durchzusehen.

Dass auf dem Titel des Werkes manches Ueberflüssige steht, das schon in anderm Aufgezählten enthalten ist, fällt zunächst in die Augen; dagegen vermisst man darin den ganzen wichtigen Abschnitt der mathematischen Physik, der in einer *Bibliotheca mathematica* nicht fehlen darf, während man darin die physikalische Geographie recht wohl entbehren könnte.

Die beiden bis jetzt erschienenen Lieferungen enthalten die beiden ersten Hauptabschnitte. Der erste derselben ist überschrieben: Mathématische Bibliographie. Trotzdem an Werken über diesen Gegenstand nicht Ueberfluss vorhanden ist, hat der Verfasser es doch möglich gemacht, eine Reihe von Schriften zu übersehen. So fehlt z. B. die „Polytechnische

Bibliothek", Leipzig 1866 flg.; Schotte, Repertorium der technisch-mathematischen Journalliteratur, Leipzig 1869 flg. (dies, ein rein bibliographisches Unternehmen, ist später unter den mathematischen Zeitschriften aufgeführt); Poggendorff, „Lebenslinien zur Geschichte der exacten Wissenschaften", Berlin 1853; die vorliegende „Literaturzeitung" mit ihrem so werthvollen Abhandlungsregister und Aehnliches. Ob man Schriften aus 1870 als fehlend notiren soll, ist fraglich, da an manchen Stellen das bis 1870 des Titels als bis 1870 incl., bald als bis 1870 excl. gefasst ist.

Der zweite Abschnitt mit dem Titel Mathematische Zeitschriften übersteigt aber an Ungleichmässigkeit der Ausführung Alles, was Referent bis dahin gesehen hat. Zunächst die Frage, was z. B. die *Commentarii de Bononiensi scientiarum instituto atque academia*, *Bononiae* 1731—1791 in einer deutschen Bibliographie zu suchen haben. Liegt Bologna vielleicht in Deutschland, oder hat Herr E. etwa Bononia mit Bonn übersetzt? Berechtigter ist vielleicht die Aufnahme der Petersburger akademischen Schriften, die wenigstens einen deutschen Commissionsverleger haben; weshalb aber wieder die „Abhandlungen der k. dänischen Gesellschaft der Wissenschaften", Kopenhagen 1798—1808, aufgenommen sind, ist nicht einzusehen. Doch das sind Kleinigkeiten, über die man füglich hinwegsehen darf.

Die ganze folgende Arbeit ist aber nichts, als eine einfache Compilation. Statt die Inhaltsangabe bei sämmtlichen Zeitschriften nach einem Schema zu machen, hat der Verfasser sich begnügt, diese Inhaltsangaben so abzudrucken, wie jede Zeitschrift dieselbe besitzt. Deshalb hat Grunert's Archiv und Crelle's Journal alphabetisch nach den Autoren geordnetes Register und es ist dadurch eine Raumverschwendung eingetreten, welche man im Interesse der Käufer nur tadeln kann. Bei vielen Zeitschriften dagegen ist die Angabe des Inhalts ganz unterblieben, für die der nöthige Raum durch andere Anordnung der beiden genannten Journale leicht hätte beschafft werden können. Wenn man freilich Bemerkungen liest, wie die auf S. 304: „Leider ist es mir weder durch Inanspruchnahme zweier Universitätsbibliotheken, noch der Verlagshandlung möglich gewesen, die betreffenden Inhaltsregister zu erlangen und können dieselben daher erst in einer ferneren Auflage geliefert werden", die sich auf vorliegende, sicher auf jeder Universitätsbibliothek vorhandene Zeitschrift bezieht, so kann man einen Einblick thun in die Art der Arbeit des Herrn E., aber auch in die Art sich seine Hilfsmittel zu verschaffen. Hier gleich die Bemerkung, dass die beiden Supplementhefte zu dieser Zeitschrift Herrn E. unbekannte Sachen sind, obwohl sie in jedem Kataloge der Verlagshandlung angeführt werden. Die Bemerkung zu den Monatsberichten der Berliner Akademie: „Von fast sämmtlichen Abhandlungen etc., deren die Berichte der königlich

preussischen Akademie Erwähnung thun, ist in denselben nur gesagt, dass sie an einem gewissen Tage in der Akademie vorgelesen worden sind. Höchst selten sind aus den betreffenden Abhandlungen Auszüge darin abgedruckt worden. Aus diesem Grunde ist die Specification des Inhalts an dieser Stelle unterblieben", ist aber in dieser Allgemeinheit entschieden falsch, führt uns jedoch auf einen weitern wichtigen Punkt, den wir an der Arbeit des Herrn E. auszusetzen haben.

Wir haben nämlich in einer mathematischen Bibliographie Abhandlungen zu suchen, wie Hofmeister, Beiträge zur Kenntniss der Gefäss-Kryptogamme (Leipzig, Abhandl. Bd. II, 121—180; III, 603—682); wie Pelzel, Abhandlung über den Samo, König der Slaven (Abhandl. einer Privatges. in Böhmen I, 222—242)! Von den 136 ausführlich aufgeführten Abhandlungen der königl. bairischen Akademie gehören 22 in das auf dem Titel angeführte Gebiet; von den 96 Nummern der Abhandlungen einer Privatgesellschaft in Böhmen 30; von den Abhandlungen, gesammelt von Haidinger, sind unter 67 Nummern 16 einschlägige; unter den 253 Nummern der Leipziger Berichte 122; von den 193 der Denkschriften der Wiener Akademie 51, also von zusammen 745 Abhandlungen, welche Herr E. aufführt, hätten 241 aufgeführt werden dürfen, das heisst noch nicht der dritte Theil.

Auch in diesem zweiten Theile fehlt mancher Titel, z. B. die Kritische Zeitschrift für Mathematik, Physik und Chemie von Kekulé, Levinson, Eisenlohr und Cantor.

Die Bibliographie soll doch jedenfalls auch dem Buchhändler, besonders dem Antiquar Nutzen bringen; dies kann sie nur in vollem Masse, wenn sie bei jeder Abhandlung gewissenhaft angiebt, ob und wieviel Kupfertafeln zu derselben gehören; es ist sonst ganz unmöglich zu entscheiden, ob der betreffende Ausschnitt vollständig ist oder nicht. Es ist dies auch ein grosser Mangel der *Scientific Papers*, welche die *Royal Society* in London herausgiebt. Referent weiss zufällig, dass eine der bedeutendsten mathematischen Antiquarhandlungen in dieser Beziehung dem Verfasser ihre Mitwirkung zur genauen Richtigstellung angeboten hat, ohne von Herrn E. einer Antwort gewürdigt zu sein. In der vorliegenden Bibliographie ist eine solche Angabe überall nur da gemacht, wo die betreffende benutzte Zeitschrift in dem Inhaltsverzeichniss eine solche Angabe enthält. Wie sehr compilatorischer Natur die Arbeit ist, kann man recht deutlich auch daraus ersehen, dass z. B. die Inhaltsangabe von Grunert's Archiv soweit gegeben ist, als die beiden bis jetzt erschienenen Registerbände gehen. Für den Rest (1862—1870) wird auf den Nachtrag verwiesen; vielleicht erscheint ja bis dahin ein weiteres Registerheft und überhebt Herrn E. eigener Arbeit.

Referent muss nach alledem seine Meinung dahin zusammenfassen, dass die vorliegende Bibliographie keineswegs ihrem Zwecke genügt,

jedenfalls nicht epochemachend sein wird, und dass ein halbwegs brauchbares Handbuch der mathematischen Bibliographie auch nach dem Erscheinen des vorliegenden ein *pium desiderium* bleiben wird.

Thorn, den 1. December 1872. M. Curtze.

Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendung auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente, von F. R. Helmert. Leipzig 1872. 348 S. 8°.

Nach verhältnissmässig langer Pause begrüssen wir hier ein Lehrbuch der Methode der kleinsten Quadrate, welches vor den bisher vorhandenen zwei bedeutende Vorzüge zeigt. Erstens giebt dasselbe zum erstenmal in organischem Zusammenhang die Lösungen aller derjenigen Aufgaben, welche bis jetzt, als in das Gebiet der Ausgleichungsrechnung gehörig, in Monographien behandelt worden sind, und zweitens wird eine neue höchst interessante Aufgabe, im unmittelbaren Anschluss an die gewöhnlichen Ausgleichungsaufgaben, und unabhängig von einem bestimmten Fehlervertheilungsgesetz behandelt, nämlich die von v. Andrä bei Gelegenheit der Ermittelung der Genauigkeit der pothenotischen Aufgabe zuerst unternommene, und vom Verfasser des besprochenen Buches unabhängig hiervon aus derselben Veranlassung weiter ausgeführte Veranschaulichung der Genauigkeit der Festlegung eines Punktes in einer Ebene mittels der „Fehlerellipse“.

Die Aufgaben der eigentlichen Ausgleichungsrechnung werden vom Verfasser folgendermassen eingetheilt: I. Directe Beobachtungen (arithmetisches Mittel), II. Vermittelnde Beobachtungen (einfachster Fall mehrerer Unbekannter), III. Bedingte Beobachtungen (unmittelbare Beobachtungen mit Nebenbedingungen, z. B. Gauss'sche Triangulirungsausgleichung), IV. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen (die wichtigste Form für die Geodäsie, bis jetzt von Bessel in der Gradmessung in Ostpreussen, Hansen und Zech behandelt), V. Allgemeinste Aufgabe, welche alle anderen als specielle Fälle enthält.

Für alle diese Aufgaben wird mitgetheilt die Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten, der mittleren Fehler derselben und des mittleren Fehlers einer Function der Unbekannten.

Da die ersten vier Aufgaben, obgleich sie nur specielle Fälle der letzten sind, vor dieser und selbständig behandelt werden, so wäre es consequent, wenn dieses vollständig geschähe; es wird jedoch beim arithmetischen Mittel auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen verwiesen; wie überhaupt mehrere vorwärtsweisende Citate auffallen.

In der Begründung der Methode der kleinsten Quadrate und der Bestimmung der mittleren Fehler hält sich der Verfasser möglichst unabhängig

von einem bestimmten Fehlergesetz und schliesst sich deswegen im Wesentlichen an die *theoria combinationis* an; jedoch wird auch den Fehlergesetzen die gebührende Aufmerksamkeit gewidmet. Es werden drei Gesetze der Wahrscheinlichkeit $\varphi(\varepsilon)$ des Fehlers ε behandelt, nämlich $\varphi(\varepsilon) = c$, $\varphi(\varepsilon) = c\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2}\right)$ und $\varphi(\varepsilon) = ce^{h^2\varepsilon^2}$, und es wird für jedes derselben die Beziehung zwischen durchschnittlichem, mittlerem und wahrscheinlichem Fehler aufgesucht.

Besonders glücklich scheint uns die Wahl des zweiten Gesetzes (erste Näherung für das dritte), welches als Curve eine die gewöhnliche Wahrscheinlichkeitscurve osculirende Parabel giebt.

Bekanntlich ist man bei allen Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate, worin andere als lineare Functionen der Fehler vorkommen, genöthigt, die höheren Potenzen der letzteren zu vernachlässigen; es scheint daher nur consequent, auch in dem Ausdruck für die Fehlerwahrscheinlichkeit eine entsprechende Näherung eintreten zu lassen, wie sie das zweite Gesetz bietet. Dieses führt darauf, dass kein Fehler als möglich angenommen wird, der grösser wäre als der $2{,}_{24}$ fache mittlere oder der $2{,}_{88}$ fache wahrscheinliche Fehler.

Ausser dem mittleren und wahrscheinlichen Fehler wird noch dem durchschnittlichen Fehler mehr Aufmerksamkeit gewidmet, als bisher gewöhnlich geschah, wenn derselbe nur berechnet wurde, um unter Annahme eines bestimmten Fehlergesetzes den wahrscheinlichen oder mittleren daraus abzuleiten.

Es zeigt entschieden von der Gründlichkeit des Verfassers, dass er die, durch die Methode der kleinsten Quadrate gelieferten Resultate im Allgemeinen nicht „wahrscheinlichste", sondern im Gegensatz hierzu „plausibelste" nennt, offenbar um stets an die Unabhängigkeit der Methode der kleinsten Quadrate von der ersten Gauss'schen Begründung zu erinnern; indessen scheint uns doch die allgemein gebräuchliche Benennung „wahrscheinlichste" Resultate auch mit gründlicher Kenntniss ihrer Herleitung wohl verträglich zu sein, natürlich abgesehen von dem seltenen Falle ungleicher Wahrscheinlichkeit für gleich grosse positive und negative Fehler.

Das Fundament der eigentlichen Methode der kleinsten Quadrate wird vom Verfasser in doppelter Weise gelegt. Er giebt zuerst (in § 10) einen dem Muster der *theoria motus* nachgebildeten Uebergang von dem arithmetischen Mittel zum Princip der kleinsten Quadratsumme, welcher den entschiedenen Vorzug vor der unmittelbaren Gauss'schen Darstellung hat, dass Alles bei Seite gelassen wird, was nicht zur Herstellung dieses Uebergangs absolut erforderlich ist, nämlich die Betrachtung von mehr als einer Unbekannten und die Bestimmung der Integrationsconstanten und ebendamit auch die Aufstellung von Fehlergrenzen.

Eine andere Begründung des Princips der kleinsten Quadratsumme wird auf S. 80 angedeutet, jedoch nur in Kürze, weshalb es uns zweifelhaft bleibt, ob der Verfasser dieser Begründung einen höheren Werth zuerkennen will, als den, dass sie zeigt, dass die Methode der kleinsten Quadrate in dem speciellen Falle einer Unbekannten auf das arithmetische Mittel führt.

In § 12 wird sodann für vermittelnde Beobachtungen die Methode der kleinsten Quadrate aus dem Princip der kleinsten mittleren Fehler hergeleitet.

Bei Aufstellung der Formeln für die Gewichte wird mit Recht jede Beziehung auf ein bestimmtes Fehlergesetz vermieden, ohne jedoch deswegen die erste Gauss'sche Gewichtsbestimmungsmethode zu übergehen*).

Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass man nicht nach dieser ersten Methode verfahren wird, wenn man ausser dem, was sie giebt, noch nachher das Gewicht einer Function der Unbekannten haben will. Wenn aber Letzteres, wie gewöhnlich, nicht der Fall ist, so halten wir in Uebereinstimmung mit Encke (B. I. 1835 S. 288) und im Gegensatz zum Verfasser (S. 101) diese erste Methode für die bequemere; jedenfalls stimmt die Behauptung, es sei der erste Weg „im Allgemeinen sehr umständlich", nicht mit unseren Erfahrungen überein.

In der Behandlung bedingter Beobachtungen begrüssen wir es mit Freuden, dass immer zuerst die Reduction auf vermittelnde Beobachtungen empfohlen wird, ehe zur Ausgleichung mit Correlaten geschritten wird. In sehr vielen Fällen sind die Coefficienten der Bedingungsgleichungen 0 oder 1 und dann macht eine Ausgleichung mit Correlaten, wie sie z. B. Gerling ausschliesslich anwendet, gegenüber der Reduction auf vermittelnde Beobachtungen entschieden einen schwerfälligen Eindruck, abgesehen von der Umständlichkeit der Gewichtsbestimmungen.

Indessen kann die Reduction auf vermittelnde Beobachtungen noch allgemeiner ausgeführt werden, als dadurch, dass man bei n Unbekannten und r Bedingungsgleichungen r Unbekannte in den n-r übrigen ausdrückt (S. 172); man kann nämlich alle unter sich abhängigen n Unbekannten in irgend welchen neuen r unabhängigen Unbekannten (welche natürlich auch zum Theil mit den alten identisch sein können) ausdrücken und dann die letzteren nach der Methode der vermittelnden Beobachtungen bestimmen. Obgleich dieser Gedanke nicht allgemein ausgesprochen wird, so findet sich doch die Aufgabe der Höhenausgleichung auf S. 309 mit Recht so gelöst.

Die in der Geodäsie wichtige Aufgabe der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen und Bedingungsgleichungen wird

*) Vergl. hierüber auch S. 350 dieses Bandes.

in zwei Auflösungen behandelt, von denen die zweite, welche sich auf den Begriff „äquivalenter Beobachtungen“ stützt, lebhaftes Interesse verdient.

Wenn m Unbekannte durch Ausgleichung von n vermittelnden Beobachtungen bestimmt wurden, so kann man stets annehmen, es existiren gewisse m unabhängige Beobachtungen mit bekannten Gewichten, welche vermittelst gewisser m linearer Gleichungen sowohl die m Unbekannten nebst ihren Gewichten, als auch jede Function der Unbekannten nebst Gewicht genau ebenso bestimmen, wie die ursprünglichen Beobachtungen mit den zugehörigen Fehlergleichungen selbst (§. 21). Indem hiermit die obige Aufgabe auf Ausgleichung unmittelbarer Beobachtungen mit Nebenbedingungen zurückgeführt wird, wird sie allerdings, wenigstens theoretisch, sehr „durchsichtig“ gemacht.

Trotzdem möchten wir hierin noch nicht den Hauptwerth der „äquivalenten Beobachtungen“ suchen, sondern in der weiteren vom Verfasser gemachten Anwendung derselben auf die allseitige Untersuchung der Genauigkeit geodätischer Operationen.

Er zeigt z. B., dass die durch eine Triangulirung erzielte Festlegung eines Punktes in einer Ebene in allen Beziehungen ersetzt werden kann durch den Schnitt zweier durch ihn gehender Geraden, deren mittlere Parallelverschiebungen angegeben werden können.

In diesen Untersuchungen scheint uns die Lösung einer auf der allgemeinen Conferenz der europäischen Gradmessung vom Jahr 1867 (Bericht S. 107, 110 u. 111) aufgestellten Aufgabe zu liegen.

Es schliesst sich hieran die schon eingangserwähnte Theorie der „Fehlerellipse“. Der Verfasser zeigt nämlich, dass die Ersetzung der Bestimmung eines Punktes durch den Schnitt zweier Geraden in unendlich vielfacher Weise geschehen kann, dass aber alle diese Geradenpaare conjugirte Durchmesser einer Ellipse von angebbaren Dimensionen sind. Derartige Ellipsen sind für mehrere concrete Fälle, z. B. für eine pothenotische Bestimmung und eine Viereckstriangulirung ausführlich gezeichnet.

Dass die hierauf folgenden allgemeinen Untersuchungen über Beobachtungsfehler und die „verschiedenen Anwendungen“ der Methode der kleinsten Quadrate manches Neue bieten würden, liessen die vorhergehenden Paragraphen erwarten, und in der That sind insbesondere die auf Geodäsie bezüglichen Anwendungen sehr lehrreich.

Es erübrigt uns, einen Blick auf die numerischen Beispiele des Buches zu werfen; sie sind sehr zahlreich und beweisen die Bekanntschaft des Verfassers mit diesem wichtigen Gegenstand. Indessen wäre uns häufig (wie manchmal auch im Uebrigen) mehr Ausführlichkeit erwünscht gewesen, z. B. hätte bei der dem *supplementum theor. comb.* nach gerechneten Fünfecksausgleichung nach unserer Ansicht die Elimination

(S. 191) vollständig mitgetheilt werden sollen, wenn die Absicht vorlag, den Leser in die numerische Behandlung umfassender Ausgleichungen einzuführen.

In der Auswahl der Beispiele vermissen wir nur eines, nämlich eine kleine Triangulirungsausgleichung mit Richtungsbeobachtungen im Anschluss an § 20 und § 25.

Wir können das Buch nicht aus der Hand legen, ohne den Gesammteindruck desselben dahin zusammen zu fassen, dass die Wissenschaft der Fehlerbehandlung dadurch in mehrfacher Beziehung wesentlich gefördert worden ist.

Carlsruhe, October 1872. JORDAN.

Bibliographie

vom 1. October bis 31. December 1872.

Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1871. Berlin, Dümmler. 12 Thlr.

Physikalische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1871. Berlin, Dümmler. 6 Thlr.

Verhandlungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Classe. 1871, I. und II. Leipzig, Hirzel. $^2/_3$ Thlr.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. 1872, 2. Heft. München, Franz. 12 Ngr.

Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. 32. Bd. Wien, Gerold. $11^1/_3$ Thlr.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Register zu den Bdn. 61—64. Wien, Gerold. 12 Ngr.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von C. Ohrtmann, F. Müller und A. Wangerin. II. Jahrg. 1869 und 1870. 2. Heft. Berlin, G. Reimer. $1^2/_3$ Thlr.

Reine Mathematik.

Schanz, Der Cardinal Nicolaus v. Cusa als Mathematiker. Tübingen, Fues. $^1/_3$ Thlr.

Bachmann, P., Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig, Teubner. $2^1/_2$ Thlr.

Gegenbauer, L., Zur Theorie der Functionen X_n^m. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

——, Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. 2. Art. Wien, Gerold. $1^1/_2$ Ngr.

Kossak, E., Zur Theorie der elliptischen Transcendenten. Berlin, Nicolai. 6 Ngr.

Bauer, G., Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis. (Akad.) München, Franz. 7 Ngr.



Frischauf, J., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik. 2. Aufl. Graz, Leuschner & Lubensky. 24 Ngr.

Hirsch, M., Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 15. Aufl. Herausgegeben von H. Bertram. Berlin, C. Duncker. 1 Thlr.

Bardey, E., Methodisch geordnete Aufgabensammlung über alle Theile der Elementararithmetik. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 27 Ngr.

Joachimsthal, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung. Leipzig, Teubner.

Schulze, Ueber die kürzeste Linie auf einigen Flächen zweiten Grades. Döbeln, Schmidt. $^1/_3$ Thlr.

Schlegel, V., Untersuchungen über eine Fläche dritter Ordnung mittels der Grossmann'schen Ausdehnungstheorie. Berlin, Calvary. 12 Ngr.

Frischauf, J., Absolute Geometrie nach J. Bolyai. Leipzig, Teubner. $^2/_3$ Thlr.

Boymann, R., Lehrbuch der Mathematik. 1. Thl.: Geometrie der Ebene. 6. Aufl. Cöln u. Neuss, Schwann. $^2/_3$ Thlr.

Schrader, W., Lehrbuch der Planimetrie. 1. und 2. Abth. Halle, Schrödel & Simon. 1 Thlr.

Schlegel, V., System der Raumlehre. 1. Thl.: Geometrie. Leipzig, Teubner. $1^1/_3$ Thlr.

Diesterweg, A., Elementare Geometrie, 4. Aufl., und Commentar hierzu 2. Aufl. Frankfurt a/M., Hermann. 17 Ngr.

Lange, Th., Aufgaben aus der Elementargeometrie. 3 Hefte. Berlin, Bornträger. 1 Thlr.

Kommerell, F., Lehrbuch der Stereometrie. 2. Aufl. Tübingen, Laupp. 18 Ngr.

Brude, A., Das Zeichnen der Stereometrie. Stuttgart, Maier. 2 Thlr.

---, Stereoskopische Bilder aus der Stereometrie. Stuttgart, Maier. 1 Thlr.

Brandi, H., Mathematisches Uebungsbuch. 1. Thl. Münster, Russell. $17^1/_2$ Ngr.

Wittstein, Th., Lehrbuch der Elementarmathematik. 2. Bd., 1. Abth.: Ebene Trigonometrie. 3. Aufl. Hannover, Hahn. $^1/_2$ Thlr.

Klein, F., Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen, Deichert. $^1/_3$ Thlr.

Hoppe, R., *Systèmes de lignes et de surfaces égales, terminées par des rayons communs.* Berlin, Calvary. 8 Ngr.

Angewandte Mathematik.

Ofterdinger, F., Ein Manuscript Keppler's. Tübingen, Fues. 3 Ngr.

Jordan, W., Taschenbuch der praktischen Geometrie. Stuttgart, Metzler. 3 Thlr. 4 Ngr.

HELMERT, R., Die Uebergangscurven für Eisenbahngeleise. Aachen, Mayer. 28 Ngr.

BAUERNFEIND, C., Das bayerische Präcisions-Nivellement. 2. Mittheil. (Akad.) München, Franz. $^2/_3$ Thlr.

KLEIN, H., Die Principien der Mechanik, historisch und kritisch dargestellt. Leipzig, Teubner. 24 Ngr.

STRZELECKI, F., Theorie der Schwingungscurven. (Akad.) Wien, Gerold. $^2/_3$ Thlr.

HOPPE, R., Vibrationen eines Ringes in seiner Ebene. Berlin, Calvary. 8 Ngr.

STEFAN, J., Ueber die Eigenschaften der Schwingungen eines Systemes von Punkten. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

HOPPE, R., *Quelques cas de mouvement d'un point sur un corps en mouvement.* Berlin, Calvary. 8 Ngr.

WEISBACH, J., Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik. 5. Aufl. 5. und 6. Lfg. Braunschweig, Vieweg. $1^1/_3$ Thlr.

SCHRAMM, H., Die allgemeine Bewegung der Materie als Grundlage aller Naturerscheinungen. 2. Abth. Wien, Braumüller. 28 Ngr.

BOLTZMANN, L., Ueber das Wirkungsgesetz der Molecularkräfte. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

GRAEF, A., Handatlas des Himmels und der Erde. 5. Aufl. 1. Lfg. Weimar, Geograph. Institut. $^1/_3$ Thlr.

BIRNBAUM, H., Grundzüge der astronomischen Geographie. 2. Ausg. Leipzig, Hinrichs. 24 Ngr.

WEILER, A, Grundzüge einer neuen Störungstheorie und deren Anwendung auf die Theorie des Mondes. Leipzig, Engelmann. $3^2/_3$ Thlr.

WINNECKE, J., Bestimmung der Parallaxe des zweiten Argelander'schen Sterns aus Messungen am Heliometer der Sternwarte zu Bonn. Leipzig, Engelmann. $^2/_3$ Thlr.

Physik und Meteorologie.

BAUMHAUER, H., Die sogenannten allgemeinen Eigenschaften der Körper nach ihrem inneren Zusammenhange entwickelt. Hildesheim, Gerstenberg. $^1/_3$ Thlr.

ULE, O., und A. HUMMEL, Physikalische und chemische Untersuchungen. Leipzig, Fleischer. 2 Thlr.

FARADAY, M., Die verschiedenen Kräfte der Materie. Berlin, Oppenheim. $^2/_3$ Thlr.

KREMERS, P., Physikalisch-chemische Untersuchungen. 4. Heft. Wiesbaden, Limbarth. 12 Ngr.

HANKEL, W. G., Elektrische Untersuchungen. 10. Abhandl.: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Arragonits. Leipzig, Hirzel. $^2/_3$ Thlr.

WARMANN, Untersuchungen über das Wesen des Lichtes und der Farben. Leipzig, Fleischer. $2^2/_3$ Thlr.

LANG, V. v., Krystallographisch-optische Bestimmungen. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

KNOBLAUCH, H., Ueber den Durchgang der strahlenden Wärme durch geneigte diathermane Platten. Halle, Schmidt. 8 Ngr.

SEEBECK, A., Ueber die Interferenz des Schalles in Röhren. (Dissert.) Berlin, Calvary. $^1/_2$ Thlr.

VIERORDT, K., Die Anwendung des Spectralapparates zur Photometrie der Absorptionsspectren und zur quantitativen chemischen Analyse. Tübingen, Laupp. $2^1/_3$ Thlr.

DUB, J., Die Anwendung des Elektromagnetismus mit besonderer Rücksicht auf Telegraphie. 2. Aufl. 1. Lfg. Berlin, Springer. $1^3/_4$ Thlr.

FLEISCHER, S., Neue Bestimmungen der Brechungsexponenten der durchsichtigen flüssigen Medien des Auges. Jena, Deistung. $^1/_5$ Thlr.

OBERMAYER, A. v., Ueber das thermoelektrische Verhalten einiger Metalle beim Schmelzen. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

MOUSSON, A., Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. 2. Bd. 2. Aufl. Zürich, Schulthess. 2 Thlr.

REIS, P., Lehrbuch der Physik. 2. Aufl. 1. Lfg. Leipzig, Quandt & Händel. $^2/_3$ Thlr.

PICK, H., Vorschule der Physik. 2. Aufl. Wien, Gerold. 26 Ngr.

WÜLLNER, A., Lehrbuch der Experimentalphysik. 4. Bd. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. $4^1/_3$ Thlr.

MÜLLER, J., Grundriss der Physik und Meteorologie. 11. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 2 Thlr.

BALFOUR-STEWART, Kurzes Lehrbuch der Physik, bearbeitet von R. STRECKER. Braunschweig, Vieweg. $1^2/_3$ Thlr.

GANTZER, R., Leitfaden für den physikalischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Berlin, Weidmann. 1 Thlr.

SCHABUS, J., Grundzüge der Physik. 6. Aufl. Wien, Gerold. 2 Thlr. 16 Ngr.

BURBACH, O., Physikalische Aufgaben zur elementarmathematischen Behandlung. 2. Aufl. Gotha, Thienemann. 12 Ngr.

KIEPERT, H., Physikalische Wandkarten. No. 1 und 2. Berlin, D. Reimer. $3^1/_3$ Thlr.

HORNSTEIN, C., Ueber den Einfluss der Sonnenelektricität auf den Barometerstand. (Akad.) Wien, Gerold. 8 Ngr.

BRUHNS, C., Meteorologische Beobachtungen, angestellt auf der Leipziger Sternwarte in d. J. 1870 und 1871. Leipzig, Hinrichs. 1 Thlr.

WILD, H., *Études météorologiques.* Petersburg, Leipzig, Voss. 8 Ngr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Die vier Species. Von Dr. Otto Hesse, o. Professor am königl. Polytechnikum zu München. Leipzig, B. G. Teubner. 1871.

Der Verfasser hat sich leider nicht über den Zweck des kleinen, 35 Seiten gr. 8. einnehmenden Schriftchens ausgesprochen und deswegen fällt es schwer, ein Urtheil über dasselbe zu fällen. Während der überwiegend grössere Theil des Schriftchens (29 Seiten) nicht mehr als die vier Species mit den reellen rationalen Zahlen behandelt, sind doch da und dort Rechnungen angedeutet, die man nicht erwarten sollte; man vergleiche Seite 4 über die Umkehrung mathematischer Probleme, oder S. 5: „Es ist ein bekanntes Fundamentalproblem der Geometrie, „das Dreieck zu construiren, von welchem zwei Seiten und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel gegeben sind", worüber es bald darauf heisst: „Von welcher Grösse die drei Daten des Problems auch seien, das Problem kann immer gelöst werden, denn die Lösung desselben ist aufzufinden unter den Dreiecken, wenn man sich alle möglichen Dreiecke construirt denkt". Wie aber, wenn der gegebene Winkel grösser als 180° ist? Derartige Bemerkungen veranlassen den Recensenten, anzunehmen, dass das Publikum, für welches das Schriftchen bestimmt ist, weiter mathematisch gebildet vorausgesetzt wird, als dass es aus dem Schriftchen die vier Species erst erlernen sollte, und von diesem Gesichtspunkte aus mag es gestattet sein, das Schriftchen zu besprechen. Der Recensent muss zunächst gestehen, dsss er mit grosser Befriedigung gesehen hat, wie der Verfasser gewisse arithmetische Sätze einfach durch eine zweckmässige Definition gegeben hat, während anderwärts versucht worden ist, diese in Wirklichkeit nicht beweisbaren Sätze streng nachzuweisen; dies gilt z. B. über das Product zweier negativen Zahlen; andererseits möchte er aber auch manche wohlbegründete Einwürfe machen. So liess sich z. B. der geometrische Beweis für Satz 24, dass die Factoren eines Productes mit einander vertauscht werden können, ohne das Product selbst zu ändern, sehr einfach auf rein arithmetischem Wege dadurch lie-

fern, dass man von einem Product mit zwei gleichen Factoren ausging und dann den Satz erweiterte, indem man den Satz über die Multiplication eines Binoms mit hinzunahm, was freilich eine kleine Aenderung in der Anordnung des Stoffes nöthig gemacht hätte, aber wohl ausführbar war, da sich auch der Satz über die Multiplication eines Binoms recht wohl auf rein arithmetischem Wege gewinnen lässt, während auch er vom Verfasser auf geometrischem Wege hergeleitet wurde.

Ein weiterer bedenklicher Einwurf lässt sich gegen die Herleitung des Ausspruches machen, dass ein Bruch von der Form $\frac{0}{0}$ einen unbestimmten Werth hat, denn es geschieht die Herleitung durch Einführung einer stetig variablen Grösse x, die aber die elementare Arithmetik nicht kennen lehrt, denn offenbar müssen sich auf der reellen Zahlenlinie auch die Punkte finden, die die Werthe transscendenter Functionen darstellen, und diese Punkte durchläuft doch die stetig veriable Grösse x auch mit. Der in 66 gegebene Grundsatz: „Wenn zwei complexe Grössen einander gleich sind, so sind sowohl ihre reellen Theile einander gleich, als auch ihre imaginären Theile", lässt sich bequem als Folgerung des logischen Princips darstellen: wenn zwei disparate Grössen wechselweise zwei anderen disparaten Grössen gleich sind, so müssen die einzelnen Grössen unter sich gleich sein. Endlich möchten wir uns noch gegen die Bezeichnung sichtbare (und als Gegensatz dazu jedenfalls unsichtbare) Dreiecke wenden in der Bedeutung reelle Dreiecke, denn die Möglichkeit eines sichtbaren mathematischen Dreiecks kann kein Physiker zugeben. Uebrigens aber ist die Darstellung in dem Schriftchen klar, deutlich und zum Nachdenken anregend, weswegen es hier wohl zum Studium empfohlen werden kann.

Freiberg. TH. KÖTTERITZSCH.

Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Akademische Vorlesungen von Dr. PAUL BACHMANN, a.-o. Professor an der Universität Breslau. Leipzig, B. G. Teubner. 1872.

Der Aufforderung des Herrn Hofrath Schlömilch, das vorliegende Werk in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" näher zu besprechen, komme ich um so lieber nach, als ich das Erscheinen desselben mit aufrichtiger Freude begrüsst habe. Denn ein grosses und höchst interessantes Gebiet wird hier zum ersten Male in zweckmässiger Abgrenzung und lichtvoller Darstellung dem lernenden mathematischen Publikum leicht zugänglich gemacht, und zwar unter Voraussetzung von nur sehr mässigen Vorkenntnissen aus der Algebra und Zahlentheorie.

Die Lehre von der Kreistheilung, d. h. die Theorie der Gleichungen von der Form $x^m = 1$, wo m eine gegebene positive ganze Zahl bedeutet, ist, obwohl eine Menge interessanter Eigenschaften der Einheitswurzeln x

schon früher bekannt waren, doch erst durch Gauss auf ihre eigentlichen Principien zurückgeführt und dadurch der Ausgangspunkt für eine ganz neue Wissenschaft von unermesslicher Ausdehnung geworden. Die siebente Section der 1801 erschienenen „*Disquisitiones Arithmeticae*“, welche den Titel „*De aequationibus circuli sectiones definientibus*“ führt, enthält eine rein algebraische Methode, die obige Gleichung, deren Auflösung mittels der trigonometrischen Functionen längst bekannt war, auf andere Gleichungen von niedrigerem und zwar von möglichst niedrigem Grade zu reduciren. Hierbei tritt zum ersten Male der Begriff der Irreductibilität auf (Art. 341), welcher entscheidend für die ganze Richtung der späteren Algebra geworden ist; obgleich Gauss nur einen geringen Gebrauch von demselben macht (Art. 346), so zweifle ich doch nicht daran, dass dieses Grundprincip ihn auch bei der Entdeckung des Einzelnen geleitet und dass er nur der Kürze halber die synthetische Darstellung vorgezogen hat; namentlich lassen hierauf die gewichtigen Worte schliessen (Art. 365): „*omnique rigore demonstrare possumus, has aequationes elevatas nullo modo nec evitari nec ad inferiores reduci posse, etsi limites hujus operis hanc demonstrationem hic tradere non patiantur, quod tamen monendum esse duximus, ne quis adhuc alias sectiones praeter eas quas theoria nostra suggerit, e. g. in* 7, 11, 13, 19 *etc. partes, ad constructiones geometricas perducere speret, tempusque inutiliter terat*“. Die Wahrheit der in denselben enthaltenen Behauptung ist nach dem gegenwärtigen Stande der Algebra, namentlich seit der Fortbildung und Verallgemeinerung der Gauss'schen Gedanken durch Abel und Galois leicht zu beweisen. In der That ist aus dem von Gauss gelegten Keime eine Wissenschaft entstanden, welche man, um in einem Nichtkenner wenigstens eine dunkle Vorstellung von ihrem Charakter zu erwecken, vielleicht als die Wissenschaft von der algebraischen Verwandtschaft der Zahlen oder, wenn man sich eines von mir gewählten Ausdruckes bedienen will, als die Wissenschaft von der Verwandtschaft der Körper bezeichnen könnte. Es zeigt sich nämlich, dass die eigenthümliche Beschaffenheit einer Gleichung, die Möglichkeit, ihre Auflösung auf die von anderen Gleichungen zurückzuführen, erst dann deutlich erkannt werden kann, wenn man ausser ihren Wurzeln noch unendlich viele andere Zahlen betrachtet, welche aus einer oder mehreren von ihnen rational ableitbar sind und deren Inbegriff eben Das bildet, was ich einen Körper nenne, nämlich ein System von Zahlen, die sich durch die vier einfachsten, rationalen arithmetischen Operationen immer wieder reproduciren. Eigenschaften einer Gleichung werden bei dieser Auffassung zu Eigenschaften des entsprechenden Körpers, Beziehungen zwischen Gleichungen stellen sich dar als Verwandtschaft zwischen den Körpern; namentlich entsteht bei gegenseitiger Durchdringung zweier Körper A, B immer wieder ein Körper, ihr kleinstes gemeinschaftliches Multiplum oder kürzer ihr Product AB, dessen Natur wesentlich von der Verwandtschaft der beiden Körper abhängt.

Neben dieser Entwickelung der eigentlichen Algebra, welche der Theorie der Kreistheilung den ersten Impuls verdankt, und Hand in Hand mit ihr hat die Zahlentheorie einen grossartigen Aufschwung genommen. Die algebraischen Untersuchungen von Gauss im Gebiete der Kreistheilung bedurften schon einiger, wenn auch sehr elementarer Hilfssätze aus der Zahlentheorie; bald aber zeigte es sich, dass umgekehrt die Kreistheilung zu einer unerschöpflichen Quelle wurde, aus welcher immer neuer und bedeutender Gewinn für die Zahlentheorie ausströmte. Man kann sagen, dass fast alle späteren Fortschritte, welche die Zahlentheorie unter den Händen von Gauss, Jacobi, Dirichlet, Eisenstein, Kummer, Kronecker gemacht hat, entweder der Kreistheilung geradezu ihre Entstehung verdanken oder, was in einigen Fällen noch merkwürdiger war, in einen vorher ungeahnten Zusammenhang mit der Kreistheilung traten. Zu diesen letzteren Fortschritten gehören die Untersuchungen von Gauss und Dirichlet über die Classenzahl der quadratischen Formen, zu den ersteren die Erweiterung des Begriffes der ganzen Zahl durch Gauss, deren Verallgemeinerung später zu der Schöpfung der idealen Zahlen durch Kummer geführt hat.

Es ist nun zu verwundern, dass trotz der so eben kurz geschilderten Rolle, welche die Kreistheilung in der Geschichte der neueren Mathematik spielt, und trotz der grossen Berühmtheit, deren sie sich vor anderen, mindestens ebenso tiefsinnigen Schöpfungen von Gauss zu erfreuen hat — man denke nur an das Siebenzehneck —, es ist zu verwundern, dass trotzdem kein Lehrbuch erschienen ist, in welchem die Kreistheilung mit voller Berücksichtigung des theils von Gauss, theils von seinen Nachfolgern durchforschten Details als ein abgerundetes Ganzes dargestellt ist. Es ist daher ein höchst dankenswerthes Unternehmen des Verfassers, durch das vorliegende Werk diese empfindliche Lücke in unserer mathematischen Literatur auszufüllen, und ich freue mich, hinzufügen zu können, wofür allerdings schon sein Name hinreichende Bürgschaft leistet, dass er dieses Unternehmen in vortrefflicher Weise ausgeführt hat. Für Jeden, der ein tieferes Studium der Algebra und ihrer Beziehungen zur Zahlentheorie beabsichtigt, wird dieses Werk den besten Führer abgeben, weil es ihn ohne Voraussetzung grosser Vorkenntnisse in die Mitte eines überaus reichen und bisher nicht leicht zugänglichen Stoffes einführt, in welchem man durchaus orientirt sein muss, wenn man zu höheren Untersuchungen fortschreiten will.

Ich erlaube mir nun, im Folgenden eine Reihe von Bemerkungen mitzutheilen, zu welchen mich einzelne Stellen oder auch ganze Abschnitte des Werkes veranlasst haben. Wenn ich dabei einzelne Punkte hervorhebe, bei welchen ich eine andere Anordnung oder Darstellung als die vom Verfasser befolgte erwähne oder empfehle, so geschieht dies keineswegs, um Tadel auszusprechen; Jeder, der sich gründlich mit einem bestimmten

Gegenstande beschäftigt hat — und seit 18 Jahren habe ich mich diesem Theile der Mathematik mit besonderer Vorliebe zugewandt —, bildet sich gewisse, ihm eigenthümliche Gesichtspunkte aus, die er für besonders werthvoll hält, während sie einem Andern weniger wichtig erscheinen, und ich gebe zu, dass hierbei Vieles reine Geschmackssache ist. Aber ich benutze doch gern diese Gelegenheit, aus meiner langjährigen Beschäftigung mit diesem Gegenstande einige Mittheilungen über meine Ansichten und auch einige Abschweifungen auf verwandte Gegenstände zu machen, in der Hoffnung, dass sie einigen Lesern willkommen sein werden. Ich lasse sie hier ohne innere Verbindung so folgen, wie sie beim Durchlesen des Werkes entstanden sind, indem ich nur auf die betreffende Stelle verweise.

Vorlesung 3, Nr. 2 und 3, Seite 13. Der Nachweis der Existenz primitiver Einheitswurzeln würde, wie ich glaube, durch eine kleine Umstellung an Klarheit und Präcision gewinnen. Da nämlich $\psi(d)$ definirt wird als die Anzahl der n^{ten} Einheitswurzeln, welche zum Exponenten d gehören, so erscheint, ehe nicht das Gegentheil bewiesen ist, $\psi(d)$ als abhängig nicht blos von d, sondern möglicherweise auch von n, und die Anwendbarkeit des in der vorhergehenden Vorlesung bewiesenen Summensatzes zur Bestimmung von $\psi(d)$ bleibt Zweifeln unterworfen, welche erst nachträglich durch die Bemerkungen in Nr. 3 gehoben werden. Am einfachsten gestaltet sich wohl die Untersuchung, wenn der Begriff der primitiven Einheitswurzeln vorangestellt und $\psi(n)$ als die Anzahl der primitiven n^{ten} Einheitswurzeln definirt wird.

Vorlesung 4, Seite 20. In dieser Vorlesung werden die ersten Begriffe aus der sogenannten Theorie der höheren Congruenzen mitgetheilt. Eine etwas weiter gehende Darstellung, welche auch die wichtigsten Sätze über Primfunctionen enthielte, würde bei manchen späteren Gelegenheiten sich als sehr nützlich erweisen, namentlich für die 5., 17. und 18. Vorlesung; aber sie würde freilich auch viel mehr Raum erfordern. Der Beweis des Satzes von Schönemann (S. 26) lässt sich unter Voraussetzung des Fermat'schen Satzes durch die Theorie der Transformation der symmetrischen Functionen abkürzen, welche vom Verfasser doch an manchen Stellen (z. B. in Vorlesung 5, Nr. 4) als bekannt vorausgesetzt wird.

Vorlesung 5, Nr. 6 und 7. Die Mittheilung eines speciellen Falles des allgemeinen Irreductibilitätssatzes von Kronecker veranlasst mich, den eigentlichen Nerv seines Beweises (sowie auch desjenigen von Arndt) hier hervorzuheben; dies kann mit verhältnissmässiger Kürze geschehen, wenn man einige allgemeine Begriffe über ganze algebraische Zahlen und einige Sätze aus der Theorie der Ideale als bekannt voraussetzt, welche ich theils in der zweiten Auflage von Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie bewiesen, theils in den Göttinger „Gelehrten Anzeigen" (20. September 1871) ohne Beweis mitgetheilt habe. Bedeutet μ eine primitive m^{te}

Einheitswurzel, so kommt Alles auf den zahlentheoretischen Gehalt der Zahl $(1-\mu)$ an. Ist $m=1$, so ist $1-\mu=0$; ist aber m durch eine einzige Primzahl p theilbar, also eine Potenz derselben, so ist, wie unmittelbar einleuchtet:

$$p=\varepsilon\,(1-\mu)^{\varphi(m)},$$

wo ε eine Einheit und $\varphi(m)$ die bekannte Function der Zahlentheorie bedeutet; ist endlich m durch zwei oder mehrere verschiedene Primzahlen p, $q\ldots$ theilbar, so muss die Zahl $(1-\mu)$, weil sie in allen Zahlen von der Form $(1-\mu^n)$ aufgeht, wo n jede ganze positive Zahl bedeutet, zufolge des vorhergehenden Falles auch in p, in $q\ldots$ aufgehen und folglich eine Einheit sein, was auch unmittelbar aus der Gleichung geschlossen werden kann, welche alle primitiven m^{ten} Einheitswurzeln zu Wurzeln hat. Nun sei a eine Potenz einer Primzahl p, und $m=ab$, wo b durch p nicht theilbar ist; man erhält dann bekanntlich alle primitiven m^{ten} Einheitswurzeln und jede nur einmal, wenn man jede primitive Wurzel der Gleichung $x^a=1$ mit jeder primitiven Wurzel der Gleichung $x^b=1$ multiplicirt. Ist nun α eine bestimmte der ersteren, β eine bestimmte der letzteren, so lautet der noch etwas verschärfte Satz von Kronecker folgendermassen:

„Ist die Grundzahl oder Discriminante $\Delta(\Omega)$ eines Körpers Ω nicht theilbar durch die Primzahl p, so hat die in Ω irreductible Gleichung $f(x)=0$, welcher $x=\alpha\beta$ genügt, auch alle $\varphi(a)$ Producte $\alpha'\beta$ zu Wurzeln, welche den sämmtlichen $\varphi(a)$ primitiven Wurzeln α' der Gleichung $x^a=1$ entsprechen."

Der Beweis beruht auf folgenden Momenten. Alle Wurzeln μ der Gleichung $f(x)=\Pi(x-\mu)=0$ sind jedenfalls von der Form $\mu=\alpha'\beta'$, wo α', β' primitive Einheitswurzeln resp. vom Grade a, b bedeuten. So oft nun β' mit β identisch ist, wird $(\beta-\mu)=\beta\,(1-\alpha')$, also materiell, d. h. abgesehen von einem Einheitsfactor, $=(1-\alpha)$; ist dagegen β' von β verschieden, so wird $(\beta-\mu)=\beta\,(1-\alpha'\beta'')$, wo β'' eine von 1 verschiedene Wurzel der Gleichung $x^b=1$ bedeutet, also ist zufolge der vorausgeschickten Bemerkungen $(\beta-\mu)$ eine Einheit. Mithin ist

$$f(\beta)=\Pi\,(\beta-\mu)=\varepsilon'\,(1-\alpha)^n,$$

wo ε' eine Einheit und n die Anzahl der Wurzeln $\mu=\alpha'\beta'$ bedeutet, in welchen $\beta'=\beta$ ist; es wird daher $f(\beta)$ stets und nur dann durch

$$p=\varepsilon\,(1-\alpha)^{\varphi(a)}$$

theilbar sein, wenn $n=\varphi(a)$ ist, d. h. wenn wirklich alle $\varphi(a)$ Producte $\alpha'\beta$ Wurzeln derselben in Ω irreductiblen Gleichung $f(x)=0$ sind. Diese Theilbarkeit der Zahl $f(\beta)$ durch p lässt sich aber aus der Voraussetzung, dass die Grundzahl $\Delta(\Omega)$ des Körpers Ω nicht durch p theilbar ist, folgendermassen beweisen. Zunächst ist diese Voraussetzung identisch mit derjenigen, dass p durch kein Quadrat eines Primideals des Körpers Ω theilbar ist, und diese ist wiederum äquivalent mit der Annahme, dass unendlich viele solche Potenzen

$$s = p^f,\ p^{2f},\ p^{3f} \ldots$$

der Primzahl p existiren, für welche jede ganze Zahl w des Körpers Ω der Congruenz.

$$\omega^s \equiv \omega,\ (mod.\ p)$$

genügt. Da nun die Coefficienten der Function $f(x)$ solche ganze Zahlen ω sind, so folgt

$$f(\beta)^s \equiv f(\beta^s),\ (mod.\ p);$$

wählt man ferner, was immer möglich ist, die Potenz s der Primzahl p so, dass $s \equiv 1\,(mod.\ b)$, also $\beta^s = \beta$, und zugleich $s \geqq \varphi(a)$ wird, und bedenkt, dass $f(\beta)$ den Factor $(1 - \alpha)$ wenigstens einmal enthält, also $f(\beta)^s$ durch p theilbar ist, so ergiebt sich, dass auch $f(\beta) \equiv 0,\ (mod.\ p)$ ist, wie zu beweisen war.

Durch wiederholte Anwendung dieses Resultates ergiebt sich offenbar der folgende Satz, welcher nur noch wenig allgemeiner als der von Kronecker ist:

„Ist m relative Primzahl zu der Grundzahl $\Delta(\Omega)$ des Körpers Ω, so ist die Gleichung, deren Wurzeln die sämmtlichen primitiven m^{ten} Einheitswurzeln sind, irreductibel in Ω."

Vorlesung 6, Seite 43. In dieser Vorlesung beginnt die eigentliche Theorie der Kreistheilung, deren Wesen in der Zurückführung der Gleichung

$$X = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0,$$

wo p eine Primzahl bedeutet, auf Gleichungen niedrigeren Grades besteht. Ich erlaube mir hier einige allgemeine Bemerkungen über die Vertheilung des Stoffes und über die Methode der Untersuchung zu machen.

Die Darstellung von Gauss zerfällt in zwei wesentlich verschiedene Theile, deren erster (Art. 342—358) die successive Zerlegung des Systems aller $(p - 1)$ Wurzeln r^k der obigen Gleichung in sogenannte Perioden und die Aufstellung der ihnen entsprechenden Gleichungen enthält, während der zweite Theil die Zurückführung derselben auf reine Gleichungen, d. h. ihre Auflösung durch Wurzelzeichen behandelt. Diese scharfe Sonderung halte ich für äusserst zweckmässig. Der erste Theil hat es nur mit den durch r rational darstellbaren Zahlen zu thun, welche einen Körper R vom Grade $(p - 1)$ bilden, und er ist, wenn dies auch in der Darstellung von Gauss nicht hervortritt, wesentlich unabhängig von der Existenz primitiver Congruenzwurzeln. Der zweite Theil dagegen bedarf der Betrachtung der letzteren und ausserdem der Einführung eines Hilfskörpers S vom Grade $\varphi(p - 1)$, welcher aus den Wurzeln der Gleichung $x^{p-1} = 1$ gebildet ist; der eigentliche Gegenstand der Untersuchung ist das Product RS aus beiden Körpern R und S, welches zugleich der aus den Wurzeln der Gleichung $x^{p(p-1)} = 1$ gebildete Körper vom Grade $(p - 1)\,\varphi(p - 1)$ ist. Dieser wesentliche Unterschied zwischen den beiden genannten Theilen würde es

mir vortheilhafter erscheinen lassen, wenn der Verfasser den Hauptinhalt der Vorlesungen von 9, 15, 16, 17, 18 gleich auf die siebente hätte folgen lassen.

Was ferner die Methode der Entwickelung anbetrifft, so ist nicht zu leugnen, dass in der synthetischen Darstellung von Gauss das Streben nach Kürze den Sieg über die Forderung davongetragen hat, Alles aus einem einheitlichen algebraischen Gedanken abzuleiten. Bei meinem ersten gründlichen Studium der Kreistheilung in den Pfingstferien 1855 hatte ich, obgleich ich das Einzelne wohl verstand, doch lange zu kämpfen, bis ich in der Irreductibilität das Princip erkannte, an welches ich nur einfache, naturgemässe Fragen zu richten brauchte, um zu allen Einzelnheiten mit Nothwendigkeit getrieben zu werden. Nachdem diese Gedanken durch eine eingehende Beschäftigung mit den algebraischen Untersuchungen von Abel und namentlich von Galois vervollständigt und durch die im Anfang December desselben Jahres gelungene Auffindung der allgemeinsten Beziehungen zwischen irgend zwei irreductiblen Gleichungen zu einem gewissen Abschluss gekommen waren, habe ich später in meinen beiden Wintervorlesungen über Kreistheilung und höhere Algebra 1856—1858 die damals gewonnene Methode befolgt, und ich glaube noch heute, dass sie auch für den Lernenden zweckmässig ist. Statt, wie es der Verfasser mit Gauss thut, unmittelbar von den Perioden auszugehen, stelle man die Frage nach der Anzahl der verschiedenen conjugirten Werthe, welche eine in R enthaltene, d. h. durch r rational darstellbare Zahl $\alpha = F(r)$ besitzt, und welche entstehen, wenn r durch alle $(p-1)$ Wurzeln r^k der irreductiblen Gleichung $X=0$ ersetzt wird. Bezeichnet man mit h alle diejenigen f incongruenten Zahlen $(mod.\, p)$, für welche $F(r^h) = F(r)$ ist, so folgt aus der Irreductibilität sofort, dass diese Zahlen h sich durch Multiplication reproduciren, und hieraus weiter, dass sie die sämmtlichen Wurzeln der Congruenz $h^f \equiv 1\ (mod.\, \beta)$ bilden, dass f ein Divisor von $(p-1) = ef$, und dass e die Anzahl der wirklich verschiedenen Werthe $F(r^k)$ ist, deren jeder sich $f$mal wiederholt; die sämmtlichen $(p-1)$ Exponenten k zerfallen nämlich in e Complexe von je f Exponenten hn, denen jedesmal der eine Werth $F(r^n)$ entspricht. Fragt man nach der wirklichen Existenz solcher e-werthigen Zahlen $\alpha = F(r)$, so ergiebt sich aus der Bedingung $F(r) = F(r^h)$, dass die rationalen Coefficienten oder Coordinaten a in der Darstellungsform $\alpha = F(r) = \Sigma a r^k$, auf welche jede in R enthaltene Zahl stets und wegen der Irreductibilität auch nur auf eine Weise gebracht werden kann, gruppenweise zu je f einander gleich sein müssen, dass nämlich

$$\alpha = a\eta + a_1\eta_1 + \ldots + a_{e-1}\eta_{e-1}$$

sein muss, wo jede der e Grössen $\eta, \eta_1 \ldots \eta_{e-1}$ eine sogenannte Periode, d. h. eine Summe von f Gliedern r^{hn} bedeutet. Soll eine solche Zahl α wirklich e-werthig sein, so brauchen nur fernere gruppenweise Gleichheiten zwischen den e rationalen Zahlen $a, a_1 \ldots a_{e-1}$ ausgeschlossen zu wer-

den; mithin sind die Perioden selbst solche e-werthige und zwar conjugirte Zahlen. Es ergiebt sich dann sofort, dass jede e-werthige Zahl α die Wurzel einer irreduciblen Gleichung e^{ten} Grades ist und dass jedė Zahl $\beta = f(r)$, welche den Bedingungen $f(r) = f(r^h)$ genügt, auch ohne e-werthig zu sein, durch α rational darstellbar ist, dass also alle solche Zahlen β einen Körper R_e vom Grade e bilden, welcher durch e vollständig bestimmt ist. Das allgemeinste Resultat, in welchem der ganze erste Theil der Kreistheilung enthalten und welches auf dieselbe Weise leicht abzuleiten ist, besteht in Folgendem. Ist a eine e-werthige, a' eine e'-werthige Zahl, und e'' der grösste gemeinschaftliche Theiler von e und $e' = d'e''$, so genügt α' einer in R_e irreductiblen Gleichung vom Grade d'. Dasselbe kann auch so ausgesprochen werden: Das Product der Körper R_e und $R_{e'}$ ist der Körper $R_{e'''}$, wo e''' das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von e, e' bedeutet; und $R_{e''}$ ist ihr grösster gemeinschaftlicher Divisor. Es bildet nur einen speciellen Fall des oben erwähnten allgemeinen Gesetzes, welches wenigstens theilweise durch die Gleichung

$$(BC, A) = (C, AB)\,(B, A)$$

ausgedrückt werden kann, wo A, B, C irgend drei Körper sind, und das Symbol (B, A) die Anzahl der in B enthaltenen Zahlen bedeutet, welche in Bezug auf A unabhängig sind.

In dem zweiten Theile der Kreistheilung wird die Frage aufgeworfen, ob die im ersten Theile betrachteten irreductiblen Gleichungen durch Wurzelzeichen lösbar, d. h. auf reine Gleichungen zurückführbar sind. Dieselbe drängt mit Nothwendigkeit zur Einführung des Körpers S, und nachdem die Irreductibilität der Gleichung $X = 0$ in Bezug auf S erkannt ist, leuchtet sofort ein, dass die Sätze des ersten Theiles auf das neue Gebiet unmittelbar übertragen werden können. Fragt man nun nach solchen Zahlen, welche reinen Gleichungen genügen, so wird man auf dieselbe Weise zu allen Resolventen und der Benutzung der primitiven Congruenzwurzeln getrieben, wie im ersten Theile zu den Perioden, und alles Detail ergiebt sich mit grösster Leichtigkeit.

Der im Vorstehenden beschriebene Weg ist vom Verfasser nur theilweise befolgt; aber ich glaube, dass die Klarlegung der algebraischen Principien an dem klassischen und zugleich einfachsten Beispiele der Kreistheilung eine sehr nützliche Vorbereitung für das tiefere Studium der Algebra bildet.

Vorlesung 9, Nr. 4. Die Methode von Kronecker zur Bestimmung des Vorzeichens $\varepsilon = \pm 1$ in der Gleichung

$$\varepsilon\, \Pi\,(x^{2h-1} - x^{p-2h+1}) = \Sigma \left(\frac{k}{p}\right) x^k + (x^p - 1)\, f(x)$$

lässt sich abkürzen, wenn man durch $(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$ dividirt und dann $x = 1$ setzt.

Vorlesung 14. Nachdem die Reciprocitätssätze für cubische und biquadratische Reste in den Theorien der complexen Zahlen bewiesen sind, ist es von Interesse, zu der Theorie der rationalen Zahlen zurückzukehren. Obgleich dieser Gegenstand seiner Natur nach nicht in das vorliegende Werk gehört, so erlaube ich mir doch, hier aus einer grösseren Arbeit über beliebige cubische Körper, an deren Vollendung und Veröffentlichung ich für jetzt durch Amtsgeschäfte gehindert werde, Folgendes mitzutheilen. Bedeutet k eine ganze rationale Zahl, deren Cubikwurzel irrational ist, so entspringt aus der Gleichung $x^3 = k$ ein reiner cubischer Körper, dessen Grundzahl die Form $D = -3g^2$ hat, wo g eine aus k leicht abzuleitende ganze Zahl ist. Fragt man nun nach allen in k nicht aufgehenden Primzahlen p von der Form $3n+1$, von welchen die gegebene Zahl k cubischer Rest ist, so gelangt man mit Hilfe des Reciprocitätssatzes zu folgendem interessanten Resultat, welches im Wesentlichen schon Gauss bekannt gewesen ist: die sämmtlichen nicht äquivalenten, ursprünglichen positiven quadratischen Formen $ax^2 + bxy + cy^2$, in welchen $b^2 - 4ac = D$, zerfallen in drei Abtheilungen von gleich vielen Individuen, deren erste eine Gruppe bildet, durch deren Formen alle und nur solche Primzahlen p dargestellt werden, von welchen k cubischer Rest ist. Mit Hilfe desselben wird die Bestimmung der Anzahl der Idealclassen des cubischen Körpers auf einen bekannten Theil der Theorie der Thetafunctionen zurückgeführt.

Vorlesung 17 und 18. Bei der Begründung der Theorie der idealen Zahlen in der Kreistheilung folgt der Verfasser dem von Kummer eingeschlagenen Wege. Der Versuch, einige Zweifel an der Strenge der ersten, später vervollständigten Darstellung von Kummer zu überwinden, führte mich zuerst im Winter 1855/56 auf die Theorie der höheren Congruenzen, insbesondere auf die Zerlegung der Function $(x^m - 1)$ in Primfunctionen in Bezug auf beliebige Primzahlmoduln. Diese Sätze, welche übrigens, wenn ich nicht irre, zuerst von Schönemann veröffentlicht sind und welche sich auch in dem Nachlasse von Gauss vorgefunden haben, gestatten, wie mir scheint, eine einfachere Begründung von Kummer's genialer Theorie. Behält X die frühere Bedeutung und ist q eine von p verschiedene Primzahl, welche $(mod.\,p)$ zum Divisor f von $(p-1) = ef$ gehört, so ist

$$X \equiv Q_0 Q_1 \ldots Q_{e-1}, (mod.\,q),$$

wo die e Functionen q Primfunctionen vom Grade f bedeuten. Bezeichnet man mit h wieder die sämmtlichen f in Bezug auf p incongruenten Zahlen $1, q, q^2 \ldots q^{f-1}$, welche die Wurzeln der Congruenz $h^f \equiv 1\ (mod.\,p)$ bilden, und sind Q, Q' irgend zwei der e Primfunctionen, so hat die Congruenz

$$Q(y) \equiv 0, (modd.\,q, Q')$$

jedesmal f incongruente Wurzeln $y \equiv x^{hn}$. Setzt man nun die e Functionen

$$Q \equiv x^f - ux^{f-1} + \ldots, (mod.\,q),$$

so ergiebt sich hieraus beiläufig

$$\Pi(x-\eta) = F(x) \equiv \Pi(x-u), (mod. q),$$

wo $F(x)$ die Function vom Grade e bedeutet, welche für die e Perioden η von f Gliedern verschwindet; doch ist dies keineswegs erforderlich für die weitere Begründung. Die e Zahlen, welche der Verfasser mit ψ bezeichnet, können nämlich dem Erfolge nach vollständig ersetzt werden durch die e Zahlen, welche aus dem Producte

$$Q_0(r)\, Q_1(r) \ldots Q_{e-1}(r) = q f(r)$$

durch Weglassung je eines der e Factoren $Q(r)$ hervorgehen. Die Beweisführung, namentlich bei den Sätzen über die Potenzen der idealen Primzahlen, wird vereinfacht, wenn man, was stets möglich ist, die e Functionen Q so wählt, dass $f(r)$ relative Primzahl zu q, d. h. dass $f(x)$ relative Primfunction zu $X, (mod. q)$ wird; statt dessen kann man aber auch die Zerlegung der Function X in e Factoren in Bezug auf beliebig hohe Potenzen von q benutzen. Hierbei bemerke ich, dass die vom Verfasser (auf S. 262) gegebene Definition der Potenzen der idealen Primzahlen einen kleinen, leicht zu beseitigenden Zweifel übrig lässt, insofern nicht bewiesen wird, dass eine Zahl, welche einen Primfactor m mal enthält, ihn gewiss auch $(m-1)$-mal enthalten muss; so lange dies nämlich nicht geschehen ist, beibt es z. B. denkbar, dass eine Zahl einen Primfactor genau sechsmal und zugleich auch genau achtmal enthält.

Eine ähnliche zweifelhafte Stelle findet sich auch in der allgemeinen Theorie der Ideale, welche ich in der zweiten Auflage von Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie vorgetragen habe; die Behauptung, dass der Begriff der Potenzen eines Primideals von der zufälligen Definition des letzteren ganz unabhängig ist (§ 163, 4), ist nicht gehörig begründet, aber sie kann leicht durch die unmittelbar darauf folgenden Sätze bewiesen werden. Die ganze Darstellung lässt sich durch einige Umstellungen bedeutend vereinfachen, und eine noch grössere Vereinfachung wird vermuthlich Solchen gelingen, die unbefangen mit frischen Kräften an den Stoff herantreten. Immerhin glaube ich durch diese Theorie, deren Herstellung mich eine mehrjährige unbeschreibliche Anstrengung gekostet hat, etwas Nützliches erreicht zu haben. Ich bin zwar weit davon entfernt, ihren Werth mit demjenigen des ersten schöpferischen Gedankens von Kummer vergleichen zu wollen; aber abgesehen von der ästhetischen Befriedigung, welche die Erkenntniss gewährt, dass dieselben einfachen Gesetze, nach welchen in der rationalen Zahlentheorie die Zahlen aus Primzahlen zusammengesetzt werden, in der Theorie der Ideale jedes Körpers wiederkehren, hat die Gewissheit der allgemeinen Theorie den grossen praktischen Vortheil zur Folge, dass man nicht in jedem speciellen Falle immer wieder die ersten Grundlagen aufzusuchen braucht und dass die Auffindung der speciellen Gesetze ganz ausserordentlich erleichtert wird. Wie gross dieser

Nutzen ist, erkennt man recht deutlich in dem vorliegenden Falle der Kreistheilung; die Natur aller hier auftretenden Ideale ergiebt sich nämlich — wovon man sich leicht überzeugen wird — mit wenigen Federstrichen aus der einzigen Bemerkung, dass die p Zahlen $1, r, r^2 \dots r^{p-1}$ in Bezug auf jedes in p nicht aufgehende Primideal gewiss incongruent sind, weil ihre Differenzen sämmtlich in der Zahl p aufgehen.

Ich schliesse meine schon zu ausführlichen Bemerkungen über das vorliegende Werk, indem ich dasselbe nochmals Allen, welche eine gründliche und vielseitige Kenntniss der Kreistheilung und ihrer Beziehungen zur Zahlentheorie erwerben wollen, auf das Wärmste zum Studium anempfehle und dem geehrten Verfasser meinen Dank für die Veröffentlichung dieser seiner Vorlesungen ausspreche.

Braunschweig, 1. Februar 1873. R. DEDEKIND.

Bibliographie

vom 1. Januar bis 31. Mai 1873.

Periodische Schriften.

Monatsbericht der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften. 1873. 1. Heft. Berlin, Dümmler. pro compl. 4 Thlr.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 17. Bd.: aus dem Jahre 1872. Göttingen, Dieterich. 8 Thlr.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physikalische Classe. 1872. Heft 3. Leipzig, Hirzel. ⅓ Thlr.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von A. Auwers und A. Winnecke. 7. Jahrg. 4. Heft und 8. Jahrg. 1. Heft. Leipzig, Engelmann. à ½ Thlr.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, redigirt von C. Jelinek und J. Hann. 8. Bd. Jahrg. 1873, Nr. 1. Wien, Braumüller. pro compl. 2⅔ Thlr.

Mathematische Annalen, herausgeg. von C. Neumann. VI. Bd., 1. Heft. Leipzig, Teubner. pro compl. 5⅓ Thlr.

Archiv für Mathematik und Physik, begründet von A. Grunert, fortgesetzt von Hoppe. 55. Thl., Heft 1. Greifswald, Koch. pro compl. 3½ Thlr.

Journal für reine und angewandte Mathematik, begründet von Crelle, fortges. von W. Borchardt. 76. Bd., Heft 1. Berlin, G. Reimer. pro compl. 4 Thlr.

Astronomische Nachrichten, herausgeg. von Peters. 81. Bd., Nr. 1—3. Hamburg, Mauke Söhne. pro compl. 5 Thlr.

Astronomisches Jahrbuch für 1874, herausgeg. von W. Förster und Powalky. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Dasselbe für 1875. Ebendas. 4 Thlr.

Bremiker, C., Nautisches Jahrbuch für das Jahr 1875. Berlin, G. Reimer. ½ Thlr.

Fortschritte der Physik im Jahre 1869. 25. Jahrg., redig. v. L. Schwalbe. 1. Abth. Berlin, G. Reimer. 2⅔ Thlr.

Repertorium für Experimentalphysik, physikal. Technik und Instrumentenkunde. Herausgeg. von Ph. Carl. 9. Bd., 1. Heft. München, Oldenbourg. pro compl. $6^2/_5$ Thlr.

Annalen des physikalischen Centralobservatoriums zu Petersburg, herausgegeben von H. Wild. Jahrg. 1870 und 1871. Leipzig, H. Voss. à 6 Thlr. 8 Ngr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. Metzger. 22. Jahrg., 1. Heft: Januar bis Juni 1872. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 7 Ngr.

Mémoires de l'Académie imp. des sciences de St. Petersburg. VII. série: tome XVIII No. 10. Leipzig, Voss. 22 Ngr.

Annuario marittimo per l'anno 1873. 23. *annata.* Triest, literar.-artist. Anstalt. 3 Thlr.

Reine Mathematik.

Suter, H., Geschichte der mathematischen Wissenschaften. 1. Theil 2. Aufl. Zürich, Orell, Füssli & Comp. 2⅔ Thlr.

Thomae, J., Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. 2. Aufl. Halle, Nebert. 1¾ Thlr.

Matthiessen, L., Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben etc. von Heis. 2 Bde. Cöln, Du Mont-Schauberg. 4⅓ Thlr.

Schleusing, R., Beitrag zur Integralrechnung. Berlin, Weidmann. 2⅔ Thlr.

Dötsch, G., Ueber die hyperbolischen Functionen. Neue Ausgabe. Nürnberg, Ebner. ⅕ Thlr.

Albrich, C., Logarithmisch-trigonometrische Rechentafeln, mit Lineal und Anleitung. Hermannstadt, Michaelis. 3 Thlr.

Schrön, L., Siebenstellige Logarithmen. 12. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 1¼ Thlr.

Westermann, H., Die Elementarmathematik. 1. Fragment: Einleitung in die Algebra. Mitau, Behre. ⅛ Thlr.

Helmes, F., Die Elementarmathematik. 1. Thl., 1. Abth. 2. Aufl. Hannover, Hahn. 28 Ngr.

Stumpf, C., Ueber den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung. Leipzig, Hirzel. 2¼ Thlr.

Gerlach, H., Lehrbuch der Mathematik. 2. Theil: Planimetrie. 3. Aufl. Dessau, Reissner. 12½ Ngr.

Adam, W., Geometrische Analysis und Synthesis. Potsdam, Stein. 1⅛ Thlr.

Moshammer, K., Constructive Geometrie in der Ebene. Wien, Seidel & Sohn. 16 Ngr.

Thomae, J., Ebene geometrische Gebilde erster und zweiter Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage. Halle, Nebert. ¾ Thlr.

Pflanz, J., Handbuch der Geometrie. 1. Abth. Leipzig, Pönicke's Schulbuchhandlung. ⅓ Thlr.

Job, M., Lehrbuch der Planimetrie. 2. Aufl. Dresden, Adler. 1⅙ Thlr.

Hellwig, C., Die Tetraedrometrie und Trigonometrie. Erfurt, Villaret. ⅙ Thlr.

CONRADT, J., Ueber die Relation zwischen den Entfernungen einer beweglichen Ebene von vier Punkten. (Progr.) Colberg, Post. ¼ Thlr.

FELD, A. und SERF, Leitfaden für den geometrischen Unterricht. 2. Aufl. Mainz, Kunze. 12 Ngr.

GANDTNER, O., Die Elemente der analytischen Geometrie. 3. Aufl. Leipzig, Siegismund & Volkening. ⅓ Thlr.

GRUHL, E., Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Bd.: Anal. Geometrie der Ebene. Berlin, Weidmann. 1⅔ Thlr.

STAHL, H., Ueber die Maassfunctionen der analytischen Geometrie. Berlin, Calvary. 12 Ngr.

Angewandte Mathematik.

LEROY, C., Die darstellende Geometrie. Deutsch von F. KAUFMANN. Stuttgart, Bach & Kitzinger. 4⅔ Thlr.

VOLTZ, C., Leitfaden für das elementare Linearzeichnen. Nördlingen, Beck. 26 Ngr.

GRETSCHEL, H., Lehrbuch der Kartenprojection. Weimar, Voigt. 2⅓ Thlr.

VOGLER, CHR., Ueber Ziele und Hilfsmittel geometrischer Präcisionsnivellements. München, literar.-artist. Anstalt. 1 Thlr.

LISTING, B., Ueber unsere jetzige Kenntniss der Grösse und Gestalt der Erde. Göttingen, Dieterich. 8 Ngr.

RITTER, A., Lehrbuch der analytischen Mechanik. Hannover, Rümpler. 2⅔ Thlr.

WANGERIN, A., Ueber das Problem des Gleichgewichts elastischer Rotationskörper. Berlin, Mitscher & Rössell. 12 Ngr.

BENDER, C., Verschiedene Methoden zur Berechnung der Anziehung von Kreislinien und Kugelschalen, nebst einigen Sätzen über das Potential. Nördlingen, Beck. 24 Ngr.

LOEWE, F., Alte und neue Versuche über Reibung und Cohäsion von Erdarten. München, Oldenbourg. ⅔ Thlr.

LAMPE, H., Allgemeine Bemerkungen über die Bewegung des Wassers in Röhren. Danzig, Anhuth. 24 Ngr.

MÄDLER, J., Geschichte der Himmelskunde. 1. Bd., 8. bis 15. Lief. Braunschweig, Westermann. à ⅔ Thlr.

NYRÉN, M., Bestimmung der Nutation der Erdaxe. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 18 Ngr.

ASTEN, E. v., Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Cometen. I. Berechnung eines wichtigen Theiles der absoluten Jupiterstörungen des Encke'schen Cometen. (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 22 Ngr.

SCHÄFER, H., Die astronomische Geographie der Griechen bis auf Eratosthenes. Berlin, Calvary. 16 Ngr.

CURTZE, M., Ueber eine neue Copernicus-Handschrift. Berlin, Calvary. ⅙ Thlr.

Prowe, L., Monumenta Copernicana. Berlin, Weidmann. 1⅓ Thlr.

Struve, O., Tabulae quantitatum Besselianum pro annis 1875 *ad* 1879 *computatae.* (Petersb. Akad.) Leipzig, Voss. 12 Ngr.

Plantamour et Hirsch, Détermination télégraphique de la différence de longitude entre des stations suisses. Basel, Georg. 4 Ngr.

Dwelshauvers-Dery, V., Principes de la résistance des matériaux. Brüssel, Muquardt. 1⅚ Thlr.

Physik.

Reis, P., Lehrbuch der Physik. 2. Aufl. 2. Lief. Leipzig, Quandt & Händel. ⅚ Thlr.

Lang, V. v., Einleitung in die theoretische Physik. 3. Heft. Braunschweig, Vieweg. 1⅕ Thlr.

Münch, P., Lehrbuch der Physik. 2. Aufl. Freiburg, Herder. 1⅓ Thlr.

Heussi, J., Materialien zur Uebung und Wiederholung des physikalischen Unterrichts. 1. Theil: Aufgaben; 2. Auflage. 2. Theil: Auflösungen. Leipzig, Frohberg. 17 Ngr.

Beetz, W., Leitfaden der Physik. 4. Aüfl. Berlin, Nauck. 1 Thlr.

Emsmann, H., Physikalische Aufgaben etc. 3. Aufl. Leipzig, O. Wigand. 1⅕ Thlr.

Cornelius, C., Grundriss der physikalischen Geographie. 4. Aufl. Halle, Schmidt. ⅚ Thlr.

Pfeilsticker, A., Das Kinetsystem oder die Elimination des Kraftbegriffs aus der Molecularphysik. Stuttgart, Kirn. 1 Thlr.

Roscoe, H.. Die Spectralanalyse. Deutsch von C. Schorlemmer. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 3 Thlr.

Puschl, C., Ueber den Zusammenhang zwischen Absorption und Brechung des Lichts. (Akad.) Wien, Gerold. 1½ Ngr.

Mach, E. und A. Fischer, Die Reflexion und Brechung des Schalles. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

Mach, E., Ueber die stroboskopische Bestimmung der Tonhöhe. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

Boltzmann, L., Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmoleculen. (Akad.) Wien, Gerold. 16 Ngr.

Dub, J., Die Anwendung des Elektromagnetismus besonders auf Telegraphie. 2. Aufl. 2. u. 3. Lief. Berlin, Springer. à 1¾ Thlr.

Kayser, J., Physik des Meeres. Paderborn, Schöningh. 1⅗ Thlr.

Bericht über die Meteorologenversammlung zu Leipzig. Leipzig, Engelmann. ⅚ Thlr.

Pilár, G., Die Excentricität der Erdbahn als Ursache der Eiszeit. Agram, Suppan. 8 Ngr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Einleitung in die Lehre von den Determinanten, von K. HATTENDORFF. Hannover, Schmorl und Seefeld. 1872.

Das kleine, nur 60 Seiten 8°. umfassende Werkchen verfolgt den Zweck, Diejenigen, welche neu an das Studium der Determinanten herantreten, so weit in diese Theorie zu führen, dass sie sich später von selbst in den grösseren Werken über Determinanten, z. B. dem von Baltzer oder in den Originalarbeiten zurecht finden können. War schon in dem den gleichen Stoff mit gleicher Absicht behandelnden Werkchen von Hesse: „Die Determinanten, elementar behandelt", ein Wegweiser für Abfassung einer elementarer gehaltenen Determinantentheorie vorhanden, so müssen wir doch recht sehr dem Urtheile des Verfassers bestimmen, wenn er von dem Hesse-schen Werkchen in der Vorrede S. IV sagt: „Ich glaube, dass der Verfasser sein Publikum überschätzt." In der That hat der Lehrer für Mathematik in den oberen Classen von Mittelschulen oder an Akademien am Anfange den Schwerpunkt seines Wirkens dahin zu verlegen, dass er dem zuhörenden Publikum Interesse für den behandelten Gegenstand abgewinne; dies Letztere kann aber vornehmlich mit dadurch geschehen, dass einmal der Hörende nicht von Anfang an mit vielen strengen Definitionen und Begriffen so zu sagen überschüttet wird, und dann dadurch, dass der Hörende immer weiss, zu welchem praktischen Zwecke eine längere, schärfere mathematische Untersuchung vorgenommen wird. Berücksichtigen wir dies, so möchten wir von dem vorliegenden Hattendorff'schen Werkchen sagen, dass es aus der Lehrpraxis hervorgegangen ist und dass gerade darin sein eigentlicher und grosser Werth bestehe. Wir müssen es hierbei ganz besonders billigen, dass das Werkchen eine grössere Anzahl theils vollständig gelöster, theils nur angegebener Aufgaben enthält, die systematisch in den Lehrstoff eingeflochten, dem Lernenden eine um so grössere Sicherheit im Anwenden der vorher vernommenen strengen Theoreme verschaffen und ihn mit der weitgehenden Bedeutung derselben um so vertrauter machen. Der Inhalt

ist derartig angeordnet, dass auf den ersten 29 Seiten allgemeine Eigenschaften der Determinanten überhaupt dargelegt werden. Auf den Seiten 30 bis 42 werden die gewonnenen Eigenschaften der Determinanten angewendet auf homogene lineare Functionen und auf die Auflösung gegebener Systeme von Gleichungen ersten Grades. Der folgende Abschnitt auf den Seiten 43 bis 52 handelt von der Multiplication der Determinanten und endlich der letzte Abschnitt auf den Seiten 53 bis 60 von den adjungirten Systemen. Es versteht sich von selbst, dass das Werkchen nur das Wesentlichste und Einfachere der einschlagenden Theorien berücksichtigen konnte, ein Umstand, den wir nicht zum Nachtheil, sondern vielmehr zum Vortheil des Werkchens in Anschlag bringen möchten. Die oben genannten Vorzüge des Hattendorff'schen Werkchens berechtigen uns zu der Hoffnung, dass dieses Werkchen den Studirenden von ganz besonderem Nutzen sein werde.

Freiberg, den 2. October 1872. TH. KÖTTERITZSCH.

Die Gestalten der Flüssigkeit. Die Symmetrie. Zwei populäre Vorträge, gehalten im deutschen Casino zu Prag im Winter 1868 und 1871 von E. MACH. Prag 1872, J. G. Calve'sche k. k. Univ.-Buchhandlung (Ottomar Beyer).

„*Et prodesse volunt et delectare poetae.*" Dieser altberühmte Spruch fiel uns ein, als wir das kurze, nur 33 Seiten gr. 8⁰. enthaltende, aber vorzüglich ausgestattete Schriftchen Mach's durchlasen. Der erste Theil des Schriftchens handelt namentlich von den Plateau'schen Gleichgewichtsfiguren, der zweite von den Gesetzen der Symmetrie und den Gründen für ihr angenehmes Wirken auf die Sinneswerkzeuge. Mach hat es hier herrlich verstanden, selbst anscheinend schwierigere Gebiete auch für ein weniger mathematisch geschultes Publikum verständlich zu machen. In geistreicher, leicht verständlicher Sprache weiss er die Hauptsachen des zu behandelnden Stoffes so darzustellen, dass der Eingeweihte durch die witzigen und launigen Einfälle und vielsagenden Streiflichter sich angenehm berührt fühlt, während der neu an die behandelten Gebiete Herantretende erstaunt, sich so überraschend schnell und angenehm in physikalische Theorien eingeführt zu sehen, die gerade nicht für die einfachsten gehalten werden. Nur wenn Hr. Mach anhangsweise am Schlusse seines Werkchens sagt: „Jene Theorien der Physik, welche alle Erscheinungen auf Bewegung und Gleichgewicht kleinster Theile zurückführen, die sogenannten Molekulartheorien, sind durch die Fortschritte der Theorie der Sinne und des Raumes bereits etwas ins Schwanken gerathen und man kann sagen, dass ihre Tage gezählt seien"; wenn also der Verfasser den heutigen Molekulartheorien dieses Prognosticon stellt, so möchten wir ihm das einfache deutsche Sprüchwort: „Abwarten und Thee trinken" zurufen. Uebrigens wünschen wir von Herzen, dass

recht Viele im Lesen des Schriftchens von Mach denselben Genuss empfinden mögen, den wir beim Durchlesen empfanden.

Freiberg, den 2. October 1672. TH. KÖTTERITZSCH.

Nicolai Copernici Thorunensis de revolutionibus orbium coelestium libri VI. Ex auctoris autographo recudi curavit Societas Copernicana Thorunensis. Accedit Georgii Joachimi Rhetici de libris revolutionum narratio prima Thoruni, sumptibus Societatis Copernicanae MDCCCLIII.

Es ist die Säcularausgabe des copernicanischen Meisterwerkes, welche dem Referenten heute vollendet vorliegt, und wenn er auch an anderem Orte (Augsburger allgemeine Zeitung vom 25. October 1872, Nr. 299, Beilage) Gelegenheit nahm, schon im Voraus auf die Erscheinung dieser neuen Ausgabe aufmerksam zu machen und bei dieser Gelegenheit Notizen über das Originalmanuscript zu veröffentlichen, welche dann eine erwünschte Ergänzung durch einen gelehrten theologischen Collegen, Professor Holtzmann in Heidelberg (Augsburger allgemeine Zeitung vom 30. October 1872, Nr. 304, Beilage) erhielten, so ist doch in dieser Zeitschrift noch keine Anzeige erfolgt und damit der Inhalt der nachfolgenden Zeilen fast mehr gebieterisch gefordert, als blos gerechtfertigt. Eine Zeitschrift für Mathematik und Physik darf die Jubelausgabe des Werkes, von dessen Erscheinen die neue Mechanik des Himmels ihren Ursprung herleitet, nicht unbesprochen lassen, wenn wir uns auch bei dem heute allgemein bekannten Inhalte damit begnügen, nur über äussere Form und Ausstattung des vor uns liegenden Bandes und über dessen Vorrede einige Bemerkungen zu machen. Als notorisch könnten wir dabei fast übergehen, dass der Copernicusverein für Kunst und Wissenschaft in Thorn am 19. Februar dieses Jahres den 400jährigen Geburtstag seines Namengebers feierte und bei dieser Gelegenheit die neue Ausgabe des Werkes von den Umdrehungen der Himmelskörper unter erstmaliger Neubenutzung der eigenhändigen Urschrift des Verfassers zum Drucke beförderte. Kaiser Wilhelm hat die Widmung des Werkes angenommen, und das preussische Cultusministerium hat durch einen Zuschuss an Geld die Vollendung des Druckes ermöglicht, dessen Kosten die Mittel eines Vereines von Privatpersonen überstiegen haben würden. Ist es doch ein typographisches Kunstwerk, welches aus der Buchdruckerwerkstätte von Breitkopf und Haertel in Leipzig hervorgegangen ist, an Schönheit der Typen, an Reinheit des Papiers, an Genauigkeit der Revision alle Wünsche befriedigend, welche an ein solches Buch gestellt werden müssen. Die Vorrede giebt theils eine Geschichte der Handschrift, auf welche Referent an diesem Orte nicht eingeht, theils eine rechtfertigende Darstellung des Verfahrens bei der Herstellung des gegenwärtigen Textes, als dessen Herausgeber wir der Hauptsache nach wohl Dr. M. Curtze zu betrachten haben, wenn gleich mit ihm noch vier andere

Männer, die Herren C. Boethke, Dr. R. Brohm, Herford und Dr. Hirsch, sich in die nicht geringe Mühe und Verantwortlichkeit theilten. Herr Curtze hat jedenfalls die Collationirung der Originalhandschrift allein vorgenommen, und dieses Verdienst unseres Collegen in mathematisch geschichtlichen Arbeiten glauben wir öffentlich feststellen zu sollen, glauben der Schwierigkeiten gedenken zu müssen, welche dabei vielfältig ausgestrichene und durch andere ersetzte Wörter dem Leser bereiten. Das Ergebniss der Collationirung in Verbindung mit einer gleichzeitig von den anderen Herausgebern vorgenommenen genauen Vergleichung der vier vorhandenen Drucke (von Nürnberg 1543, Basel 1564, Amsterdam 1617, Warschau 1854) war so bedeutsam für die Geschichte und die Herstellung des Textes, wie man nur hoffen durfte. Als Hauptresultat können wir hervorheben, dass es nunmehr feststeht, dass Copernicus zu drei Malen an seinem Buche gearbeitet hat, indem in der Handschrift eine erste, eine zweite und wenn auch nur an einzelnen Stellen eine dritte Recension stets von der eigenen Hand des Verfassers, aber nicht mit derselben Dinte, noch stets auf dem gleichen Papiere geschrieben sich deutlich unterscheiden lassen. Der erste Nürnberger Druck, und ihm folgen mit nicht allzubedeutenden Veränderungen die anderen Drucke, schliessen sich fast vollständig an die dem Datum nach jüngste Bearbeitung an, nur stellenweise auf einen früheren Texteslaut zurückgreifend. Eben diesen jüngsten Text liefert die neue Jubelausgabe unter Beifügung sämmtlicher verschiedener Lesarten als kritischen Apparat. Der Nürnberger Druck ist nicht nach der Originalhandschrift angefertigt, sondern nach einer Abschrift, welche entweder von Joachim Rheticus abgefasst oder wenigstens von ihm beaufsichtigt worden sein muss. Die schon erwähnten mannigfachen Correcturen, welche heute das Lesen der Handschrift nahezu unmöglich machen, wenn der Leser nicht durch eine Druckausgabe unterstüzt wird, setzen einen Abschreiber oder Revisor voraus, der den Gegenstand vollständig beherrschte. Ein solcher war im Jahre 1543 nur in der Person des Rheticus vorhanden. Kein Setzer hätte aus dem Originale sich zurecht finden können. Aber auch kein Setzer hätte gewagt, im Manuscripte Durchstrichenes dennoch zu drucken, und dergleichen finden wir in der Nürnberger Ausgabe. Kein Setzer endlich hätte versäumt, am Schlusse jedes Druckbogens anzugeben, wie weit der Satz gediehen sei, und dergleichen Angaben mangeln gänzlich in der Originalhandschrift. Für die Betheiligung des Rheticus an der Anfertigung der Copie führten wir schon den allgemeinen Grund seiner Befähigung zu diesem Geschäfte an. Weitere Belege liefern die Orthographie und Grammatik des Nürnberger Druckes, welche mit der aus anderen Schriften, besonders aus der sogenannten *Narratio prima* bekannten Latinität des Rheticus, aber nicht mit dem Manuscripte im Einklang stehen. So schreibt z. B. Rheticus immer *coelum* für Himmel; der Nürnberger Druck hat dieselbe

Schreibart; das Manuscript hat dagegen *caelum* und begründet sogar diese Schreibart etymologisch, indem es *caelum* von *caelare*, einmeisseln, schmücken, verschönern herleitet. Die Vorrede der Jubelausgabe bemerkt, wenn auch nicht in unmittelbarem Hinblick auf diese Aenderung ganz richtig, Rheticus sei Kenner und Liebhaber der griechischen Sprache gewesen. Copernicus war es nicht in gleichem Maasse, wenn auch Uebersetzungen aus dem Griechischen von ihm vorhanden sind. Wer wie er das philologische Ungeheuer eines Proproparoxytonons schuf, indem er sich in einem gegenwärtig der Bibliothek zu Upsala angehörigen Autographe *κόπερνικος* schrieb, durfte auch den Ursprung des Wortes *coelum* statt in *κοῖλον*, hohl, in *caelare* suchen. Rheticus dagegen mochte Bedenken tragen, eine solche sprachliche Hypothese unter dem Namen seines grossen geliebten Lehrers zu verbreiten, und vielleicht ist unsere Vermuthung nicht allzu gewagt, dass gerade deshalb die erste Seite des Manuscriptes in der Reinschrift und folglich auch im Nürnberger Drucke fehlt. Ein anderer Grund ist wenigstens nicht ersichtlich, warum man sie weggelassen haben sollte, als weil dort jene Ableitung sich findet, welche entweder zu einer Inconsequenz oder zu einem Widerspruche hätte führen müssen, je nachdem dort *caelum* oder *coelum* gedruckt worden wäre. Gehen wir nun zu den Schlussworten der Vorrede über, so ist unter den Gelehrten, deren Unterstützung die Herausgeber der Jubelausgabe mit freundlichem Danke belohnen, auch Professor Menzzer in Halberstadt genannt, welcher eine mit Anmerkungen versehene deutsche Uebersetzung des copernicanischen Werkes angefertigt zu haben scheint. Wir schliessen uns dem Wunsche an, Herr Menzzer möge einen Verleger für diese Uebersetzung finden, welche wohl für manchen lateinscheuen Leser Veranlassung werden dürfte, das System des Copernicus, welches er jetzt nur aus moderner Bearbeitung kennt, einmal in der Auffassung des Entdeckers zu studiren.

Heidelberg. CANTOR.

Taschenbuch der praktischen Geometrie. Eine Sammlung von Resultaten der niedern und höhern Vermessungskunde, von WILHELM JORDAN, Professor der Geodäsie am grossherzoglichen Polytechnikum zu Carlsruhe. Stuttgart 1873, Verlag der J. C. Metzler'schen Buchhandlung. 416 Seiten 8⁰.

Wenn bisher ein Lehrbuch der Geodäsie gefehlt hat, welches für alle directen und indirecten Messoperationen in gleicher Ausführlichkeit den Einfluss der regelmässigen Fehler als denjenigen der zufälligen Beobachtungsfehler betrachtete, sowie einen mittleren Betrag der letzteren auf Grund von Erfahrungen feststellte, so ist diesem Mangel durch das Erscheinen des Jordan'schen Taschenbuchs wesentlich abgeholfen. Zwar will der Herr Verfasser keineswegs ein vollständiges Lehrbuch geben, vielmehr

beabsichtigte er wesentlich für solche Leser zu schreiben, die schon Vorkenntnisse besitzen, und es sind demgemäss auch meistens Endformeln ohne Entwicklung gegeben. Referent würde vielleicht in letzterer Beziehung noch weiter gegangen sein und noch manche Entwickelung unterdrückt oder sie doch, soweit sie neu und dem Verfasser eigenthümlich, in Anmerkungen verwiesen haben.

Da die Grundlage einer wissenschaftlichen Behandlung des Einflusses zufälliger Beobachtungsfehler auf geodätische Messungen die Methode der kleinsten Quadrate ist, beginnt der Herr Verfasser nach einigen Vorbemerkungen über die Erdgestalt und über die Eintheilung der Geodäsie — er unterscheidet u. A. ebene, sphärische und sphäroidische Geodäsie — in einem ersten Theile seines Taschenbuchs auf 38 Seiten mit einem Abriss dieser Methode nach Encke's bekannter Bearbeitung in den Berliner astronomischen Jahrbüchern. Jedoch ist auch einzelnes daselbst nicht Vorkommende aufgenommen, u. A. die Formel zur Berechnung des mittlern Beobachtungsfehlers aus den Quadraten der Differenzen gleichgenauer directer Beobachtungen (S. 19). Es wird auch gezeigt, dass diese Formel nur eine Umwandlung der bekannten Formel mit den Quadraten der Verbesserungen ist. Man kann auf diese Art auch für ungleichgenaue directe Beobachtungen eine entsprechende Formel* ableiten; immerhin wird man nicht häufig Gelegenheit haben, diese Formeln anzuwenden, wenigstens nach den Erfahrungen des Referenten, welcher sie seit 1864 kennt, zu welcher Zeit er sie gelegentlich seiner Studien fand, ohne sie jedoch genügend zu würdigen. Von grösserem praktischen Werth ist wohl die Formel mit den ersten Potenzen der Differenzen gleichgenauer Beobachtungen, welche aber nicht aufgenommen ist; allerdings ist ihre Bedeutung erst während des Druckes des Taschenbuchs durch v. Andrae's Abhandlung in Nr. 1889 der Astronomischen Nachrichten (Jahr 1872) genauer festgestellt worden. Mag man übrigens über die praktische Bedeutung der Formeln mit den Beobachtungsdifferenzen denken, wie man will, jedenfalls haben sie theoretischen Werth und zeigen auf einen Blick, dass der berechnete mittlere Beobachtungsfehler den etwaigen constanten Theil der Beobachtungsfehler nicht enthalten kann, was schon allein ihre Anführung rechtfertigt. Ausserdem zeigen sie, dass die Berechnung des mittlern Fehlers directer Beobachtungen nur formell von den Verbesserungen der Beobachtungen, welche die Ausgleichung fordert, abhängt, in Wirklichkeit aber von den Widersprüchen

* Sind l_i, $i = 1 \ldots n$, die Beobachtungen mit den resp. Gewichten g_i, so ist der mittlere Fehler der Beobachtung vom Gewichte eins gleich

$$+\sqrt{\frac{[g_i g_k (l_i - l_k)^2]}{[g](n-1)}} \ldots i, k, \text{ von } 1 \ldots n.$$

Die Summirung im Zähler hat sich auf alle Combinationen von i und k ohne Wiederholung zu erstrecken.

der Beobachtungen unter sich, welche man mit dem Herrn Verfasser als wahre Fehler ansehen darf.

Bei der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ist die Gewichtsrechnung nur für die Unbekannten selbst angeführt. Mittels eines Entwickelungsganges, wie ihn u. A. ganz ähnlich Hansen im 8. Bande der Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften S. 602 eingeschlagen hat, wird gezeigt, dass bei Anwendung des Gauss'schen Algorithmus der Coefficient der letzten Unbekannten deren Gewicht ist, und ferner angeführt, wie man durch zwei Auflösungen bei entgegengesetzter Reihenfolge der Unbekannten die Gewichte aller Unbekannten finden könne. Referent hält die ersten Gauss'schen Formeln [*theor. comb.* Art. 32 (5)] für bequemer zur Bestimmung der Gewichte der Unbekannten selbst; für Anfänger und Solche, welche die Methode der kleinsten Quadrate nur vereinzelt anwenden, aber die allgemeine Auflösung der Normalgleichungen für am passendsten, zumal letztere gestattet, auch die Gewichte von Functionen der Unbekannten zu finden, was oft von mehr Bedeutung ist, als die Kenntniss der Gewichte der Unbekannten selbst.

S. 24 wird für den besondern Fall vermittelnder Beobachtungen, wo einige derselben unter vielen vom Gewicht 1 das abweichende Gewicht 2 oder 3 u. s. f. haben, der Kunstgriff angedeutet, durch 2- resp. mehrmaliges Anschreiben der betreffenden Gleichungen alles auf's Gewicht 1 zu reduciren. Sicherlich werden dadurch immer noch die strengen Werthe der Unbekannten erhalten, dagegen erhält man gegen die Rechnung nach den allgemeinen Formeln einen etwas andern mittlern Beobachtungsfehler, doch nicht zum Vortheil der neuen Rechnung, wie der Herr Verfasser will, sondern wohl zum Nachtheil. Denn streng genommen darf auf das umgewandelte System die übliche Formel für den mittleren Fehler nicht eher angewandt werden, als bis — nach erfolgter Ausgleichung — die mehrfach angeschriebenen Gleichungen wieder zusammengezogen sind, weil eben diese Formel nur für unabhängige Gleichungen gilt! Dann aber erhält man ganz den strengen Werth wieder.

S. 16 sind die bekannten Formeln für den wahrscheinlichen Fehler mitgetheilt sowohl zur Berechnung aus den Quadraten, als den ersten Potenzen der Verbesserungen directer Beobachtungen. Von den beigesetzten wahrscheinlichen Fehlern dieser Bestimmungen ist indessen unsres Wissens der Ausdruck für den wahrscheinlichen Fehler des aus ersten Potenzen ermittelten Werthes noch nicht bewiesen; er scheint nur nach Analogie des von Gauss gegebenen für wahre Beobachtungsfehler gebildet zu sein.

Um das Grundprincip der Methode der kleinsten Quadrate abzuleiten, bedient sich der Herr Verfasser mit Encke des älteren Gauss'schen Verfahrens und entwickelt zu dem Zwecke auch die Wahrscheinlichkeitsfunction

$$\varphi(\varDelta)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varDelta^2}.$$

Wenn nun Gauss auch in der *theor. motus* diesen Ausdruck als Wahrscheinlichkeit von $\varDelta$ bezeichnet, so vermeidet er dieses Wort doch später in der *theor. comb.*; denn die Wahrscheinlichkeit von $\varDelta$ ist $\varphi(\varDelta)$ nur proportional, und so wäre Seite 9 eine dahingehende Notiz gelegentlich der numerischen Auswerthung von $\varphi(\varDelta)$ nicht unpassend gewesen.

Von Beispielen findet sich im ersten Theil des Buches nur eins für vermittelnde Beobachtungen, da in den folgenden Theilen des Buches noch viele Beispiele folgen. Jenes Beispiel ist ausführlich durchgerechnet und in der That ganz geeignet, Interesse zu erwecken.

Der zweite Theil behandelt auf 218 Seiten die niedere Geodäsie. Trotz des geringen Raumes hat es der Herr Verfasser doch verstanden, in kurzen Worten das Wesentlichste der Theorie der Instrumente und der Messoperationen zu geben und es wird gerade dieser Theil Vielen sehr erwünscht sein. Die Disposition ist überdies eine zum Anschluss von Vorträgen geeignete.

Es wird zuerst die Absteckung constanter Winkel und die Längenmessung besprochen. Sehr ausführlich ist verweilt bei dem mittleren Fehler der Längenmessung, welcher nicht nur für Lattenmessungen, sondern auch für Kettenmessungen proportional der Quadratwurzel der Länge gesetzt wird. Referent ist der Ansicht, dass in der That für die gewöhnlichen Messungen mit der Kette diese Proportionalität als zweckmässigste Näherung adoptirt werden darf, wenn auch die Beobachtungen Franke's und Vorländer's auf eine andere Proportionalität hindeuten. Die Anwendung der letzteren verlangt aber, dass bei jeder Länge auf die Ausführung der Messung Rücksicht genommen wird und sie führt bei strenger Durchführung auf zahllose Zweifel.

Die Aufnahme und Berechnung der Flächen ist nach der Coordinatenmethode ausführlich gegeben, an einigen Beispielen die erzielte Genauigkeit abgeleitet und die geometrische Theilung einiger einfacher Figuren durch Rechnung und Construction beigefügt. Theorie und Erfahrungsresultate für die Genauigkeit des Polarplanimeters folgen. Die Besprechung der Libellen und der optischen Instrumente bildet die Vorbereitung auf den Theodolit, für welchen die Prüfungsverfahren recht klar dargestellt sind und Formeln und numerische Werthe für den Einfluss der Instrumentalfehler auf die Winkelmessung angeführt werden, soweit dies von praktischer Bedeutung ist. Dass man das Repetitionsverfahren nicht unbedingt zu verwerfen habe, ist auch ganz die Meinung des Referenten; der beste Beweis dafür ist die Genauigkeit der S. 319 erwähnten Gauss'schen Winkel — ein auf der Station ausgeglichener Winkel hatte zufolge der Netzausgleichung den mittlern Fehler $\pm 0''419\sqrt{2}$ — Allerdings war das

Gauss'sche Messverfahren auch geeignet, die Mängel der Repetitionstheodoliten thunlichst unschädlich zu machen.

Apparate zur Messung der Höhenwinkel mit der Schraube hat der Herr Verfasser nach seinen Erfahrungen nicht praktisch gefunden, weil sie nur sehr beschränkt zur Anwendung gelangen können. Demgemäss ist auch darüber wenig gesagt. Unverständlich blieb uns, dass man bei Anwendung des Höhenkreises am Theodolit in beiden Lagen des Fernrohrs mit einem Nonius ausreichen könne (S. 108). Am Höhenkreis sind im Allgemeinen zwei Nonien viel nöthiger als am Horizontalkreis, weil einerseits im Falle unrunder Zapfen die Excentricität der Alhidade mit der Ablesung veränderlich ist und weil andererseits auch eine constante Excentricität bei Anwendung des Verfahrens der Messung doppelter Zenithdistanzen in der Differenz der Ablesungen nicht verschwindet.

Die Polygonometrie und Kleintriangulirung folgen naturgemäss als Anwendungen des Theodolits zur Horizontalaufnahme, woran sich eine kurze Anleitung zur Aufnahme einer Flurkarte anschliesst. Jene wichtigen Capitel sind sehr ausführlich; namentlich enthalten sie auch eine Darstellung der Genauigkeit der Punktbestimmung in der Ebene von festen Punkten aus mit Rücksicht auf verschiedene Bestimmungsweisen. Der Herr Verfasser hat auch eine Beantwortung der schwierigen Frage, wie weit man in der Anwendung strenger Ausgleichung gehen solle, nicht vermieden und empfiehlt im Allgemeinen für kleine Netzaufnahmen passende Näherungsmethoden unter Hinweis auf seine bezügliche Abhandlung in den Monatsblättern des badischen Geometervereins von 1871.

Drei weitere Capitel betreffen das Nivelliren; die trigonometrische und die barometrische Höhenmessung. Von besonderem Interesse sind hier u. A. die Angaben über die bei verschiedenen Präcisionsnivellements erzielte Genauigkeit, über die Veränderlichkeit des Refractionscoefficienten und über die Höhenmessung mit constantem Refractionscoefficienten. Für die barometrische Höhenmessung werden nächst den für die Rechnung mit vierstelligen Logarithmen abgekürzten Bauernfeind'schen Tafeln für speciellen Dunstdruck noch eine Tafel zur Rechnung mit mittlerem Luftdruck und eine Tafel zur genäherten Rechnung, innerhalb Deutschland brauchbar, gegeben. Bei der Besprechung des Federbarometers wird namentlich seine Anwendung zur interpolatorischen Höhenmessung betont und für seine verschiedenen Anwendungen überhaupt die zu erwartende Genauigkeit möglichst festgestellt.

Es wendet sich nun der Herr Verfasser zum Messtisch, zu den Distanzmessern und daran schliesst sich die Aufnahme einer Höhenkarte. Die Pothenot'sche Methode soll bei Gebrauch des Messtisches möglichst oft angewandt werden; — dem steht wohl entgegen, dass man bei dieser Methode die Hilfe der Anschnitte ganz entbehrt, wodurch die



graphische Winkelmessung erheblich unsicherer wird. Von den Distanzmessern ist eingehend nur der Reichenbach'sche, beziehendlich Ertel-sche besprochen, bei dem Stampfer'schen Distanzmesser aber bemerkt, dass die Distanzlatte unmöglich von freier Hand so gehalten werden könne, wie es der vom Instrumente im Uebrigen gewährten Genauigkeit entspreche.

Der Schluss des zweiten Theils macht eine Anleitung zur Kreisbogenabsteckung.

Der 135 Seiten umfassende dritte Theil soll nach der Vorrede von der höhern Geodäsie nur soviel enthalten, als zum Verständniss der Gradmessungen nöthig ist. Zunächst giebt dann dieser Theil Formeln und Zahlen für das Bessel'sche Erdellipsoid und wendet sich dann zur Anlage eines Dreiecksnetzes erster Ordnung, der Signalisirung und der Basismessung, darnach aber zur Winkelmessung, der Berechnung der Dreiecke und der Netzausgleichung. Allenthalben werden Erfahrungswerthe mitgetheilt, u. A. über die erzielte Genauigkeit der Basis- und der Winkelmessung, über die günstigste Zeit der Winkelmessung, über die Länge der Grundlinien u. A. m. Die Kettenform für Basismultiplicationsnetze (S. 279) fanden wir im Gegensatz zum Herrn Verfasser vom theoretischen Gesichtspunkt aus weit weniger rationell, als die übliche Form. Zur Berechnung der Kugeldreiecke ist nächst dem Legendre'schen Satze auch Bohnenberger's Additamentenmethode angegeben und betont. Die Ausgleichung der Dreiecksnetze wird an zwei Beispielen für Winkel- und Richtungsmessungen nach Gauss', beziehendlich Bessel's Formeln durchgeführt und erläutert. Als Schwierigkeiten der Ausgleichung von Dreiecksnetzen macht der Herr Verfasser namhaft: Rechenfehler gänzlich zu vermeiden, sowohl bei Aufstellung der Bedingungsgleichungen, als bei der eigentlichen Ausgleichung selbst. Für letztere fand Referent die stete Anwendung der Summengleichungscontrole als untrügliches Hilfsmittel, um Schritt vor Schritt Fehler zu vermeiden, resp. zu entdecken. Und die Bedingungsgleichungen lassen sich meistens durch Aufstellung überzähliger controliren, was immer doppelter Aufstellung vorzuziehen ist.

Die Angaben über die Genauigkeit verschiedener Triangulirungen sind wohl theilweise nur als vorläufige aufzufassen, da in der Berechnung der mittlerem Fehler noch keine rechte Uebereinstimmung herrscht. Der Herr Verfasser hat aber das Mögliche gethan, um vergleichbare Zahlen zu erhalten, und giebt er den mittlern Fehler eines Winkels, wie er aus den Stationsausgleichungen hervorgeht und ohne Rücksicht auf verschiedene Gewichte, berechnet aus den von der Netzausgleichung geforderten Verbesserungen. Nur bei den älteren Triangulirungen, wo besondere Stationsausgleichungen fehlen, dürfte die Bedeutung der Zahlen eine etwas abweichende sein. Diejenigen Zahlen aber, welche bei einigen

Triangulationen nach einer theoretisch kaum haltbaren Formel berechnet worden sind und welche der Herr Verfasser in Parenthese aufnimmt, hätten in Anmerkungen verwiesen werden sollen.

Obgleich der mittlere Winkelfehler der beste Massstab für die Genauigkeit einer Triangulirung ist, werden doch auch noch weitere Anhaltspunkte durch Berechnung mittlerer Fehler in Dreiecksseiten zu gewinnen gesucht. Nächst den Beispielen hätten hier vielleicht noch Formeln etwa für eine einfache Dreieckskette Platz finden mögen, um zu zeigen, wie rasch der Längenfehler mit dem Abstande von der Basis wächst.

Zur Berechnung der gegenseitigen Lage der Netzpunkte folgen in weiteren Capiteln die Formeln für rechwinklige sphärische Coordinaten und für sphärische Polarcoordinaten nach Bessel. Daran schliesst sich die Hauptaufgabe der höhern Geodäsie mit einer Lösung für sphärische Polarcoordinaten nach Gauss und einer Lösung für rechtwinklige sphärische Coordinaten nach Bohnenberger; der Herr Verfasser fügt im letztern Falle der Breitendifferenz ein kleines sphäroidisches Correctionsglied bei. Die Lösung der Hauptaufgabe für's Erdsphäroid wird gegeben nach Gauss' beiden Methoden, sowie nach der von Bessel und mit deren Erweiterung für beliebige Excentricität durch Jordan. Unter den Eigenschaften der geodätischen Linie ist mit angeführt, dass sie sich stets zwischen den zwei Normalschnitten halte. Dies ist, wie Bremiker in seinen geodätischen Studien schon ausgesprochen, nicht der Fall. Liegen die Endpunkte der geodätischen Linie z. B. in gleicher Breite, so weichen der gemeinsame Normalschnitt und die geodätische Linie, deren Länge $2y$ sei, in der Mitte gerade um das oben erwähnte Correctionsglied [S. 331, erste Formel (1)]

$$206265 \, \frac{c^2}{4} \, \frac{y^2}{R^2} \sin 2\varphi \text{ Bogensec.}$$

in Breite von einander ab.

Den Beschluss des dritten Theils macht die Bestimmung der Dimensionen des Rotationsellipsoids und folgt dann noch ein Anhang mit den wichtigsten geschichtlichen Momenten, numerischen Werthen für Maassrelationen, Formeln und Tafeln für Interpolation, Verwandlungstafeln für alte und neue Kreistheilung, eine Zusammenstellung von Reihen und allerlei mathematischen Formeln häufigen Gebrauches.

Die Aufgabe, welche sich der Herr Verfasser des vorliegenden Buches nach den Worten der Vorrede gesetzt hatte, nämlich einen Leitfaden für Studirende und eine Uebersicht der Resultate für Praktiker zu geben, hat derselbe nach unsrer Meinung so gelöst, dass vielfache Benutzung des Buches nicht fehlen kann. Kaum zum Nachtheil wird es diesem gereichen, dass Mancherlei, als ältere Nivellirinstrumente, Bussoleninstrumente, Cartographie und Ausarbeitung der Pläne, die Gauss-

sche Projectionsmethode für die Ebene und geographische Ortsbestimmungen nicht berücksichtigt sind. Andrerseits hat das Buch so, wie es ist, namentlich durch die vielen ausführlichen Beispiele, zahlreichen Tabellen und literarische Nachweisungen, sowie manchen praktischen Wink — überhaupt die grosse Geschicklichkeit, mit welcher allenthalben die praktische Verwerthung der Theorie angestrebt ist — als Nachschlagebuch die rechten Eigenschaften.

Aachen, den 7. April 1873. F. R. HELMERT.

Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten. Von Dr. RICHARD HEGER, Oberlehrer am Kreuzgymnasium zu Dresden. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn. 1872.

Dieses kleine, von der rühmlichst bekannten Verlagsfirma in entsprechender Weise ausgestattete, 265 Seiten gr. 8^0. umfassende Werkchen, das noch mit einer grösseren Anzahl von Holzschnitten ausgestattet ist, soll dazu dienen, Anfänger, namentlich Studirende an Universitäten und polytechnischen Hochschulen, für das Studium synthetisch-geometrischer Werke vorzubereiten.

Vorausgesetzt wird die Bekanntschaft mit der Determinantentheorie und mit denjenigen fundamentalen analytisch-geometrischen Theoremen, die die geometrische Wissenschaft, nur fussend auf dem Coordinatenbegriff des Descartes, im Laufe der Zeiten schuf. Das Werk beginnt daher sofort mit der Einführung der homogenen Coordinaten, sowohl der Punkt-, wie der Geraden-Coordinaten, und behandelt mit diesen Coordinaten sowohl die einfacheren Gebilde der Ebene, wie des Raumes, indem die Betrachtung von Gebilden, die den zweiten Grad oder die zweite Classe übersteigen, ausgeschlossen bleiben.

Auf diese Betrachtungen, die ungefähr die Hälfte des benützten Raumes einnehmen, folgt ein zweiter Abschnitt, der sich mit der Collineation beschäftigt und endlich werden noch einige Sätze über Büschel und Schaaren von Curven und Flächen zweiter Ordnung mitgetheilt.

Als richtig und jedenfalls für allgemeine synthetisch-geometrische Untersuchungen wirksam müssen wir hervorheben, dass der Verfasser von dem Plücker'schen Begriff der Geraden-Coordinaten abgewichen ist und auch statt deren Verhältnisse in die Rechnung einführt, ein Umstand, der die Wirksamkeit der dualistischen Methode noch augenfälliger macht.

Uebrigens glauben wir aber noch hervorheben zu müssen, dass die Sonderung der Gebilde der Ebene von denen des Raumes doch etwas zu streng durchgeführt ist, ein Umstand, der den Verfasser zwingt, Manches, was bereits für Gebilde in der Ebene früher dargethan worden ist, mit wenig Veränderung für räumliche Gebilde zu wiederholen; nach dem

vorausgesetzten Standpunkt der Leser muss dies als ein Uebelstand bezeichnet werden.

Aehnlich glauben wir, hätte auch die Wirksamkeit des dualistischen Princips dieses Zweiges der neueren Geometrie deutlicher gemacht werden können, wenn der Verfasser ohne Weiteres die auf dem dualistischen Wege sich ergebenden Theoreme einander gegenüber gestellt hätte; ist ja doch die Aehnlichkeit des Beweises so gross, dass auch der Verfasser an manchen Orten einfach nur auf den früheren Beweis, der für das dualistisch entgegengesetzte Coordinatensystem galt, hinzuweisen hatte.

Endlich ist es uns erschienen, als ob da und dort der Kürze der Darstellung mehr Rechnung getragen sei, als es der Standpunkt des Leserkreises, für den das Buch bestimmt ist, erlaubt.

Eine grössere Anzahl zum Theil recht sinnentstellender Druckfehler wird jedenfalls in einer neuen, hoffentlich recht bald erscheinenden Auflage verschwinden.

Freiberg, 3. December 1872. TH. KÖTTERITZSCH.

Bibliographie

vom 1. Juni bis 31. Juli 1873.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe d. königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1872. 3. Heft. München, Franz. 12 Ngr.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathem.-physikal. Classe. 1872. IV. Leipzig, Hirzel. ⅔ Thlr.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von OHRTMANN, MÜLLER und WANGERIN. 2. Bd. Jahrg. 1869 u. 1870. 3. Heft. Berlin, G. Reimer. 1⅓ Thlr.

Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J. G. POGGENDORFF. Ergänzung. 6. Bd. 1. Stück. Leipzig, Barth. 1⅓ Thlr.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien, herausgegeben von C. v. LITTROW. 3. Folge. 19. Bd. Jahrgang 1869. Wien, Wallishauser. 3⅔ Thlr.

Jahrbücher der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, herausgegeben von C. JELINEK und C. FRITSCH. Neue Folge. VII. Bd. Jahrg. 1870. Wien, Braumüller. 2 Thlr.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen auf der k. k. Sternwarte zu Prag von 1869—1871. Jahrg. 30—32. Prag, Calve. à 2½ Thlr.

Bibliotheca historico-naturalis, physico-chemica et mathematica, ed. A. Metzger. 22. Jahrg. 2. Heft: Juli-December 1872. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. ⅓ Thlr.

Reine Mathematik.

Gegenbauer, L., Note über bestimmte Integrale. (Akad.) Wien, Gerold. 1½ Ngr.

Kolbe, J., Beweis eines Satzes über das Vorkommen complexer Wurzeln in einer algebraischen Gleichung. (Akad.) Wien, Gerold. 1½ Ngr.

Winckler, A., Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten lineare Functionen der unabhängigen Variabelen sind. (Akad.) Wien, Gerold. 6 Ngr.

Büttner, A., Die Elemente der Buchstabenrechnung und Algebra. Berlin, Stubenrauch. ⅜ Thlr.

Weyr, E., Ueber rationale ebene Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunktstangenten Inflexionstangenten sind. (Akad.) Wien, Gerold. 1½ Ngr.

Bahnson, Leitfaden für den Unterricht in der Geometrie. 1. Thl. 2. Aufl. Hamburg, Rudolphi. 18 Ngr.

Schubert, K., Lehrbuch der Geometrie. 1. Thl. Wien, Beck. ½ Thlr.

Nagel, Ch., Ebene Geometrie. 2. Abtheil.: Die Fundamentalsätze der neueren Geometrie. Ulm, Wohler. 12 Ngr.

Gasser, A., Kurzer Leitfaden für den Unterricht in der Stereometrie. Frankfurt a. M., Jäger. 12½ Ngr.

Fischer, F. W., Die Kegelschnitte, nebst einer kurzen Einleitung in die analytische Geometrie. Halle, Schmidt. 12 Ngr.

Worpitzky, Mathematische Wandtafel. Berlin, Weidmann. ⅔ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Quenstedt, F. A., Grundriss der bestimmenden und rechnenden Krystallographie. Tübingen, Laupp. 3⅜ Thlr.

Schlotke, J., Krystallographie. Stereoskopische Darstellung der wichtigsten Krystalle, ihrer Combinationen etc. Hamburg, Friedrichsen & Comp. 1½ Thlr.

Schrauf, A., Atlas der Krystallformen. 4. Lief. Wien, Braumüller. 3 Thlr.

Grabau, H., Ueber Naumann's Conchospirale und deren Bedeutung für die Conchyliometrie. Leipzig, Engelmann. ⅚ Thlr.

Wernicke, A., Lehrbuch der Mechanik. 2. Aufl. 2. Thl. Braunschweig, Vieweg. 2⅓ Thlr.

Schramm, H., Die Anziehungskraft, betrachtet als eine Wirkung der Bewegung. Graz, Ferstl. ⅙ Thlr.

Lasswitz, A., Ueber Tropfen, welche an festen Körpern hängen und der Schwerkraft unterworfen sind. Breslau, Köbner. 24 Ngr.

BRUHNS, C., Astronomisch-geodätische Arbeiten im Jahre 1871. Leipzig, Engelmann. 3 Thlr.

FÖRSTER, W., Die unveränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Theiles des königl. preussischen Normalkalenders für 1874. Berlin, statist. Bureau. 1⅔ Thlr.

——, Die veränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Theiles des königl. preussischen Normalkalenders für 1874. Berlin, statist. Bureau. 2 Thlr.

LITTROW, K. v., Zur Kenntniss der kleinsten sichtbaren Mondphasen. (Akad.) Wien, Gerold. 4 Ngr.

MÄDLER, J. H. v., Geschichte der Himmelskunde. 16. u. 17. Lief. Braunschweig, Westermann. à ⅓ Thlr.

Physik.

BOUÉ, A., Bemerkungen über Dr. A. Wolfert's Theorie der Polarlichter. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

Ueber die Höhe des Nordlichts und dessen Lage im Raume. Kiel, Schwers. 6 Ngr.

STEFAN, J., Ueber die mit dem Soleil'schen Doppelquarz ausgeführten Interferenzversuche. (Akad.) Wien, Gerold. 5 Ngr.

LANG, V. v., Spiegelgalvanometer mit regulirbarer Dämpfung. (Akad.) Wien, Gerold. 15 Ngr.

DVORAK, V., Zur Theorie der Talbot'schen Streifen. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

BOLTZMANN, L., Experimentelle Bestimmung der Dielektricitätsconstante bei Isolatoren. (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

SCHRAMEK, C., Das Wärmespectrum der Sonne. Wien, Dirnböck. 1 Thlr.

DOMALIK, K., Zur mechanischen Theorie der Elektrolyse. (Akad.) Wien, Gerold. 2 Ngr.

REIS, P., Lehrbuch der Physik. 2. Aufl. 3. Lief. (Schluss.) Leipzig, Quandt & Händel. 1 Thlr.

Druckfehler im 2. Heft (Literaturzeitung).

Seite 19 Zeile 2 v. o. lies: ω statt w.
„ 20 „ 15 v. u. „ p „ β.
„ 21 „ 9 v. o. „ α „ a und α' statt a'.
„ 22 „ 15 v. o. ist hinter „gewesen ist" einzuschalten: „und sich auf beliebige cubische Körper ausdehnen lässt".
„ 22 „ 7 v. u. lies: Q statt q.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1872.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Abbildung.

1. Ueber einige conforme Abbildungen. Hentschel. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 39.
2. Ueber Curven dritter Ordnung und ihre Abbildung auf einem Kreise. Durège. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 433.
3. Ueber die Abbildung eines Kreisbogenzweiecks. Igel. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 251.
4. Ueber die Abbildung algebraischer Flächen. Cremona. Mathem. Annal. IV, 213.
5. Ueber die Modificationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält. Dickmann. Mathem. Annal. IV, 442.
6. Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades, welche aus zwei sich schneidenden unendlich nahen Geraden besteht. Korndoerfer. Mathem. Annal. IV, 117. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 9.]

Aerodynamik.

7. *On the general circulation and distribution of the atmosphere.* *Everett.* *Phil. Mag. XLII,* 199.
8. *On attraction caused by vibrations of the air.* *Challis.* *Phil. Mag. XLI,* 279.
9. *On the cause of the interrupted spectra of Gases.* *Stoney.* *Phil. Mag. XLI,* 291; *XLII,* 41.

Akustik.

10. *On the theory of resonance.* *Strutt.* *Phil. Mag. XLI,* 239.
11. *Influence de la résistance de l'air dans le mouvement vibratoire des corps sonores.* *Bourget.* *Compt. rend. LXXII,* 560.

Analytische Geometrie der Ebene.

12. Zur Theorie ebener perspectivischer Punktsysteme. Voss. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 375.
13. Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Klein & Lie. Mathem. Annal. IV, 50.
14. Ueber den Zusammenhang der Systeme derjenigen Punkte, in welchen Kegelschnitte eine allgemeine Curve dritter Ordnung osculiren. Gent. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 476.
15. Ueber Epicycloiden, Hypocycloiden und daraus abgeleitete Curven. Kiepert. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 129. [Vergl. Bd. XVI, Nr. 6.]

Vergl. Imaginäres 196. Kegelschnitte. Substitution 157. Trajectorie.

Analytische Geometrie des Raumes.

16. Zur Theorie der Elimination und der algebraischen Curven. Brill. Mathem. Annal. IV, 510.
17. Ueber zwei Berührungsprobleme. Brill. Mathem. Annal. IV, 527.
18. Ueber rationale Curven vierter Ordnung. Emil Weyr. Mathem. Annal. IV, 242. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 23.]
    Vergl. Ellipsoid. Krümmung. Normale. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Singularitäten.

Astronomie.

19. *On the probable character of cometary orbits. Davis. Phil. Mag. XL*, 190; *XLI*, 44.
20. *On secondary planets in small orbits. Vaughan. Phil. Mag. XLI*, 508.
21. *Théorie des perturbations de la lune qui sont dues à l'action des planètes. Newcomb. Journ. mathém. XXXVI*, 321. — *Compt. rend. LXXII*, 403.
22. *Calcul de quelques nouveaux termes de la série qui exprime le coëfficient de l'équation séculaire de la lune. Delaunay. Compt. rend. LXXII*, 495.
23. *On the theory of the tides. Abbat. Phil. Mag. XLI*, 120. [Vergl. Bd. XVI, Nr. 19.]
24. *Sur l'épaisseur de la croute solide du globe. Hennessy. Compt. rend. LXXII*, 250. — *Delaunay ibid.* 278.
25. *On the determination of the thickness of the earth's crust. Pratt. Phil. Mag XLII*, 98, 280, 400.
26. *On the determination of the height of the atmosphere. Hall. Phil. Mag. XLI*, 353.
    Vergl. Geschichte der Mathematik 77, 78. Optik 133.

Attraction.

27. Ueber die Anwendung einer von demselben Verfasser aufgestellten mechanischen Gleichung auf die Bewegung eines materiellen Punktes um ein festes Anziehungscentrum und zweier materieller Punkte um einander. Clausius. Mathem. Annal. IV, 231. — *Phil. Mag. XLII*, 321.
28. *On the attraction of a terminated straight line. Cayley. Phil. Mag. XLI*, 358.
    Vergl. Aerodynamik 8. Optik 132. Potential.

B.

Bestimmte Integrale.

29. Ueber einige Integrationen längs geschlossener Wege. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 347.
30. Die Theorie der Fourier'schen Integrale und Formeln. Du Bois-Reymond. Mathem. Annal. IV, 362.
31. Ueber Auflösung von Gleichungen und Summation von Reihen durch bestimmte Integrale. Du Bois-Reymond. Crelle LXXIV, 281.
32. *On a class of definite integrals. Glaisher. Phil. Mag. XLII*, 294, 421. — *Pendlebury ibid.* 437.
33. *Formules relatives à la théorie des intégrales définies. Andréiewski.* Mathem. Annal. IV, 550.
    Vergl. Cylinderfunction. Elliptische Transcendenten. Ultraelliptische Transcendenten.

C.

Capillarität.

34. *On the capillary phenomene of the common surface of two liquids. Quincke Phil. Mag. XLI*, 245, 370, 454.
35. *Théorie des phénomènes capillaires. Roger. Compt. rend. LXXII*, 848.

Combinatorik.

36. Ueber die Multiplication der symmetrischen algebraischen rationalen ganzen Functionen. Babczynski. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 147.



Complanation.

37. Ueber die Kugelzone. Biehringer. Zeitschr. Math. Phys XVII, 255.
38. Ueber die stereometrischen Analoga zum Fagnano'schen Satze. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 66.

Crystallographie.

39. Crystallometrische Formeln. Junghann. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 445.

Cylinderfunctionen.

40. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen. Lommel. Mathem. Annal. IV, 103. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 32.]

D.

Determinanten.

41. Zur Theorie der Vertauschung der unabhängigen Variabeln. Hess. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 1.
42. Ueber die Resultante zweier ganzer Functionen. Naegelsbach. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 333.
43. Zur Theorie der Determinanten. Weyrauch. Crelle LXXIV, 273.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

44. Die Herleitung der Determinante für den Inhalt des Dreiecks aus den drei Seiten. Ritsert. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 518.
45. Ueber die conjugirten Punktenpaare in Bezug auf einen Kegelschnitt. Rosanes. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 174.
46. Zur Theorie der Cremona'schen Transformationen. Clebsch. Mathem. Annal. IV, 490.
47. Ueber eine Eigenschaft der reciproken Curven. Pasch. Crelle LXXIV, 92.
48. Ueber eine Fläche der vierten Ordnung. Hierholzer. Mathem. Annal. IV, 172.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 16, 17.

Differentialgleichungen.

49. *Propriétés de quelques quadratures déduites de l'intégration des expressions différentielles à deux variables.* ***Andréiewski.*** Mathem. Annal. IV, 391.
50. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Thomé. Crelle LXXIV, 193.
51. Ueber die Integration einer lineären Differentialgleichung n^{ter} Ordnung. Hossenfelder. Mathem. Annal. IV, 195.
52. Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung mit derselben unbekannten Function. A. Mayer. Mathem. Annal. IV, 88.

Vergl. Functionen 63. Trajectorie.

Differentialquotient.

53. Ueber independente Darstellung der höheren Differentialquotienten. R. Hoppe. Mathem. Annal. IV, 85.
54. Ueber die höheren Differentialquotienten. Most. Mathem. Annal. IV, 499.

E.

Elektricität.

55. Ueber die Vertheilung der Elektricität auf einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper. Godt. Mathem. Annal. IV, 245.

Ellipsoid.

56. *On the geodesic Lines on an Ellipsoid. Cayley. Phil. Mag. XLI,* 534.

Vergl Complanation 38.



Elliptische Transcendenten.

57. Bemerkung zu dem Sturm'schen Beweise des Additionstheorems für die elliptischen Integrale erster Gattung. Schroeter. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 508.
58. Ueber eine geometrische Anwendung der complexen Multiplication der elliptischen Functionen. Kiepert. Crelle LXXIV, 305.

F.

Functionen.

59. Die Elemente der Functionenlehre. Heine. Crelle LXXIV, 172.
60. *Théorème général concernant la grandeur relative des infinis des fonctions et de leurs dérivées. Du Bois-Reymond.* Crelle LXXIV, 294. [Vergl. Bd. XVI, Nr. 295.]
61. Ueber die Entwickelung von Functionen nach den Integralen einer Classe von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Pochhammer. Crelle LXXIV, 315.
62. Ueber Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche. Lüroth. Mathem. Annal. IV, 181.
63. Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. H. A. Schwarz. Crelle LXXIV, 218. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 293.]

Vergl. Bestimmte Integrale. Cylinderfunctionen. Determinanten. Differentialquotienten. Homogene Functionen. Imaginäres 97, 98. Zahlentheorie 174, 175.

G.

Geodäsie.

64. Ein Beitrag zur höheren Geodäsie. Sonderhof. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 89, 177.
65. Ueber den Einfluss der Fehler des Spiegelsextanten auf die Winkelmessung. A. Schell. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 465.

Vergl. Astronomie 24, 25.

Geometrie (descriptive).

66. *On the plane representation of a solid figure. Cayley. Phil. Mag. XLI,* 286.

Geometrie (höhere).

67. Collineare Grundgebilde und ihre Erzeugnisse. Th. Reye. Crelle LXXIV, 1.
68. Bestimmung der Anzahl involutorischer Elementenpaare einförmiger mehrdeutiger Gebilde. Emil Weyr. Crelle LXXIV, 189.
69. Bemerkungen über zwei-zweideutige Verwandtschaft. Heger. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 71.
70. Die Geometrie unendlich dünner Strahlenbündel und die Affinität ebener Systeme. Zech. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 353.
71. Ueber das ebene Fünfeck. Clebsch. Mathem. Annal. IV, 476.
72. *Démonstration géométrique d'une propriété de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Mannheim. Journ. mathém. XXXVI,* 317.
73. *Détermination par le principe de correspondance, de la classe de la développée et de la caustique par réflexion d'une courbe géométrique d'ordre* m *et de la classe* n. *Chasles. Compt. rend. LXXII,* 394.
74. *Propriétés des courbes d'ordre et de classe quelconques démontrées par le principe de correspondance. Chasles. Compt. rend. LXXII,* 577.
75. *Propriétés des diamètres des courbes géométriques. Chasles. Compt. rend. LXXII,* 794.

Geschichte der Mathematik.

76. *Sur les termes empruntés à la langue arabe. Sedillot. Compt. rend. LXXII,* 571, 777. — *Roulin ibid.* 591, 648, 814.
77. *Lettre de Cassini IV au comte d'Angivillers ayant rapport a l'établissement de l'observatoire. Delaunay. Compt. rend. LXXII,* 41, 98.

78. *Note relative à l'établissement de l'observatoire.* Chasles. *Compt. rend. LXXII*, 80, 100, 137.
79. Die Familie Fagnano. M. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 88.
80. Notiz über Bürmann. M. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 428.
81. *Rectification de listes d'articles détachés de Mr. Cauchy, publiées dans deux catalogues différents et restitution à Mr. Cournot de quelquesuns de ces articles.* Bienaymé. *Compt. rend. LXXII*, 25.

Gleichungen.

82. Ueber die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen, deren Coefficienten rationale Functionen einer Variablen sind. Frobenius. Crelle LXXIV, 254.
83. *Mémoire sur la résolution des équations algébriques les unes par les autres.* C. Jordan. *Journ. mathém. XXXVI*, 1. — *Compt. rend. LXXII*, 283.
84. *On fractional criticoids.* Cockle. *Phil. Mag. XLI*, 360. [Vergl. Bd. XVI, Nr. 77.]
85. Ueber irreducible cubische Gleichungen. Reidt. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 430.
86. *Méthode nouvelle pour la résolution d'une classe importante et très nombreuse d'équations transcendantes.* Boussinesq. *Compt. rend. LXXII*, 480.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 16. Substitutionen.

H.

Homogene Functionen.

87. Resultanten von Covarianten. Gordan. Mathem. Annal. IV, 169.
88. Ueber einige allgemeine Theoreme aus der neueren Algebra. Gundelfinger. Mathem. Annal. IV, 164.
89. Ueber binäre Formen. Gundelfinger. Crelle LXXIV, 87.
90. *An example of the higher transformation of a binary form.* Cayley. Math. Annal. IV, 359.
91. Zur Theorie der ternären cubischen Formen. Gundelfinger. Mathem. Annal. IV, 144.

Vergl. Combinatorik. Ultraelliptische Transcendenten.

Hydrodynamik.

92. *Rapport fait à l'académie des sciences sur un mémoire de M. Boussinesq relatif à la théorie des ondes liquides périodiques.* De Saint-Venant. *Journ. mathém. XXXVI*, 21.
93. *Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire.* Boussinesq. *Compt. rend. LXXII*, 755.
94. *On the mathematical theory of combined streams.* Rankine. *Phil. Mag. XLI*, 67.
95. *Hydrokinetic solutions and observations.* W. Thomson. *Phil. Mag. XLII*, 362.

Vergl. Capillarität.

I.

Imaginäres.

96. Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie. Stolz. Mathem. Annal. IV, 416.
97. Ueber eine besondere Gattung algebraischer Functionen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 248.
98. Ueber die Werthe von $\arcsin(x+iy)$ und $\arccos(x+iy)$. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 245.

Vergl. Elliptische Transcendenten 58.

K.

Kegelschnitte.

99. Ueber die Einhüllende aller Kegelschnittsehnen von constanter Länge. Ed. Weyr. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 164.
100. Zur Theorie der quadratischen Transformationen. Igel. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 516.



101. *Propriétés des systèmes de coniques, relatives, toutes, à certaines séries de normales en rapport avec d'autres lignes ou divers points.* Chasles. *Compt. rend. LXXII*, 419.
102. *Propriétés des systèmes de coniques, dans lesquels se trouvent des conditions de perpendicularité entre diverses séries de droites.* Chasles. *Compt. rend. LXXII*, 487.
103. *Théorèmes divers concernant les systèmes de coniques représentés par deux caractéristiques.* Chasles. *Compt. rend. LXXII*, 511.
   Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 14. Determinanten in geometrischer Anwendung 45. Parabel.

Kettenbrüche.

104. Ueber die Kettenbruchentwickelungen für Quadratwurzeln. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 70.

Kreis.

Vergl. Abbildung 23.

Krümmung.

105. Ueber das Wachsthum der Krümmung ebener Schnitte krummer Flächen. Exner. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 416.

Kugel.

Vergl. Sphärik.

M.

Mechanik.

106. *On the universal powers of nature and their mutual dependence.* Colding. *Phil. Mag. XLII*, 1.
107. *Sur le principe de la moindre action.* J. A. Serret. *Compt. rend. LXXII*, 697.
108. Zur graphischen Phoronomie. Kapp. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 419.
109. Ueber den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper. Klein. Mathem. Annal. IV, 403.
110. *Etude nouvelle sur l'équilibre et le mouvement des corps solides élastiques dont certaines dimensions sont très petites par rapport à d'autres.* Boussinesq. *Journ. mathém. XXXVI*, 125. — *Compt. rend. LXXII*, 407, 449.
111. *Sur les équations générales des mouvements interieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.* M. Levy. *Journ. mathém. XXXVI*, 369.
112. Ueber das Problem der drei Körper. Hesse. Crelle LXXIV, 97.
113. *Considérations relatives à la théorie du vol des oiseaux.* Bertrand. *Compt. rend. LXXII*, 588.
114. *On the tangent-balance and its application to determining the density of solids and liquids by direct reading.* Zenger. *Phil. Mag. XLI*, 443.
115. Ueber den Einfluss der Rotation eines Schwungrads auf die Bewegung eines damit verbundenen Körpers. R. Hoppe. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 167.
116. *Formules des augmentations que de petites déformations d'un solide apportent aux pressions ou forces élastiques supposées considérables qui déjà étaient en jeu dans son intérieur.* De Saint-Venant. *Journ. mathém. XXXVI*, 275. — *Compt. rend. LXXII*, 355, 391.
117. *Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.* De Saint-Venant. *Journ. mathém. XXXVI*, 308, 373.
118. *Sur la théorie de la poussée des terres.* Carie. *Compt. rend. LXXII*, 366.
   Vergl. Aerodynamik. Akustik. Astronomie. Attraction. Capillarität. Elektricität. Hydrodynamik. Optik. Potential. Variationsrechnung 163. Wärmetheorie.

Methode der kleinsten Quadrate.

119. Ueber die Bestimmung des Gewichts einer durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmten Unbekannten. Jordan. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 350.

Mittelwerth.

120. Ueber die Grenze des Quotienten des arithmetischen und des geometrischen Mittels einer unendlichen arithmetischen Progression. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 520.

N.

Normalen.

121. Ueber Normalen rationaler Raumcurven. Emil Weyr. Crelle LXXIV, 277.
122. Ueber die Anzahl der Doppelnormalen einer rationalen Raumcurve. Emil Weyr. Crelle LXXIV, 279.

O.

Oberflächen.

123. Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie. Klein. Mathem Annal. IV, 573.
124. *Etudes géométriques de quelquesunes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un à un.* *Zeuthen.* Mathem. Annal. IV, 21. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 47.]
125. Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von einfachen Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung. Sturm. Mathem. Annal. IV, 249.
126. *Sur la théorie des surfaces réciproques.* *Zeuthen.* Mathem. Annal. IV, 633.
127. *Sur les surfaces orthogonales.* *Tisserand.* *Compt. rend. LXXII*, 734.
128. *Investigation of the law of the progress of accuracy in the usual process for forming a plane surface.* *Airy.* *Phil. Mag. XLII*, 407.
129. *Description of the cylindroid.* *Ball.* *Phil. Mag. XLII*, 181.
130. *On a surface of the eighth order.* *Cayley.* Mathem. Annal. IV, 558.
Vergl. Abbildung 4, 5, 6. Determinanten in geometrischer Anwendung 48. Krümmung.

Oberflächen zweiter Ordnung.

131. Ueber die ebenen Schnitte der Flächen zweiten Grades. Mertens. Crelle LXXIV, 362.
Vergl. Ellipsoid.

Optik.

132. *On some analogous principles of photometry and the law of attraction.* *Bezold.* *Phil. Mag. XLI*, 241.
133. Zur Theorie der sphärischen Aberration. Geisenheimer. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 387.
134. *On the influence of density and temperature on the spectra of incandescent gases.* *Zoellner.* *Phil. Mag. XLI*, 190.
135. *Sur les phénomènes d'interférences produits par les réseaux parallèles.* *Croya.* *Compt. rend. LXXII*, 855.
136. *On the scattering of light by small particles.* *Strutt.* *Phil. Mag. XLI*, 447.
137. *On the reflexion of light from transparent matter.* *Strutt.* *Phil. Mag XLII*, 81.
138. *On the reflection and refraction of light by thin lagers of metal.* *Jochmann.* *Phil. Mag. XLII*, 452.
139. *On double refraction.* *Strutt.* *Phil. Mag. XLI*, 519.
140. *On the light from the sky, its polarization and colour.* *Strutt.* *Phil. Mag. XLI*, 107, 274.
141. *To determine the degree of polarization in the case of a ray of common light folling obliquely on and being reflected or refracted by a bundle of parallel plates.* *Adams.* *Phil. Mag XLI*, 205.
Vergl. Aerodynamik 9.

P.

Parabel.

142. *On the curve of a river's bed.* *Skarpe.* *Phil. Mag. XLI*, 321.

Philosophie der Mathematik.

143. Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauungen vom Raume. Becker. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 314.
Vergl. Oberflächen 123.

Potential.

144. Beitrag zur Potentialtheorie. Kötteritzsch. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 232, 257
145. Ueber einige Voraussetzungen beim Beweise des Dirichlet'schen Principes. Heine. Math. Annal. IV, 626.
Vergl. Attraction.

Q.

Quadratur.

146. *On a correction sometimes required in curves professing to represent the connexion between two physical magnitudes.* *Strutt.* *Phil. Mag. XLII*, 441.

Quadratwurzel.

Vergl. Kettenbrüche.

R.

Rectification.

147. Ueber die annähernde Rectification beliebiger Curven. Somoff. Mathem. Annal. IV, 505.

Reihen.

148. Ueber trigonometrische Reihen. G. Cantor. Mathem. Annal. IV, 139.
149. Bemerkung über Fourier'sche Reihen. Thomae. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 78.
150. Bemerkungen über einen Cauchy'schen Satz, die Stetigkeit von Summen unendlicher Reihen betreffend. Du Bois-Reymond. Math. Annal. IV, 135.
Vergl. Bestimmte Integrale 30, 31. Functionen 61.

S.

Singularitäten.

151. *Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface.* *Zeuthen.* Mathem. Annal. IV, 1.
152. Ueber die Ausartungen einer Curve dritter Ordnung. Gundelfinger. Math. Annal. IV, 561.
153. *Les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre avec un point double.* *Brioschi.* Mathem. Annal. IV, 95. — *Cremona ibid.* 99.
Vergl. Normalen 122.

Sphärik.

154. Lehrsätze und Aufgaben über die Kugel. Affolter. Mathem. Annal. IV, 185.
155. *On Gauss's pentagramma mirificum.* *Cayley.* *Phil. Mag. XLII*, 311.
156. Die dreiseitige körperliche Ecke. Hemming. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 159.
Vergl. Complanation 37. Elektricität.

Substitution.

157. Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits. Clebsch. Mathem. Annal. IV, 284.
158. *Théorèmes sur les groupes primitifs.* *C. Jordan.* *Journ. mathém. XXXVI*, 383. — *Compt. rend. LXXII*, 854.
159. Ueber eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen. Klein. Mathem. Annal. IV, 346.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 46. Kegelschnitte 100.

T.

Trajectorie.

160. Ueber rechtwinklige Trajectorien. Kiepert. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 420.
161. Orthogonale Trajectorien zu der Schaar von Cycloiden, welche die Bahnlinie und einen Rückkehrpunkt gemeinsam haben. Baur. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 424.

U.

Ultraelliptische Transcendenten.

162. Entwickelung eines Zusammenhanges zwischen den quadratischen Formen von *n* Differentialen und den Abel'schen Transcendenten. Lipschitz. Crelle LXXIV, 150.

V.

Variationsrechnung.

163. Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Lipschitz. Crelle LXXIV, 116.
164. *Application of a new integration of differential equations of the second order to some unsolved problems in the calculus of variations. Challis. Phil. Mag. XLII,* 28, 302. — *Cailey ibid.* 197. — *Todhunter ibid.* 440.

   Vergl. Mechanik 107.

W.

Wärmelehre.

165. *On the hypothesis of molecular motions in thermodynamics. Rankine. Phil. Mag. XLI,* 62.
166. *On the reduction of the second axiom of the mechanical theory of heat to general mechanical principles. Clausius. Phil. Mag. XLII,* 161.
167. Ueber einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz. Clausius. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 82.
168. Beiträge zur Theorie der Gase. Wittwer. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 13.
169. Ueber den Temperaturzustand eines von zwei nicht concentrischen Kugelflächen eingeschlossenen Körpers. Frosch. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 498. [Vergl. Bd. XIV, Nr. 311.]
170. *On athermogenic condensation. Heath. Phil. Mag. XLI,* 127.
171. *Théorie mathématique des machines à air chaud. Bourget. Journ. math. XXXVI,* 31.

   Vergl. Aerodynamik 9.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

172. Ueber die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. XVII, 87.

   Vergl. Methode der kleinsten Quadrate.

Z.

Zahlentheorie.

173. Bemerkung über irrationale Zahlen. Minnigerode. Mathem. Annal. IV, 497.
174. Ueber die mehrfachen Gauss'schen Summen. H. Weber. Crelle LXXIV, 14.
175. Ueber die unendlich vielen Formen der Thetafunction. H. Weber. Crelle LXXIV, 57.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Eine elementare Methode zur Bestimmung von grössten und kleinsten Werthen, nebst vielen Aufgaben. Von Dr. HERMANN HEILERMANN, Director der Realschule zu Essen. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1871.

Das vorliegende kleine, 104 Seiten gr. 8 umfassende und von der Verlagsbuchhandlung in anerkannt schöner Weise ausgestattete Werkchen verfolgt den Zweck, die Aufsuchung der grössten und kleinsten Werthe einer Function blos mit den Mitteln der niederen Mathematik zu bewältigen und damit die interessanten Aufgaben, welche auf der Bestimmung der Maxima und Minima einer Function beruhen, auch für den Lehrstoffbereich zugänglich zu machen, der das Material für Mittelschulen, namentlich Realschulen erster Ordnung bildet. Der Verfasser erreicht seinen Zweck, indem er zunächst auf den ersten 21 Seiten allgemeine Lehrsätze auf elementarem Wege entwickelt, die zum Zwecke haben, die Maxima oder Minima von Functionen allgemeinerer Form zu ermitteln. Hierbei beschränkt sich der Verfasser im Wesentlichen auf ganze algebraische Functionen mit einer oder mehreren willkürlichen Variablen. Es werden zunächst die ganzen algebraischen Functionen zweiten Grades behandelt, dann kleinste Summen von Factoren bei unveränderlichem Product und grösste Producte von Factoren, wenn deren Summe unveränderlich ist. Hierauf werden einige Lehrsätze in Bezug auf die Maxima und Minima mitgetheilt, die den zweiten Grad übersteigen und der Hauptsache nach ganz und algebraisch sind.

Den wichtigsten Theil des ganzen Werkchens bilden die behandelten Beispiele, die zum grossen Theile von anderen Autoren entlehnt, aber doch immer selbstständig behandelt sind. Diese Beispiele zerfallen in planimetrische (S. 22—46), stereometrische (S. 46—76), Beispiele aus dem phoronomischen Theile der Mechanik (S. 76—88), endlich Beispiele aus der Optik. In Bezug auf die Beispiele aus der Mechanik hat es Recensenten gewundert, dass sich keine darunter befinden, welche das stabile oder labile Gleichgewicht behandeln.

Wenn auch immerhin feststeht, dass die vorliegende Methode zur Bestimmung der Maxima und Minima nur dadurch möglich war, dass der Begriff der „Function", wie ihn die höhere Mathematik aufstellt, in die Betrachtung eingeführt werden musste, und dass damit von selbst ein guter Theil der Anschauungen und Begriffe, wie sie streng genommen nur der höhern Mathematik eigenthümlich sind, in das Gebiet der elementaren Mathematik hinübergespielt wurde, so möchte doch Recensent diesen Umstand nicht hoch zu Ungunsten des Werkchens anschlagen, weil die Schüler der obersten Classen unserer Mittelschulen durch die Anwendung der niederen Mathematik auf Mechanik und Physik von selbst leicht empfänglich für den mathematischen Begriff der Function werden. Wichtiger für die Verwendung des Werkchens in Mittelschulen ist der Umstand, dass die meisten der gelösten Aufgaben durch den Rechnungsgang auf den Schüler den Eindruck eines mathematischen Kunststückchens machen, dass damit also der Schüler nicht lernt, seiner eigenen Kraft vertrauen, sondern auf die Beihilfe des Lehrers angewiesen ist. Natürlich trifft dieser Vorwurf weniger den Verfasser, als das Gefäss, in welches der widerstrebende Stoff verpackt werden musste. In der Hand des Lehrers dagegen kann das vorliegende Werkchen recht wohl das Mittel abgeben, den Schülern zu zeigen, wie man auch mit verhältnissmässig geringen mathematischen Hilfsmitteln wichtigen und interessanten Problemen zu Leibe gehen kann, und diesen Erfolg wünscht Recensent dem Werkchen im Interesse der heranwachsenden Jugend von Herzen.

Freiberg, 25. September 1872. Dr. TH. KÖTTERITZSCH.

Die Physik auf Grundlage einer rationellen Molekular- und Aethertheorie zur Erklärung sämmtlicher Naturerscheinungen. Von Med. Dr. JOHANN HAMMERSCHMIED. Wien, 1872. Im Commissionsverlag bei Gerold's Sohn.

Der Zweck des kleinen, nur 111 Seiten kl. 8. umfassenden Werkchens lehnt sich an einen Ausspruch de la Rive's: „Dass man zur tiefern Erkenntniss der physikalischen und chemischen Erscheinungen noch viel gründlicher, als es bisher geschehen, die Rolle untersuchen muss, welche die Bewegungen des Aethers in den Phänomenen der wägbaren Materie spielen, und dass erst dann, wenn die Beziehungen zwischen dem Aether und der ponderablen Materie bekannt sein werden, man sich wird Rechenschaft geben können von den Grunderscheinungen der Physik und Chemie, deren Ursachen uns bisher noch sehr unvollkommen bekannt sind." Der Zweck des Werkchens selbst aber ist ausgesprochen im Vorwort S. V mit den Worten: „Diese Beziehungen nun zwischen dem Aether und der ponderablen Materie in das Klare zu stellen und aus diesen Beziehungen die sämmt-

lichen Naturerscheinungen abzuleiten, sie zu erklären, zugleich sie alle auf eine allgemeine, einheitliche Grundursache zurückzuführen, ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit. Es konnten in derselben und in dem ihr zugemessenen engen Raume begreiflicherweise nicht alle die unzähligen physikalischen Erscheinungen untergeordneter Art, sondern nur von den einzelnen Hauptgruppen derselben die vorzüglichsten und wichtigsten in Betracht gezogen werden."

Hinsichtlich der Molekulartheorie folgt nun der Verfasser der jetzt gewöhnlichen Theorie, indem er, wie es jetzt von den Chemikern durchaus geschieht, unterscheidet zwischen Atom und Molekul; dem Aether aber legt er folgende Eigenschaften bei: „Der Aether ist das unsichtbare Band, welches die gesammte sichtbare Körperwelt umschlingt und zu einem einheitlichen Naturganzen vereinigt; er besteht aus einem die freien Himmelsräume continuirlich ausfüllenden Welt- oder Himmelsäther und einem intramolekularen Aether, welcher zwischen den Atomen und Molekulen der Körper eingelagert ist". Der Aether selbst besteht nun nicht wieder aus Atomen, sondern ist eine continuirliche Massé; er ist weder verdichtbar, noch verdünnbar (also auch nicht elastisch, Bemerkung des Recensenten). Bei der Verdichtung oder Comprimirung eines Körpers wird Aether ausgeschieden und zwar zunächst der von den ponderablen Atomen am entferntesten liegende, weil am schwächsten angezogene Theil. Es ziehen nämlich nach des Verfassers Ansicht die ponderablen Atome den Aether an, können aber selbst aufeinander die Wirkung einer Abstossung ausüben, indem sie, in Rotations- oder Schwingungsbewegung versetzt, auf den umgebenden Aether Stösse ausüben, die sich durch das Aethercontinuum fortpflanzen und auf entgegenstehende ponderable Atome übertragen.

In welcher Art nun aus dieser Annahme über die Constitution der Materie die Naturerscheinungen erklärt werden, dafür dürfte folgende kleine Blumenlese dem Kundigen Anhaltspunkte gewähren.

Auf Seite 11 heisst es: „Und wie die Körperatome durch den intramolekularen Aether abstossend auf einander einwirken, so thun es auch die Himmelskörper, indem sie sich um ihre Axe drehen. Solche Rotationen, wie sie an allen Himmelskörpern und an unserem Planetensysteme mit seiner Sonne in demselben Sinne, nämlich von West nach Ost, vor sich gehen, müsen Stösse auf den Himmelsäther ausüben, die auf die in der Stossrichtung liegenden Himmelskörper verschiebend und entfernend einwirken müssen. Diese centrifugal wirkende Abstossung im Verein mit der centripedal wirkenden Anziehung sind es nach meiner Meinung, welche den kleinen Himmelskörpern (Planeten) die Bahnen um ihren Centralkörper oder um ihre Sonne vorschreiben.

Eine besondere Schwungkraft nach Art der an physischen Körpern, z. B. an einem Kreisel durch eine mechanische Kraft (Zug, Drehung ihrer Axe u. s. w.), erzeugten, die, ein einziges Mal einem Himmelskörper mit-

getheilt, für ewige Zeiten der stetig wirkenden Centripedalkraft das Gleichgewicht halten soll, eine solche Centripedalkraft giebt es an Himmelskörpern nicht und ihre Annahme ist eine reine Fiction."

Auf Seite 14 steht: „Aus dem verschiedenen Verhalten der Körper gegen die Wärme, nämlich aus ihrer verschiedenen Ausdehnung durch die Wärme, d. i. Aetherzufuhr, geht ferner hervor, dass die Körperatome nach der Verschiedenheit der Grundstoffe oder Elemente eine verschiedene Stärke in der Anziehung des Aethers besitzen, und es scheint, wie auch Zernikow meint, dass dieses Anziehungsvermögen von dem Umfange des ponderablen Körperatomes abhängt."

Auf Seite 23 und 24: „Indem in wärmeleitenden Körpern die Atome wechselsweise Wärme oder Aether aufnehmen und an ihre Nachbaratome abgeben, machen sie, wie schon bemerkt wurde, schwingende oder pendelartige Hin- und Herbewegungen."

Auf Seite 25: „Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass das Medium oder der Stoff, welcher diese Schwingungsbewegung der Atome des glühenden Körpers bis in den Grund unseres Auges zur Sehnervenausbreitung (Retina) fortpflanzt, der intramolekulare Aether der Luft und der intramolekulare Aether der durchsichtigen Substanzen unseres Augapfels ist, welcher Aether durch jene Schwingungen in eine entsprechend stossende Bewegung versetzt wird. Dagegen ist zur Erklärung der Empfindung von Wärme die Zufuhr von Aether in unser Hautorgan und in die daselbst sich verästelnden Nerven, zur Empfindung der Kälte aber das Ausströmen von Aether auf ebem diesem Wege nothwendig, und insofern war Gmelin auf der richtigen Fährte."

Auf Seite 31 und 32: „Nach besonderen Wellengattungen zu suchen, wie es die Undulations- oder Oscillationstheorie vom Lichte thut, ist durchaus nicht nothwendig, sondern es werden hierzu genügend rasch auf einanderfolgende Aetherstösse hinreichen, wie sie von einem brennenden Körper ausgesendet werden und wie sie uns die Sonne zusendet, indem sie bei ihrer enormen Rotationsgeschwindigkeit um ihre Axe unzählige und in der raschesten Weise auf einander folgende excentrische Stösse und Verschiebungen auf den Himmelsäther ausübt, die beim Durchdringen unserer Erdatmosphäre in der mannichfachsten Weise abgeändert, nämlich in feinere Zweige gespalten und auf diese Weise zu Aetherstrahlen werden, die wir Sonnenstrahlen nennen. Die mächtigsten oder stärksten davon (dem Querschnitt nach), die rothen Strahlen, werden natürlicherweise an den Atomen der davon getroffenen Körper die stärksten Verschiebungen, d. i. die weitesten Schwingungen und somit auch die stärksten Wärmewirkungen hervorbringen, welche letztere eben auf nichts Anderem beruhen, als auf stossweisen Aetherverdrängungen, erzeugt durch die Schwingungen derselben Atome in dem intramolekularen Aether sowohl gegen das Innere des Körpers, als auch nach Aussen. Solche mächtige Aetherstösse werden es auch

sein, welche die stärksten chemischen Wirkungen hervorbringen, wie z. B. die Spaltung der Kohlensäuremolekule, die vom Chlorophyll (grüner Farbstoff in den Blattorganen der Pflanzen) festgehalten, d. i. auf eine feste Grund- oder Unterlage gebracht werden, in die Atome Kohlenstoff und Sauerstoff.

Zu Trennungen (mit consecutiven oder secundären neuen Verbindungen) weniger fest mit einander verbundener Atomencomplexe chemisch zusammengesetzter Körper werden sich vorzüglich die feineren und schneller schwingenden Aetherstrahlen eignen, welche sich leichter den Weg zwischen den Atomen solcher Verbindungen bahnen können; daher die vorzüglichen chemischen Wirkungen der violetten Strahlen."

Man wird an diesen Proben, zu denen sich noch leicht eine grosse Anzahl anderer hinzufinden lassen, genug ersehen haben, in welcher Weise es der Verfasser mit seinen Erklärungen der Naturerscheinungen wirklich ernst nimmt, wir können hier nur Folgendes betonen:

Bei dem namentlich in neuester Zeit mit bedeutender Heftigkeit ausgebrochenen Streite über die Rolle, welche der Lichtäther in der Natur zu spielen hat, und über die Eigenschaften dieses Lichtäthers selbst muss es von hohem Interesse sein, ein Werkchen zu besitzen, das aus wenigen fundamentalen Eigenschaften der Materie alle Naturerscheinungen zu erklären im Stande ist. Insofern ist das vorliegende Werkchen ganz schätzenswerth. Allein die Erklärungen müssen, wenn sie auch nur qualitativ gehalten sind, doch derartige sein, dass nöthigenfalls der mit guten mathematischen Hilfsmitteln Ausgestattete im Stande ist, daraufhin auch quantitativ die Sache zu untersuchen; denn gerade die quantitative Prüfung erst kann bestimmen, ob wir eine Naturerscheinung richtig beurtheilen oder nicht, und während qualitative Erklärungen von Naturerscheinungen schon vom frühesten Alterthume an geliefert worden sind, so haben doch erst die letzten Jahrhunderte begonnen, auch quantitativ zu prüfen, und haben darin vor Allem die Hauptstütze zu den grossartigen Fortschritten der Naturwissenschaft überhaupt gefunden. Eine quantitative Prüfung aber ist von dem Verfasser nirgends gegeben, kaum versucht, und man kann mit Recht zweifeln, ob diese in anderer Weise angestellt werden könne, als es die Naturwissenschaft bereits gethan hat. Wollte man an die Erklärungen des Verfassers einen quantitativen Massstab anlegen, so würde man bald bei der zu kurz und aphoristisch gehaltenen Schreibweise des Verfassers auf Unklarheiten oder auch Widersprüche stossen, und die kurze Erklärungsweise des Verfassers ohne Berücksichtigung weiterer Consequenzen seiner Ansicht ist es auch, warum wir es hier unterlassen, directe Widersprüche anzuführen, da der Verfasser immer die Ausrede haben würde, dass er Das, was man angreifen wollte, anders gemeint habe.

Hiernach gehört das ganze Werkchen in die Kategorie jener philosophischen Schriften, die schon seit dem frühesten Alterthume da und dort auftauchten und vorgaben, die ganze Natur zu erklären, aber bei genauerem



Nachsehen nur neue Räthsel enthielten; deswegen können wir auch den Inhalt des Schriftchens nicht als neu anerkennen, da nach unserer Meinung die Neuheit einer Erklärung von Naturerscheinungen weniger darauf beruht, überhaupt einen neuen Gedanken darüber geäussert zu haben, als vielmehr darauf, experimentiell oder durch Rechnung nachgewiesen zu haben, dass eine bereits vorhandene Erklärung oder auch eine vollständig neue Erklärung entweder richtig oder falsch sein muss.

Freiberg, 1. October 1872. Dr. TH. KÖTTERITZSCH.

Bibliographie

vom 1. August bis 30. September 1873.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der mathem. physikal. Classe d. königl. bayrischen Akademie der Wissenschaften. 1873. 1. Heft. München, Franz. 12 Ngr.

Astronomische Nachrichten, herausgegeben von C. A. PETERS. 82. Band, Nr. 1—7. Hamburg, Mauke Söhne. pro compl. 5 Thlr.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von OHRTMANN, F. MÜLLER und A. WANGERIN. 3. Bd. Jahrg. 1871. I. Heft. Berlin, G. Reimer. 1 Thlr.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von J. A. GRUNERT. Inhaltsverzeichniss zu Theil 41—54. Greifswald, Koch. ⅔ Thlr.

Reine Mathematik.

GRELLE, F., Elemente der Theorie der von reellen Variabelen abhängigen Functionen. Hannover, Helwing. 2⅔ Thlr.

SCHLÖMILCH, O., Handbuch der algebraischen Analysis. 5. Aufl. Jena, Frommann. 3 Thlr.

GÜNTHER, S., Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form. Erlangen, Besold. 28 Ngr.

COLENSO, J. W., Elemente der Algebra. Stuttgart, Bruchmann. ½ Thlr.

POLLAK, F., Sammlung algebraischer Aufgaben. 4. Aufl. Augsburg, Rieger. ⅚ Thlr.

HESSE, O., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Geraden, des Punktes und des Kreises in der Ebene. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 22½ Ngr.

SALMON, G., Analytische Geometrie der Kegelschnitte, frei bearbeitet von F. W. FIEDLER. 3. Aufl. 1. Abth. Leipzig, Teubner. 2 Thlr. 12 Ngr.

LEGENDRE, A. M., Die Elemente der Geometrie, übersetzt von CRELLE. 6. Aufl. Berlin, Bernhardi. 2 Thlr.

SCHLÖMILCH, O., Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Maasses. 1. Theil: Geometrie und ebene Trigonometrie. 5. Aufl. 2. Theil: Stereometrie, sphärische Trigonometrie und descriptive Geometrie. 3. Aufl. Eisenach, Bacmeister. à 1¼ Thlr.

WITTSTEIN, TH., Lehrbuch der Elementarmathematik. 1. Bd., 2. Abtheil.: Planimetrie. 6. Aufl. Hannover, Hahn. ⅗ Thlr.

SEEGER, H., Die Elemente der Planimetrie. 2. Aufl. Schwerin, Hildebrand. 27½ Ngr.

REIDT, F., Die Elemente der Mathematik. 2. Thl.: Planimetrie. 2. Aufl. Berlin, Grote. 16 Ngr.

REUSCHLE, C. G., Elemente der Trigonometrie, mit ihrer Anwendung in der mathematischen Geographie. Stuttgart, Schweizerbart. 1 Thlr.

RÜHLMANN, M., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 8. Aufl. Leipzig, Arnold. ⅚ Thlr.

KÖHLER, H., Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 12. Aufl. Leipzig, Tauchnitz. 27 Ngr.

STAMPFER, S., Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 9. Aufl. Wien, Gerold. ⅚ Thlr.

BREMIKER, C., Sechsstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 3. Aufl. 1. Lief. Berlin, Nicolai. 12½ Ngr.

SCHLÖMILCH, O., Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Schulausgabe, 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. ⅙ Thlr.

Angewandte Mathematik.

Generalbericht über die europäische Gradmessung. 1872. Berlin, G. Reimer. 1⅙ Thlr.

URLINGER, 20000 Höhenbestimmungen von Bergen der österreichischen Monarchie. Wien, Mayer & Comp. 1⅓ Thlr.

WEISBACH, J., Abriss der Markscheidekunst, herausgegeben von O. CHOULANT. Freiberg, Engelhardt. 2⅚ Thlr.

WEIHRAUCH, J., Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 22 Ngr.

HULLMANN, K., Der Foucault'sche Pendelversuch. Oldenburg, Schmidt. 12 Ngr.

ALBRECHT, M., und S. VIEROW, Lehrbuch der Navigation und ihrer mathematischen Hilfswissenschaften. 4. Aufl. Berlin, v. Decker. 3½ Thlr.

ROSE, G., Elemente der Krystallographie. 3. Aufl., bearb. v. A. SADEBECK. Berlin, Mittler. 2½ Thlr.

WALTER, A., Untersuchungen über Molecularmechanik. Berlin, Calvary. 3⅓ Thlr.

Schorr, F., Der Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe am 9. December 1874. Braunschweig, Vieweg. 1½ Thlr.

Neumann, C., Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze. Leipzig, Hirzel. $1\frac{1}{5}$ Thlr.

——, Die elektrischen Kräfte. Darlegung und Erweiterung der mathematischen Theorien von Ampère, Neumann, Weber und Kirchhoff. 1. Thl. Leipzig, Teubner. 2 Thlr. 12 Ngr.

Physik.

Buff, H., Lehrbuch der physikalischen Mechanik. 2. Thl. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 2 Thlr.

Ditscheiner, L., Ueber das Intensitätsverhältniss und den Gangunterschied der bei Beugung auftretenden polarisirten Strahlen. Wien, Gerold. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Mach, E., Ueber die Stefan'schen Nebenringe und verwandte Interferenzerscheinungen. Wien, Gerold. 3 Ngr.

Wiedemann, G., Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. 2. Bd., 1. Abth. 1. Lief. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 4⅓ Thlr.

Streintz, H., Ueber die Aenderungen der Elasticität in der Länge eines galvanisirten Drahtes. Wien, Gerold. ¼ Thlr.

Czyrnianski, E., Chemische Theorie auf der rotirenden Bewegung der Atome basirt. 4. Aufl. Wien, Meyer. ⅔ Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Theoretische Astronomie. Von Dr. W. KLINKERFUES, Professor, Director der königl. Sternwarte zu Göttingen. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1871. 8. XII und 473 Seiten.

Das Werk ist aus den Vorlesungen des Herrn Verfassers an der Universität zu Göttingen hervorgegangen und die Eintheilung des Stoffes in einzelne Vorlesungen darnach beibehalten worden. Sehr zweckmässig sind jedoch auch besondere Abschnitte, die sachlich Zusammengehöriges umfassen, durch Ueberschriften markirt. Ueber die Behandlungsweise des Stoffes spricht sich der Herr Verfasser, wie folgt, in der Vorrede aus: „Es ist dabei nicht so sehr darauf abgesehen, die Rechnungsformeln specieller Methoden derart zu entwickeln, dass auch der Anfänger vollkommene Ueberzeugung von der Richtigkeit derselben erlangt und für sich die bestimmte gewählte Entwickelung zu reproduciren vermag, als vielmehr eine recht vielseitige Einsicht in das Wesen dieser Rechnungen und einen höheren Grad von Selbstständigkeit zu geben, als der Anfänger durch das Studium einer speciellen Methode erlangen wird. Zu dem Zwecke schien es unerlässlich, häufig ein und dasselbe Thema mit verschiedenen Variationen zu behandeln, wobei denn freilich die Einheit der Darstellung nicht in gleichem Grade zu bewahren ist, als wenn man sich die Entwickelung einer bestimmten Methode zum Ziele setzt. Dass dabei häufig, ja meistens, die einfachste Behandlungsweise eines Problems nicht vorangestellt ist, sondern ziemlich zuletzt kommt, entspricht der bekannten Erfahrung, dass in der Regel das Einfachste nicht zuerst gefunden wird, weil die Augen erst im Erspähen der zugänglichsten Seiten eines Problems geübt sein müssen..."

Das Ganze zerfällt in acht Abtheilungen. Die erste Abtheilung behandelt die Berechnung der Oerter der sich in elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Bahnen um die Sonne bewegenden Himmelskörper. Die Auflösung des Kepler'schen Problems wird u. A. graphisch nach Dubois gegeben, und zwar in vervollkommneter Form durch Hinzufügen der Construction für den Differentialquotienten der mittleren Anomalie nach der

excentrischen Anomalie. Das entsprechende Problem für die Hyperbel wird auch graphisch gelöst. Bemerkenswerth sind zwei Controlformeln für die Berechnung der Gauss'schen Constanten für den Aequator (S. 10), die man sonst nicht aufgeführt findet. Für den Fall der Bewegung eines Cometen in einer sich der Parabel nähernden elliptischen oder hyperbolischen Bahn wird auf die Tafeln von Bessel zur Ermittelung der wahren Anomalie aufmerksam gemacht und zur Berücksichtigung der in denselben nicht berücksichtigten Glieder höherer Ordnung eine Correctionsformel (S. 25) aufgestellt. Leider sind im Anhange alle Hilfstafeln, obgleich ursprünglich dieselben aufgenommen werden sollten, weggelassen worden, was, insofern das Buch ein Lehrbuch sein soll, sehr zu beklagen ist.

Die erste Abtheilung beschäftigt sich noch mit dem allgemeinen Lambert'schen Theorem, sowie mit den Formeln für den Einfluss der Parallaxe, der Aberration und der Schwankungen der Fundamentalebenen. Was letztere anlangt, hätte der Herr Verfasser wohl die Ableitung des Einflusses der Schwankungen aus diesen selbst mit aufnehmen können; denn wo anders, als in der theoretischen Astronomie, ist das Interesse dazu vorhanden?

Die zweite Abtheilung giebt hauptsächlich die Berechnung einer Kreisbahn aus zwei geometrischen Oertern, insbesondere auch nach einer dem Herrn Verfasser von Gauss mündlich mitgetheilten Methode.

Die dritte Abtheilung, welche sich mit der ersten Bestimmung parabolischer Bahnen beschäftigt, entwickelt zunächst die Criterien, um zu entscheiden, ob ein neuerschienener Comet mit einem erwarteten identisch sein könne. Die Olbers'sche Methode wird ausführlich discutirt und die Gauss'sche Umformung mitgetheilt. Obgleich in der ersten Abtheilung die neuere, einfachere Zählweise der Neigungswinkel von Null bis 180 Grad auch aufgeführt worden ist, behält der Herr Verfasser doch hier theilweise die Unterscheidung recht- und rückläufiger Bewegung bei. Die Entwickelungen für den Lambert'schen Satz von der Krümmung des geocentrischen Laufes eines Gestirnes geben dem Herrn Verfasser Veranlassung zur systematischen Behandlung der Hypothesenbildung für die Olbers'sche Methode, deren principielle Vernachlässigungen mit Hilfe eines Kunstgriffes von Carlini verbessert werden.

Stark betont ist die Umformung der Methode für den Aequator, besonders mit Rücksicht auf die Einrichtung der Jahrbücher. Die dem entsprechende directe Rechnung der Gauss'schen Constanten aus den heliocentrischen rechtwinkligen Coordinaten zweier Oerter giebt bereits die erste Abtheilung. Um für eine solche Bahnbestimmung die Ermittelung der Identität mit einem ältern Cometen zu erleichtern, bringt der Schluss des Werkes eine Tafel für die nicht identischen Cometenbahnen, worin für jede derselben sowohl für die Epoche 1750, als wie für 1850 die sechs Constanten und der Abstand des Perihels vom Knoten aufgeführt sind.

Der letzte Abschnitt der dritten Abtheilung erörtert den Ausnahmefall der Olbers'schen Methode und eine Bahnbestimmung aus drei Beobachtungen, wovon eine unvollständig ist.

Die vierte Abtheilung giebt die Bestimmung elliptischer Bahnen aus drei Beobachtungen sowohl mit Rücksicht auf die Entwickelungen Encke's und Hansen's für die Ekliptik als Fundamentalebene, als auch für den Aequator als Grundebene. Für den möglichen Genauigkeitsgrad der Bahnbestimmung wird ein Criterium entwickelt und über die besonderen Fälle des geocentrischen Laufes eine ausführliche Betrachtung angestellt.

Die fünfte Abtheilung behandelt die Bahnbestimmung aus vier Beobachtungen, von denen die äusseren oder die mittleren vollständig sind, namentlich und durch ein längeres Beispiel erläutert in der Form, welche Bruhns der Gauss'schen Entwickelung für den zweiten Fall gegeben hat.

So vielseitig die Untersuchungen der sich mit den Bahnbestimmungen befassenden Abtheilungen auch sind, so vermissen wir doch eingangs derselben eine übersichtliche Zusammenstellung aller Gleichungen, welche den drei Beobachtungen entsprechen, ähnlich wie Encke im Berl. Jahrb. 1854 beginnt. Für den Anfänger ist damit ein sicherer Leitfaden für das Folgende gewonnen, wovon sich Referent in eigenen Vorträgen über Bahnbestimmungen zu überzeugen Gelegenheit hatte.

Die sechste Abtheilung bespricht zunächst die Bildung von Normalörtern für den Fall, wo eine Bahn aus zahlreichen Beobachtungen zu ermitteln ist, und die Methode der Verbesserung vorläufiger Elemente durch Variation der Distanzen zweier äussersten Orte. Zur Ableitung eines wahrscheinlichsten Elementensystems giebt der Herr Verfasser die Differentialformeln und eine 21 Seiten lange Abhandlung über die Methode der kleinsten Quadrate; er sucht aber auch, ausgehend von der Variation der Distanzen, einen neuen Weg, bei welchem nur drei Unbekannte zu bestimmen sind, einzuschlagen, um das wahrscheinlichste Elementensystem zu erhalten. Wir müssen jedoch bemerken, dass diese neue Methode zum Mindesten noch weiteren Ausbaues bedarf, was am Schlusse dieses Referats nachgewiesen werden soll.

Die siebente Abtheilung handelt von der Bestimmung der Bahnen der Doppelsterne. Genäherte Elemente werden durch ein gemischt graphisch und rechnendes Verfahren abgeleitet, wobei auf die Construction von Ellipsen mittels des Storchschnabels mit Querleiste aufmerksam gemacht wird. Zu genauen Bahnbestimmungen sind Formeln sowohl für den Fall von sechs Positionswinkeln und einer Distanz, als vier Positionswinkeln und drei Distanzen abgeleitet. Es folgen demnächst Anwendungen auf die Berechnung der hypothetischen Parallaxe oder der Masse eines Doppelsternpaares bei bekannter Parallaxe. Auch der Fall einer unsichtbaren Componente eines Doppelsternsystems wird erläutert und die Theorie des Saturnringes,

wie diejenige der Satellitenbahnen durch Zurückführung auf die der Doppelsternbahnen in den Grundzügen entwickelt.

Die achte Abtheilung endlich betrifft die Bahnbestimmung der Sternschnuppen und Meteore. Es wird sowohl eine Näherungsmethode zum Zwecke der Recognoscirung der Identität der Sternschnuppenbahnen mit Cometenbahnen, als auch eine strengere Methode gegeben, nachdem die Bestimmung der Höhe und Geschwindigkeit aus correspondirenden Beobachtungen behandelt und insbesondere auch eine Formel für den Einfluss der Beobachtungsfehler auf die Höhenbestimmung abgeleitet worden ist.

Das vorliegende Werk enthält, wie aus dem vorstehenden Ueberblick des Inhalts hervorgeht, Vieles, was im Zusammenhange mit Bahnbestimmungen steht, sonst aber in Lehrbüchern nicht gefunden wird. Durch die Vergleichung der bekannten Methoden unter sich und mit den Entwickelungen des Herrn Verfassers bietet es ebenfalls des Interessanten in grosser Fülle und es wird sich nicht nur unter den Studirenden Freunde erwerben. Zahlreiche Beispiele und auch Figuren erleichtern das Studium und es ist bemerkenswerth, dass in den ersteren Summen- und Differenz-Logarithmen thunlichst verwendet worden sind. Die Figuren hätten vielleicht hier und da durch Eintragen der Bezeichnungen für Seiten und Winkel übersichtlicher gestaltet werden können. Ueberhaupt sind die Auseinandersetzungen nicht allenthalben für ein erstes Studium geeignet, was namentlich bei der Entwickelung der Vatiation der Distanzen in der Form, welche der Herr Verfasser ihr giebt, hervortritt. Wir erlauben uns, auf diese Methode etwas näher einzugehen.

Sind die Radien vectoren der äusseren zwei Oerter eines Gestirns in drei Hypothesen

I) $\varrho_0 + m, \quad \varrho''_0 + m'',$

II) $\varrho_0 + m_1, \quad \varrho''_0 + m''_1,$

III) $\varrho_0 + m_2, \quad \varrho''_0 + m''_2,$

und sind die bezüglichen Abweichungen, Rechnung — Beobachtung, eines mittleren Ortes resp. in Rectascension und Declination

I) $n, \quad s,$

II) $n_1, \quad s_1,$

III) $n_2, \quad s_2,$

so hat man für eine neue Hypothese nach der Darstellung des Herrn Verfassers die Distanzen

$$\varrho_0 + \varDelta\varrho_0, \quad \varrho''_0 + \varDelta\varrho''_0,$$

wobei zu setzen ist

$$1) \quad \begin{cases} \varDelta\varrho_0 = \lambda m + \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2, \\ \varDelta\varrho''_0 = \lambda m'' + \lambda_1 m''_1 + \lambda_2 m''_2, \end{cases}$$

und sind die Coefficienten λ, λ_1, λ_2 zu bestimmen aus den Gleichungen

$$2)\quad \begin{cases} 0 = \lambda n + \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2, \\ 0 = \lambda s + \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2, \\ 1 = \lambda + \lambda_1 + \lambda_2. \end{cases}$$

Ein strenger Beweis hierzu scheint uns zu fehlen, obgleich er nicht mehr Raum erfordert hätte, als die gegebene Entwickelung. Nimmt man nämlich mit dem Herrn Verfasser an, dass die Aenderungen der Distanzen nur Aenderungen der ersten Ordnung in den abgeleiteten Grössen erzeugen, so kann man setzen

$$3)\quad \begin{cases} n = (m - \Delta \varrho_0) p + (m'' - \Delta \varrho''_0) p'', \\ n_1 = (m_1 - \Delta \varrho_0) p + (m''_1 - \Delta \varrho''_0) p'', \\ n_2 = (m_2 - \Delta \varrho_0) p + (m''_2 - \Delta \varrho''_0) p'', \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} s = (m - \Delta \varrho_0) q + (m'' - \Delta \varrho''_0) q'', \\ s_1 = (m_1 - \Delta \varrho_0) q + (m''_1 - \Delta \varrho''_0) q'', \\ s_2 = (m_2 - \Delta \varrho_0) q + (m''_2 - \Delta \varrho''_0) q'', \end{cases}$$

worin p, p'', q, q'' die Differentialquotienten der Rectascension und Declination des mittleren Ortes nach ϱ_0 und ϱ''_0 bezeichnen. Die sechs Gleichungen enthalten sechs Unbekannte: p, p'', q, q'', $\Delta \varrho_0$, $\Delta \varrho''_0$. Bildet man aus den linken und rechten Seiten der beiden Systeme Gleichungen für die Ausdrücke

$$\lambda n + \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2, \quad \lambda s + \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2,$$

so bemerkt man leicht, dass in der That für $\Delta \varrho_0$ und $\Delta \varrho''_0$ die Beziehungen 1) statthaben, falls λ, λ_1, λ_2 nach 2) bestimmt werden; insofern nämlich die Verhältnisse $p:p''$ und $q:q''$ im Allgemeinen verschiedene Werthe haben.

Fände genau die Voraussetzung des Verschwindens der Glieder höherer als erster Ordnung in den rechten Seiten der 3) und 4) statt, so müsste die neue Hypothese nächst den äusseren beiden Oertern auch den mittleren Ort streng erfüllen. Der Herr Verfasser giebt nun an, dass unter dieser Voraussetzung irgend ein der neuen Hypothese entsprechendes Element der Bahn auch gefunden werden kann nach einer den Gleichungen 1) entsprechenden Formel. Sind z. B. i^0, i_1^0, i_2^0 die Neigungen in den drei Hypothesen, so wird für die neue Hypothese

$$5)\quad i = \lambda i^0 + \lambda_1 i_1^0 + \lambda_2 i_2^0.$$

Auch diese Formel lässt sich kurz ähnlich wie die 1) beweisen. Denn es ist

$$6)\quad \begin{cases} i^0 = i + \dfrac{\partial i}{\partial \varrho_0}(m - \Delta \varrho_0) + \dfrac{\partial i}{\partial \varrho''_0}(m'' - \Delta \varrho''_0), \\ i_1^0 = i + \dfrac{\partial i}{\partial \varrho_0}(m_1 - \Delta \varrho_0) + \dfrac{\partial i}{\partial \varrho''_0}(m''_1 - \Delta \varrho''_0), \\ i_2^0 = i + \dfrac{\partial i}{\partial \varrho_0}(m_2 - \Delta \varrho^0) + \dfrac{\partial i}{\partial \varrho''_0}(m''_2 - \Delta \varrho''_0), \end{cases}$$

und hieraus folgt durch Multiplication mit resp. λ, λ_1, λ_2, unter Rücksichtnahme auf die dritte Gleichung 2) die Formel für i. Man erkennt zugleich, dass ein nach 5) berechnetes Elementensystem nicht mehr den nach 1) be-

rechneten Distanzen entspricht, sobald die drei Coefficienten die dritte Gleichung 2) nicht mehr erfüllen. Berechnet man unter dieser letzteren Voraussetzung nach 5) das Elementensystem, so wird dieses alsdann die äusseren Oerter auch nicht mehr streng erfüllen. Dagegen ist die strenge Darstellung der äusseren Oerter durch ein nach 5) berechnetes Elementensystem unabhängig von der Erfüllung der ersten beiden Gleichungen 2) durch das gewählte System λ, λ_1, λ_2. Trennt man nämlich in den Gleichungen 3) und 4) von den n und s Verbesserungen δ_1 und δ_2 wegen der Beobachtungsfehler ab, so gehen die ersten beiden Gleichungen 2) über in

$$\delta_1 = \lambda n + \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2,$$
$$\delta_2 = \lambda s + \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2.$$

Ist nun die Anzahl der darzustellenden mittleren Orte grösser als Eins, so sind die Werthe $\frac{\lambda_1}{\lambda}$, $\frac{\lambda_2}{\lambda}$ nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen aus den Gleichungen

$$7)\quad \begin{cases} \frac{\delta_1}{\lambda} = n + n_1 \frac{\lambda_1}{\lambda} + n_2 \frac{\lambda_2}{\lambda}, \\ \frac{\delta_2}{\lambda} = s + s_1 \frac{\lambda_1}{\lambda} + s_2 \frac{\lambda_2}{\lambda}, \end{cases}$$

welche für jeden der mittleren Orte aufzustellen und als Fehlergleichungen mit gleichem Gewicht zu betrachten sind. Um aber auch die äusseren Orte nicht völlig zu befriedigen, sondern sie annähernd gleich den mittleren Oertern als fehlerhaft einzuführen, schlägt der Herr Verfasser vor, dem System 7) die dritte Gleichung 2) in der Form

$$7^*)\quad 0 = \varepsilon + \frac{\varepsilon\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{\varepsilon\lambda}{1-\lambda} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda}$$

als Fehlergleichung beizufügen, und zwar entsprechend zwei äusseren vollständigen Beobachtungen mit dem Gewicht 4. Für ε soll in diese Gleichung ein Näherungswerth des mittleren Fehlers der Gleichungen 7) eingeführt und der Coefficient $\frac{\varepsilon\lambda}{1-\lambda}$ könne mit einem Näherungswerth von λ berechnet werden.

Wir sind der Ansicht, dass die Gleichung 7*) entweder nichts nützt oder gar schadet. Führt man nämlich in 7*) für λ den Werth ein, der aus 7) allein hervorgeht, so wird 7*) genau erfüllt, da diese Gleichung nur eine Umformung der dritten Gleichung 2) ist:

$$7\dagger)\quad 1 = \lambda + \lambda_1 + \lambda_2;$$

eine neue Ausgleichung des combinirten Systems 7. 7*). 7*) kann daher nichts Neues geben. Führt man aber einen andern Werth für λ ein, so wird 7*) von den Werthen $\frac{\lambda_1}{\lambda}$, $\frac{\lambda_2}{\lambda}$, die aus der Ausgleichung von 7) allein hervorgehen, nicht mehr erfüllt und eine Ausgleichung des combinirten Systems

7.7*) giebt nun etwas andere Werthe von $\frac{\lambda_1}{\lambda}$, $\frac{\lambda_2}{\lambda}$; indessen sind diese offenbar von dem zufällig gewählten Näherungswerthe λ abhängig, also unbrauchbar. Die Idee des Herrn Verfassers, λ, λ_1, λ_2 nicht streng der Formel 7†) entsprechend zu wählen, um die äusseren Orte nicht ganz zu befriedigen, scheint uns somit nicht genügend ausgebildet. Immerhin wäre es möglich, dass aus derselben sich ein Näherungsverfahren entwickeln liesse. Eine ganz strenge Rechnungsmethode aber kann nie daraus abgeleitet werden, weil es unmöglich ist, die sechs von einander unabhängigen Bahnelemente durch drei zu ersetzen.

Aachen. Prof. Dr. F. R. HELMERT.

Mathematische Excursionen. Ein Uebungsbuch zum Gebrauche in den oberen Classen höherer Lehranstalten und beim Selbststudium. Zugleich Sammlung mathematischer Abiturientenaufgaben. Von Dr. GUSTAV EMSMANN. Halle a.S., Verlag von Louis Nebert. 1872.

Wie schon der Titel andeutet, soll das vorliegende, 218 Seiten g. 8. umfassende Werkchen Lehrenden und Lernenden in den oberen Classen höherer Lehranstalten Stoff bieten, um sich theils im Vortrage, theils in der Aneignung mathematischer Behandlungen von Aufgaben zu üben. Der behandelte Stoff umfasst zunächst eine Reihe von planimetrischen Lehrsätzen über Gerade und Kreis, die zu den seltener vorgeführten gehören; namentlich hat uns die in der Theorie des Feuerbach'schen Kreises gipfelnde Discussion gefallen, in die die wichtigsten Lehrsätze über die merkwürdigen Punkte des Dreiecks mit verflochten sind. Die 20 zur Construction des Feuerbach'schen Kreises besprochenen Aufgaben bilden eine wichtige Uebungsschule für dieses merkwürdige geometrische Gebilde. Die übrigen abgehandelten Themata hängen weniger unter sich zusammen und umfassen der Reihe nach die Construction der linearen Wurzeln einer quadratischen Gleichung, die Entfernungsörter des Dreiecks, den Quotient zweier Dreiecksseiten, die Benutzung der quadratischen Gleichungen zur Bestimmung von Maximal- und Minimalwerthen, die Differenz der Höhensegmente einer Dreiecksseite, die Discussion der Gleichungen zweiten Grades für zwei Parallelcoordinaten, Einiges über Kettenbrüche, die Summation einiger Reihen (arithmetische, geometrische und trigonometrische), einige Sätze über Ecktrasnversalen, einige Berührungsaufgaben, einige geometrische Oerter, zwei Parabelaufgaben, drei Lehrsätze und zwei Aufgaben aus der Stereometrie; einen werthvollen Schluss des ganzen Werkchens bildet endlich noch eine Sammlung von 333 Abiturientenaufgaben, theils geometrischer, theils arithmetischer und algebraischer Art.

Das ganze Werkchen ist das Ergebniss fortgesetzten aufmerksamen Studiums der einschlagenden, im Grunert'schen Archiv erschienenen Ab-

handlungen und der mathematischen Programmdissertationen von Gymnasien und Realschulen; es will, wie aus einer Aeusserung des Verfassers in der Vorrede (S. V am Ende) hervorgeht, dem Lehrer der Mathematik ein Mittel gewähren, um den Schülern mustergiltige Abhandlungen mathematischen Stoffes vorzuführen, damit diese erkennen und immer wieder sich vor Augen führen können, wie auch der äussern Form nach die mathematische Behandlung eines Stoffes auf künstlerische Ausführung Anspruch erhebt.

Sehen wir uns aber den Inhalt des Werkchens genauer an, so müssen wir zunächst sagen, dass uns die Anordnung des Stoffes etwas betroffen hat, insofern rein geometrische Betrachtungen von einander getrennt sind durch algebraische; am meisten aber fanden wir Anstoss, als wir beim Durchlesen des Werkchens plötzlich und ohne weitere Modification die Differentialrechnung angewendet fanden, um gewisse Beweise zu führen, so auf Seite 160 Nr. 86 flgg. In gleicher Weise hat der Verfasser kein Bedenken getragen, plötzlich und ohne besondere Modificirung vom Moivre'schen Satze Gebrauch zu machen, so in Nr. 75 S. 142, Nr. 76 S. 143 und 144.

Wenn schon hierdurch der Gebrauch des Werkchens zum Selbststudium für Schüler, wie wenigstens diese Bestimmung der Titel des Werkchens mit erwarten lässt, illusorisch wird, so möchten wir noch vielmehr den specifisch mathematischen Inhalt als ungeeignet verwerfen, denn so sehr wir auch davon überzeugt sind, dass ein mathematisch geschulter Geist des Schülers fähig sei, mit Erfolg auch andere Disciplinen später zu treiben, ebenso sehr müssen wir auch der neulich von Hattendorff ausgesprochenen Ansicht beipflichten, dass es nicht Aufgabe der Mittelschulen sein kann, Mathematiker heranzubilden. Wenn aber der Verfasser sein Buch vorwiegend für Lehrer bestimmt haben will, so möchten wir ihm entgegnen, dass dann eine zweckmässigere Ordnung des Stoffes wünschenswerth gewesen wäre, damit der Lehrer zeigen könne, was man mit Hilfe einer gewissen Anzahl mathematischer Lehrsätze unter sonst günstigen Umständen machen kann. In dieser Hinsicht können wir z. B. hervorheben, dass der Lehrer recht wohl nach der Betrachtung der Lehre vom Kreise im Stande sein kann, die Lehre vom Feuerbach'schen Kreise als gesonderte Untersuchung vorzuführen. Wenn aber der Verfasser dem Lehrer nur Stoff zu grösseren Vierteljahrsaufgaben geben wollte, so müssen wir sagen, dass derjenige Lehrer, der überhaupt solche Aufgaben stellt, wohl nie über Stoffmangel zu klagen hat, dass vielmehr seine Hauptklage die ist, wie soll er die Aufgabe stellen, damit der behandelte Lehrstoff verwendet werden könne. Endlich müssen wir noch zur Ehre des Lehrerstandes überhaupt betonen, dass wir das Buch auch als Hilfsmittel zum Selbststudium für Lehrer nicht anerkennen können; denn es hat zwar der Lehrer für Mathematik immer „von hoher Warte auszuspähen", dieses aber zu dem Zwecke, um möglichst auch die neuen Disciplinen der Mathematik sich anzueignen

zu dem Zwecke, um seine Lehrmethode zu verbessern und den Schülern bei ihrem Uebergange auf Hochschulen den Weg eröffnet zu haben, die dort gelehrten Disciplinen mit Erfolg hören zu können.

So sehr wir daher dem Verfasser zu seinen „Sechszehn mathematisch-physikalischen Problemen" seiner Zeit im Stillen Glück gewünscht haben, so wenig können wir ihm zu dem vorliegenden Werkchen ein günstiges Prognostikon stellen. Es hat das Werkchen auf uns den Eindruck einer wenig geordneten Sammlung heterogenen Stoffes gemacht. Sollten wir uns täuschen, so würde dies uns im Interesse des Verfassers ganz angenehm sein.

Freiberg, 22. November 1872. Dr. Th. Kötteritzsch.

Absolute Geometrie. Nach Johann Bolyai, bearbeitet von Dr. J. Frischauf, Professor an der Universität in Graz. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner. 1872.

Den Zweck des vorliegenden Buches kann Referent nicht besser angeben, als durch Abdruck der Worte, mit denen der Herr Verfasser dasselbe einleitet:

„Von den Voraussetzungen, welche die Grundlage der euklidischen Geometrie bilden, ist das bekannte elfte Axiom fortwährend angezweifelt worden, ohne dass es gelungen wäre — trotz aller Bemühungen — einen Beweis für dasselbe zu finden. Die Frage nach einem Beweis dieses Axioms wurde erst dann vollständig erledigt, als durch Aufstellung einer in sich widerspruchsfreien Geometrie, die sich auf die entgegengesetzte Voraussetzung stützt, die Unbeweisbarkeit dieses Axioms ersichtlich war. Die Idee der Durchführung einer auf der Leugnung des Parallelaxioms beruhenden Geometrie wurde von Gauss bereits 1792 gehegt, aber von ihm ausser Andeutungen in Briefen darüber Nichts veröffentlicht. Vollständige Darstellungen sind gleichzeitig von dem russischen Mathematiker Lobatschewsky und den beiden siebenbürgischen Mathematikern Wolfgang und dessen Sohn Johann Bolyai gegeben worden. Des Letzteren Arbeiten sind in einem Appendix zu einem Werke des Ersteren enthalten und zeichnen sich durch eine wahrhaft meisterhafte Darstellung aus. Dieser Appendix des J. Bolyai bildet die Grundlage der vorliegenden Bearbeitung, bei welcher ich hauptsächlich die Einführung in dieses gegenwärtig als höchst wichtiger Theil der Mathematik erkannte Gebiet der reinen Geometrie bezweckte und wozu wegen ihrer Vollständigkeit und des elementaren Charakters die Schrift Bolyai's am geeignetsten sein dürfte."

Referent ist zwar hinsichtlich der „Wichtigkeit" dieser Untersuchungen wesentlich andrer Ansicht, wie der Verfasser. Dies hindert ihn aber nicht, die Unternehmung des Letzteren als eine sehr verdienstliche anzuerkennen, zumal derselbe seiner Aufgabe sich in einer Weise entledigt hat, dass nun

Jeder, der sich für diesen Gegenstand interessirt und nur einigermassen mit den Elementen der Mathematik vertraut ist, sich auf die leichteste Art eine vollkommene Uebersicht über die „Wissenschaft“ erwerben kann, aus deren blosser Existenz die Unbeweisbarkeit des elften Axioms hervorgehen soll.

Ein näheres Eingehen auf den Inhalt würde uns — wollten wir klar werden — über die Grenzen eines blossen Referats hinausführen, und eine blosse Uebersicht über denselben würde nur Worte liefern, bei denen der Leser schwerlich Etwas denken könnte. Wir verweisen darum Den, der sich für die Sache interessirt, auf das Buch selbst, das nur 96 Seiten zählt und durchaus klar und leicht fasslich geschrieben ist. Was wir hier noch vorbringen wollen, sind einige Bedenken, die uns beim Lesen dieser Schrift gekommen sind und die uns immer mehr das ganze hier Vorgeführte wissenschaftliche Gebäude als eine jener sonderbaren Verirrungen erscheinen lässt, denen der menschliche Geist so leicht anheimfällt, wenn ihn die immer weiter gehende Abstraction allzusehr von der Quelle aller Erkenntniss, der unmittelbaren Anschauung, entfernt.

Die „absolute Geometrie“ giebt ausser dem elften alle übrigen euklidischen Axiome zu; wenigstens thut dies die hier vorliegende, wenn wir absehen von dem im Anhange gegebenen Versuche Wolfgang Bolyais, die Existenz der Geraden und der Ebene aus „einfacheren“ Axiomen abzuleiten.

Ausgehend von diesen Axiomen, anerkennt sie zunächst diejenigen Congruenzsätze, die unabhängig sind vom Parallelenaxiom, und zeigt dann, dass

1. die Winkelsumme eines Dreiecks nicht grösser ist als zwei Rechte;
2. die Winkelsumme aller Dreiecke zwei Rechte betragen muss, wenn sie in einem Dreiecke zwei Rechte beträgt.

Statt dann das Axiom *, auf welchem Legendre's Beweis für den Satz beruht, dass die Winkelsumme eines ebenen Dreiecks nicht weniger als zwei Rechte betragen kann, näher zu untersuchen, stellt sie sich die Frage: Wie wäre es, wenn die Winkelsumme eines Dreiecks weniger als zwei Rechte betrüge? Als Antwort erhält man dann eine Reihe von Ergebnissen, die Jeder, der ihnen mit der Anschauung folgen will, in die Worte zusammenfassen wird: „Ja, dann wären halt die geraden Linien eigentlich krumm!“

Das erste Ergebniss ist, dass sich durch einen Punkt in der Ebene unendlich viele Geraden ziehen lassen, die eine gegebene Gerade in der Ebene nicht schneiden. Die schneidenden werden von den nicht schneiden-

* Dass durch jeden Punkt in der Oeffnung eines hohlen Winkels eine Gerade gezogen werden kann, welche beide Schenkel schneidet.



den durch zwei im Unendlichen schneidende getrennt, welche Parallele heissen. Ist BAB' die gegebene Gerade, C ein Punkt ausserhalb derselben, CD die Parallele in der Richtung AB (d. h. derjenigen, welche der Geraden AB in dieser Richtung im Unenlichen begegnet), CD' die Parallele zur Richtung AB', CA senkrecht auf BB', so ist $\angle DCA = \angle D'CA < 90^0$, und zwar sind diese Winkel um so kleiner, je grösser CA; für unendlich kleines CA gehen sie in den Rechten über, wird aber CA immer grösser, so werden diese Winkel stets kleiner bis zu Null für $CA = \infty$.

Ich erlaube mir nun, dieses Ergebniss in seiner Consequenz noch weiter fortzuführen, als es der Verfasser thut, was uns zu einem höchst merkwürdigen Endresultate führen wird.

Die Fläche des Winkels DAD' fällt, weil derselbe kleiner als 180^0, offenbar in eine der beiden Halbebenen, in welche die ganze Ebene durch das Loth in C auf CA getheilt wird. Andrerseits fällt die eine der Halbebenen, in welche die Ebene durch die Gerade BB' getheilt wird, die doch ganz innerhalb des Winkels DAD' liegen soll, mit einem Theil der Fläche dieses Winkels zusammen. Halbebenen sind aber doch congruent, mithin auch gleich. Wir hätten also das äusserst merkwürdige Resultat, dass ein Ding zugleich grösser, und doch auch kleiner, wie ein und dasselbe zweite sein kann.

Es ist leicht, eine Reihe von „in sich selbst widerspruchsfreien" Sätzen auch aus sich widersprechenden Voraussetzungen abzuleiten, wenn man nur solche Consequenzen vermeidet, in denen der Widerspruch zu Tage tritt. Die blosse Existenz der sogenannten absoluten Geometrie erscheint uns darum als ein sehr schwacher Beweisgrund für die Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms.

Neu war uns, zu erfahren, dass man von jeher das elfte Axiom Euklid's bezweifelt habe. Bisher glaubten wir, Gauss sei der Erste gewesen, der durch seine philosophischen Ansichten über den Raum zu einem solchen Zweifel geführt worden sei, und Lobatschewsky sei der Einzige, der mit seinen astronomischen Messungen einen vergeblichen Versuch gemacht habe, dasselbe zu widerlegen. Bekannt sind uns nur Angriffe auf die Unbeweisbarkeit dieses Axioms. — In der That erscheint doch der Versuch, Etwas zu beweisen, nicht als ein Ausdruck für den Zweifel an der Richtigkeit. Hat man den, so sucht man zu widerlegen, wie Lobatschewsky, und nicht zu beweisen, wie Legendre.

Schaffhausen, Ende Januar 1873. J. C. Becker.

Berichtigung.

Auf S. 33 der Literaturzeitung hat der Unterzeichnete bei Gelegenheit des Referates über die Jubiläumsausgabe des Copernicus einige Sätze aus-



gesprochen, welche er nach später von ihm angestellten und in der Augsburger allgemeinen Zeitung vom 17. Juli 1873, Beilage, veröffentlichten Untersuchungen zu berichtigen, beziehungsweise zu ergänzen wünscht. Erstens haben wir aus *Hipler, Spicilegium Copernicanum*, S. 120 Anm. 4, entnommen, dass die Ableitung *caelum* von *caelare* nicht etwa dem Copernicus angehört, sondern von diesem muthmasslich dem Plinius entnommen ist, welcher sich *nat. hist. II*, 3 (4, 9) folgendermassen ausdrückt: *Caelum quidem haud dubie caelati argumento diximus, ut interpretatur Varro.* Zweitens hatte Copernicus oder Rheticus doch wohl noch neben jenem philologischen Motive, welches in der Literaturzeitung angeführt ist, noch anderweitige Veranlassung, die erste Seite des Manuscripts in der Reinschrift für den Setzer und folglich auch im Drucke wegzulassen. Diese Einleitung konnte nämlich nicht bestehen bleiben, nachdem die Widmung an Papst Paul III. zu dem Originalmanuscripte hinzugetreten war. Für die nähere Auseinandersetzung verweisen wir, um nicht uns selbst abschreiben zu müssen, auf unsern oben erwähnten Aufsatz.

CANTOR.

Bibliographie

vom 1. bis 31. October 1873.

Periodische Schriften.

Sitzungsberichte der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-physikal. Classe. 1873, I u. II. Leipzig, Hirzel. à ⅓ Thlr.

Annalen der königl. Sternwarte bei München, herausgeg. von J. v. LAMONT. 19. Bd. München, Franz. 1⅔ Thlr.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft, herausgegeben von A. AUWERS und A. WINNECKE. 8. Jahrg. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. ½ Thlr.

Jahresbericht der norddeutschen Seewarte für das Jahr 1871, herausgeg. von W. v. FREEDEN. Hamburg, Meissner. 12 Ngr.

Derselbe für das Jahr 1872. Ebendas. 12 Ngr.

Reine Mathematik.

CLEBSCH, A., Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen. Leipzig, Teubner. 12 Ngr.

SCHLÖMILCH, O., Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis. (2. Thl.: Das Compendium der höheren Analysis.) 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 3 Thlr.

SCHLÖMILCH, O., Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 1. Thl. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 2 Thlr.

KRAUSE, M., Zur Transformation der Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Heidelberg, Winter. ⅓ Thlr.

SCHRÖDER, E., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 1. Bd. Leipzig, Teubner. 2⅔ Thlr.

SINRAM, TH., Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 1. Thlr. Hamburg, Meissner. 18 Ngr.

SALMON, G., Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven; deutsch bearb. von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner. 3⅓ Thlr.

NIEMTSCHIK, R., Ueber die Construction der einander eingeschriebenen Linien zweiter Ordnung. (Akad.) Wien, Gerold. 6 Ngr.

GAUSS, C. F., Werke. 4. Bd. (Geometrie und Methode der kleinsten Quadrate.) Göttingen, Rente. 6 Thlr.

Angewandte Mathematik.

BAUERNFEIND, C. M., Elemente der Vermessungskunde. 4. Aufl. 2 Bde. Stuttgart, Cotta. 5 Thlr.

HERZOG, E., Praktische Anleitung zum Höhenmessen mittels des Dosenbarometer. 2. Aufl. Leipzig, Engelmann. ½ Thlr.

KETTELER, E., Astronomische Undulationstheorie oder die Lehre von der Aberration des Lichts. Bonn, Neusser. 2 Thlr.

WEISSENBORN, Das Hyperboloid bei Räderwerken. Eisenach, Bacmeister. ¼ Thlr.

Physik.

HUGGINS, W., Ergebnisse der Spectralanalyse in Anwendung auf die Himmelskörper. 3. Aufl. Leipzig, Quandt & Händel. ⅓ Thlr.

WALTENHOFEN, A. v., Ueber ein allgemeines Theorem zur Berechnung der Wirkung magnetisirender Spiralen. (Akad.) Wien, Gerold. 3 Ngr.

HORNSTEIN, C., Ueber die Abhängigkeit der täglichen Variationen des Barometerstandes von der Rotation der Sonne. (Akad.) Wien, Gerold. ⅙ Thlr.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1872.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Akustik.

176. *De la vitesse du son dans les tuyaux sonores.* Bourget. *Compt. rend. LXXIII,* 1203.
177. *Sur les sons produits par des ébranlements discontinus et en particulier à l'aide de la sirène.* Terquem. *Compt. rend. LXXIII,* 165.

Analytische Geometrie der Ebene.

178. *Mémoire de géométrie analytique.* Laguerre. *Journ. mathém. XXXVII,* 1.
179. *Des intersections des faisceaux de courbes et des faisceaux de leurs polaires inclinées.* Dewulf. *N. ann. math. XXXI,* 297.
180. *Enveloppe de la droite qui joint les extrémités des deux aiguilles d'une montre ordinaire.* Brocard. *N. ann. math. XXXI,* 329.
181. *Remarques sur une famille de courbes planes.* Allégret. *N. ann. math. XXXI,* 162.
182. *Lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur ses tangentes.* Brocard. *N. ann. math. XXXI,* 283.
183. *Propriété de l'ellipse de Cassini.* Brocard. *N. ann. math. XXXI,* 507.
184. *Lieu des centres des circonférences doublement tangentes à un limaçon de Pascal.* Callandreau. *N. ann. math. XXXI,* 508.
185. *Roulement d'un arc de courbe donné d'abord extérieurement puis intérieurement sur le même arc d'une courbe fixe.* A. Transon. *N. ann. math. XXXI,* 258.

Vergl. Doppeltangenten. Ellipse. Kegelschnitte. Kreis. Krümmung 278, 279. Normalen 321. Trajectorie.

Analytische Geometrie des Raumes.

186. *Etude d'un complexe du second ordre.* Painvin. *N. ann. math. XXXI,* 49, 97, 202, 289, 481, 529.
187. *Extrait d'une théorie du déplacement d'une figure qui se déforme.* Durrande. *Compt. rend. LXXIII,* 736; *LXXIV,* 1243.

Vergl. Hyperboloid. Imaginäres. Krümmung 280, 281, 282, 283, 284. Kugel. Normalen 320, 322, 323. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Zahlentheorie 384.

Astronomie.

188. *Théorie géométrique du mouvement des planètes.* Resal. *Compt. rend. LXXIV,* 743.
189. Ueber das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten. Zöllner. Astr. Nachr. LXXVIII, 1.
190. *Sur les mouvements du périgée et du noeud de la Lune.* Delaunay. *Compt. rend. LXXIV,* 17.
191. *Variations séculaires des moyens mouvements du périgée et du noeud de la Lune.* Delaunay. *Compt. rend. LXXIV,* 152.

192. Ueber die physikalischen Verhältnisse und die Entwickelung der Cometen. Zenker. Astr. Nachr. LXXIX, 273.
193. *On the resolution of Lambert's theorem bytrial in the method of Olbers for the calculation of parabolic orbits.* Astr. Nachr. LXXVIII, 123.
194. Ueber eine Methode zur Höhenbestimmung der Nordlichtsstrahlen. Galle. Astr. Nachr. LXXIX, 65.
Vergl. Geschichte der Mathematik 241, 243.

B.

Bestimmte Integrale.

195. *Instrument servant à donner la valeur de* $\int y^m dx$ *pour toute l'étendue d'une figure plane fermée.* *Deprez.* *Compt. rend. LXXIII,* 785.

Brachistochrone.

196. *Sur la détermination des brachistochrones.* *Bresse.* *Compt. rend. LXXIV,* 854.

C.

Capillarität.

197. *Théorie des phénomènes capillaires.* *Roger.* *Compt. rend. LXXIV,* 1510.

Combinatorik.

198. *Solution complète du problème relatif au cavalier des échecs.* *Volpicelli.* *Compt. rend. LXXIV,* 1099.
199. *Sur les permutations circulaires distinctes.* *Moreau.* *N. ann. math. XXXI,* 309.

Convergenz der Reihen.

200. *Détermination du point critique où est limitée la région de convergence de la série de Taylor.* *Marie.* *Compt. rend. LXXIV,* 1485.

Cubatur.

201. *Sur les mesures de la pyramide, du tronc de pyramide, et du tronc de prisme triangulaire.* *Compagnon.* *N. ann. math. XXXI,* 268.
Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 204.

D.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

202. *Equations tangentielles d'un cône droit touchant trois plans donnés.* *Moret-Blanc.* *N. ann. math. XXXI,* 334.
203. *Sur les surfaces divisibles en carrés par leurs courbes de courbure et sur la théorie de Dupin.* *Cayley.* *Compt. rend. LXXIV,* 1445.
204. *Volume d'une pyramide.* *Padova.* *N. ann. math. XXXI,* 210.

Differentialgleichungen.

205. *Sur la méthode de Brisson pour intégrer les équations différentielles à coefficients constants.* *Mansion.* *N. ann. math. XXXI,* 118. — *Moret-Blanc ibid.* 279.
206. *Sur la résolution des équations différentielles linéaires.* *C. Jordan.* *Compt. rend. LXXIII,* 787.
207. *Sur l'intégration des équations aux différences partielles de la physique mathématique.* *E. Mathieu.* *Compt. rend. LXXIII,* 986. — *Journ. mathém. XXXVII,* 249.
208. *Sur un changement de variables qui rend intégrables certaines équations aux dérivées partielles du second ordre.* *Boussinesq.* *Compt. rend. LXXIV,* 730. — *J. A. Serret ibid.* 769.
209. *Intégration d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre.* *Graindorge.* *Journ. mathém. XXXVII,* 426.



210. *Sur les équations linéaires aux différences partielles.* Combescure. Compt. rend. LXXIV, 798.
211. *Sur un système particulier d'équations aux différences partielles.* Combescure. Compt. rend. LXXIV, 977.
212. *Sur un procédé d'intégration par approximations successives.* Combescure. Compt. rend. LXXIV, 1041.

Differentialquotient.

213. *De l'équation* $\frac{d^2 f}{dx.dy} = \frac{d^2 f}{dy.dx}$. Gilbert. N. ann. math. XXXI, 217.

Differenzenrechnung.

214. *Sur quelques points du calcul inverse des différences.* Combescure. Compt. rend. LXXIV, 454.

Division.

215. *Connaissant le dividende le diviseur et le résidu d'une division comment trouve-t-on les chiffres du quotient de droite à gauche?* De Virieu. N. ann. math. XXXI, 129.

Doppeltangenten.

216. *Sur les 28 tangentes doubles d'une courbe du 4. degré.* Aronhold. N. ann. math. XXXI, 438. [Vergl. Bd. X, Nr. 274.]

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 184. Parabel 351.

E.

Elektrodynamik.

217. *Sur la théorie mathématique de l'électricité dynamique.* Bertrand. Compt. rend. LXXIII, 965.

Ellipsoid.

218. *Différents théorèmes sur l'ellipse.* Mathieu. N. ann. math. XXXI, 428.
219. *Déplacement d'une ellipse de grandeur constante et restant toujours tangente à une droite fixe.* Willière. N. ann. math. XXXI, 132.
220. *Une ellipse de grandeur constante est mobile autour de son centre, tondis qu'une droite passant par un point fixe demeure constamment parallèle au grand axe. Trouver le lieu des points d'intersection de la droite et de l'ellipse.* Sanguinède. N. ann. math. XXXI, 228.
221. *Lieu du point de contact des deux ellipses égales mobiles chacune autour d'un foyer.* Brocard. N. ann. math. XXXI, 457.

Vergl. Maxima und Minima 287. Rectification.

F.

Functionen.

222. *Expression du rapport de la circonférence au diamètre et nouvelle fonction.* Didion. Compt. rend. LXXIV, 36. — Catalan *ibid.* 177.

Vergl. Gleichungen 252. Mittelwerth.

G.

Geodäsie.

223. *Nouvelle détermination de la vraie figure de la terre ou de la surface de niveau, n'exigeant pas l'emploi des nivellements proprement dits.* Yvon Villarceau. Compt. rend. LXXIII, 808.

Geometrie (höhere).

224. *Théorèmes de géométrie de la théorie des indices.* Faure. N. ann. math. XXXI, 414.
225. *Théorèmes concernant la détermination sur une courbe géométrique d'une série de groupes de points en nombre déterminé.* Chasles. Compt. rend. LXXIII, 927, 970.



226. *Propriétés générales des courbes géométriques relatives à leurs axes harmoniques.* Chasles. Compt. rend. LXXIII, 229.
227. *Théorèmes concernant les axes harmoniques des courbes géométriques, dans lesquels on considère deux séries de points qui se correspondent anharmoniquement sur une courbe unicursale.* Chasles. Compt. rend. LXXIII, 1241, 1289, 1405; LXXIV, 21.
228. *Sur les droites qui satisfont à des conditions données.* Halphen. Compt. rend. LXXIII, 1441; LXXIV, 41.
229. *Les milieux des diagonales d'un quadrilatère circonscrit à un cercle et le centre de ce cercle sont en ligne droite.* Gardon. N. ann. math. XXXI, 38.
230. *Le triangle* ABC *et le triangle* A′B′C′ *formé en joignant les pieds des hauteurs de* ABC *ont leur axe d'homologie perpendiculaire à la ligne qui joint le point de concours des hauteurs au centre du cercle circonscrit.* Gambey. N. ann. math. XXXI, 187.
231. *Théorèmes sur les coniques.* Faure. N. ann. math. XXXI, 46.
232. *Sur une droite, lieu du point d'intersection des tangentes à deux coniques.* Brocard. N. ann. math. XXXI, 129.
233. *Mémoire sur la théorie géométrique des courbes du troisième ordre.* Koehler. N. ann. math. XXXI, 21, 66, 122
234. *Détermination des caractéristiques des systèmes élémentaires de cubiques.* Zeuthen. Compt. rend. LXXIV, 521, 604, 726.
235. *Sur les courbes aplaties.* Cayley. Compt. rend. LXXIV, 708.
236. *Théorèmes relatifs aux obliques menées par les points d'une courbe sous des angles de même grandeur.* Chasles. Compt. rend. LXXIV, 1146, 1277.
237. *Sur une transformation très générale.* Saltel. N. ann. math. XXXI, 142.
238. *Sur une transformation des angles dans les figures homologiques.* Faure. N. ann. math. XXXI, 81.
239. *Propriétés relatives aux déplacements infiniment petits d'un corps lorsque ces déplacements ne sont définis que par quatre conditions.* Mannheim. Compt. rend. LXXIII, 1096.

Geschichte der Mathematik.

240. *Nouveaux documents sur les quatre livres conservés de l'optique de Claude Ptolémée.* Egger. Compt. rend. LXXIII, 159. — Chasles ibid. 160.
241. *Sur la théorie de la lune d'Aboul-W'efâ.* Bertrand. Compt. rend. LXXIII, 581, 765, 889. — Chasles ibid. 588, 637, 805, 890, 932. — Leverrier ibid. 890. — Sédillot ibid. 756.
242. *Des emprunts faits par le français à la langue arabe.* Sedillot. Compt. rend. LXXIII, 284, 756. [Vergl. Nr. 76.]
243. *Sur l'histoire en l'état présent de la théorie des somètes.* Faye. Compt. rend. LXXIII, 881, 925, 1020.
244. *Funérailles de M. Duhamel.* Jamin. Journ. mathém XXXVII, 324.
245. *Funérailles de M. Laugier.* Faye. Journ. mathém. XXXVII, 328. — Delaunay ibid. 331. — Jurien de la Gravière ibid. 335.
246. *Funérailles de M. Delaunay.* Faye. Journ. mathém. XXXVII, 348.

Gleichungen.

247. *Séparation des racines des équations à une inconnue.* Maleyx. N. ann. math. XXXI, 404.
248. *Limites supérieures des racines d'une équation donnée.* A. Transon. N. ann. math. XXXI, 251.
249. *Équation entre les côtés d'un triangle et les rayons des cercles inscrit et circonscrit.* Doucet. N. ann. math. XXXI, 467.
250. *L'équation* $\begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix} = 0$ *du troisième degré en* S *à toutes ses racines réelles.* Gérono. N. ann. math. XXXI, 305.
251. *Sur l'équation du cinquième degré.* Brioschi. Compt. rend. LXXIII, 1470.
252. *Etant donnée la fonction* $y = A_1 \cdot \cos x + A_2 \cdot \cos 2x + A_3 \cdot \cos 3x + \ldots + A_n \cos nx$ *déterminer les coefficients* $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ *de manière que pour* $x = \frac{h\pi}{n+1}$, y *prenne la valeur de* y_h, *depuis* $h = 1$ *jusqu'a* $h = n$. De Hunyady. N. ann. math. XXXI, 39.

Vergl. Reihen 362. Tabellen.

H.

Hydrodynamik.

253. *Sur l'hydrodynamique des cours d'eau.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXXIV*, 570, 649, 693, 770.
254. *Sur le mouvement de l'eau dans les déversoirs.* D'Estocquois. *Compt. rend. LXXIV*, 1247.
255. *Sur le mouvement permanent varié de l'eau dans les tuyaux de conduite et dans les canaux découverts.* Boussinesq. *Compt. rend. LXXIII*, 34, 101.
256. *Théorie générale des mouvements qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal.* Boussinesq. *Compt. rend. LXXIII*, 256.
257. *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond.* Boussinesq. *Compt. rend. LXXIII*, 1210. — *Journ. mathém. XXXVII*, 55.
258. *De l'influence des forces centrifuges sur l'écoulement permanent varié de l'eau dans les canaux prismatiques de grande largeur.* Boussinesq. *Compt. rend. LXXIV*, 1026.
259. *Note sur la houle et le clapotis.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXXIII*, 521, 589.
260. *Mémoire sur les marées fluviales.* Partiot. *Compt. rend. LXXIII*, 91.
261. *Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit.* De Saint-Venant. *Compt rend. LXXIII*, 147, 237.
262. *Sur la théorie des roues hydrauliques: théorie de la roue à reaction.* De Pambour. *Compt. rend. LXXIV*, 445, 607.
263. *Rapport sur un mémoire de Mr. Kleitz intitulé: Etudes sur les forces moléculaires dans les liquides en mouvement et application à l'hydrodynamique.* De Saint-Venant. *Compt. rend LXXIV*, 426.

Hyperboloid.

264. *Sur l'hyperboloïde de révolution.* Mister. *N. ann. math. XXXI*, 352.

I.

Imaginäres.

265. *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace.* Laguerre. *N. ann. math. XXXI*, 14, 108, 241.
266. *De l'enveloppe imaginaire des conjuguées.* Marie. *Journ. mathém. XXXVII*, 337.

Integration.

267. *Sur l'intégration des fractions rationnelles.* Hermite. *N. ann. math. XXXI*, 145.

K.

Kegelschnitte.

268. *Sur les propriétés des sections coniques qui se rattachent à l'intégration de l'équation d'Euler.* Laguerre. *N. ann. math. XXXI*, 156.
269. *Théorème sur des coniques ayant 4 points confondus sur une courbe algébrique donnée et tangentes à une droite donnée de même.* Ed. Weyr. *N. ann. math. XXXI*, 331.
270. *Intersection de deux cônes ayant une même conique donnée pour base commune.* Dewulf. *N. ann. math. XXXI*, 239.
271. *Les deux circonférences menées par les foyers d'une conique et qui touchent une tangente de cette conique, se coupent toujours sous le même angle.* Gambey. *N. ann. math. XXXI*, 473.



272. *Un angle de grandeur constante se déplace dans un plan de manière que le sommet décrive un cercle de rayon donné et que l'un des côtés passe par un point fixe; on demande l'enveloppe de l'autre côté.* Pellissier. *N. ann. math. XXXI*, 44. — De Hunyady *ibid.* 216.
273. *Propriété des perpendiculaires abaissées du foyer d'une conique sur deux tangentes, sur leur corde de contact et sur la directrice.* Conradt. *N. ann. math. XXXI*, 504.
Vergl. Ellipse. Geometrie (höhere) 231, 232. Kreis. Normalen 321. Parabel.

Kreis.

274. *Construction d'une tangente à une circonférence.* Bergeron. *N. ann math. XXXI*, 34.
275. *Circonférence engendrée par l'intersection de deux autres circonférences.* Pellissier. *N. ann math. XXXI*, 468.
276. *Sur le lieu du point de contact de deux cercles mobiles qui doivent être tangents chacun à deux cercles fixes.* Hilaire. *N. ann. math. XXXI*, 37.
277. *Cordes d'intersection de trois cercles passant par un même point.* Kruschwitz. *N. ann. math. XXXI*, 236.
Vergl. Functionen. Geometrie (höhere) 229, 230. Gleichungen 249. Parabel 351. Planimetrie 356, 357, 358.

Krümmung.

278. *Du rayon de courbure en un point de rebroussement d'une courbe plane.* Gilbert. *N. ann. math. XXXI*, 222.
279. *Une corde glisse sur une courbe quelconque de façon à détacher un segment d'aire constante; le centre de gravité du segment décrit une courbe, dont le rayon de courburg est proportionel au cube de la longueur de la corde.* Pellet. *N. ann. math. XXXI*, 553.
280. *Exposition sommaire d'une théorie géométrique de la courbure des surfaces.* Mannheim. *Compt. rend. LXXIV*, 598.
281. *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies contenant une nouvelle expression de la théorie de la courbure des surfaces.* Mannheim. *Journ. mathém. XXXVII*, 109.
282. *Détermination des rayons de courbure en un point quelconque d'une surface définie par son équation tangentielle.* Painvin. *Compt. rend. LXXIII*, 902.
283. *Courbure en un point d'une surface définie par son équation tangentielle.* Painvin. *Journ. mathém. XXXVII*, 219.
284. *Détermination de la liaison géométrique qui existe entre les éléments de la courbure des deux nappes de la surface des centres de courbure principaux d'une surface donnée.* Mannheim. *Compt. rend. LXXIV*, 458.

Kugel.

285. *Sphère coupée par trois plans diamètraux d'une surface du second degré.* Genty. *N. ann. math. XXXI*, 510.

M.

Maxima und Minima.

286. *Rendre minimum* $\frac{\sin A}{\sin B \,.\, \sin C} + \frac{\sin B}{\sin A \,.\, \sin C} + \frac{\sin C}{\sin A \,.\, \sin B}$ *en prenant* $A + B + C = 180^0$. Gambey. *N. ann. math. XXXI*, 286.
287. *Trouver le maximum de l'angle sous lequel une ellipse donnée est coupée par le cercle de courbure.* Desmons. *N. ann. math. XXXI*, 233.
Vergl. Trajectorien.

Mechanik.

288. *Sur le principe de la moindre action.* J. A. Serret. *Compt. rend. LXXIII*, 145, 293. [Vergl. Nr. 107.]
289. *Du mouvement d'un système matériel rapporté à trois axes rectangulaires mobiles autour de leur origine.* Resal. *Compt rend. LXXIII*, 1160.
290. *Du mouvement d'un point soumis à l'action d'une cause périodique et qui éprouve une résistance constante dirigée en sens inverse de la vitesse.* Resal. *Compt. rend. LXXIII*, 1201.

291. *Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels.* C. Jordan. *Compt. rend. LXXIV,* 1395.

292. *Sur les fonctions des intégrales d'un problème de dynamique constants par rapport au temps.* H. Laurent. *Journ. mathém. XXXVII,* 422.

293. *Théorèmes généraux sur l'équilibre et le mouvement des systèmes matériels.* Lucas. *Compt. rend. LXXIV,* 1176.

294. *Du mouvement d'un corps solide qui supporte un système matériel animé d'un mouvement relatif par rapport à ce corps.* Resal. *Compt. rend. LXXIII,* 164.

295. *Etude géométrique sur le mouvement d'une sphère pesante glissant sur un plan horizontal.* Resal. *N. ann. math. XXXI,* 193.

296. *Interprétation géométrique de la trajectoire apparente d'un projectile dans le vide.* Resal. *N. ann. math. XXXI,* 433.

297. *Sur la mécanique des corps ductiles.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXXIII,* 1181.

298. *Rapport sur un mémoire de M. Maurice Levy relatif aux équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles, au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXXIII,* 86.

299. *Sur l'intégration des équations aux différences partielles relatives aux mouvements intérieurs des corps solides ductiles, lorsque ces mouvements ont lieu par plans parallèles.* M. Levy. *Compt. rend. LXXIII,* 1098.

300. *Sur un complément à donner à une des équations présentées par M. Lévy pour les mouvements plastiques qui sont symétriques autour d'un même axe.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXXIV,* 1083.

301. *Lois géométriques de la distribution des pressions dans un solide homogène et ductile soumis à des déformations planes.* Boussinesq. *Compt. rend. LXXIV,* 242.

302. *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles des cylindres isostatiques produits dans un solide homogène et ductile.* Boussinesq. *Compt. rend. LXXIV,* 318.

303. *Equation aux dérivées partielles des vitesses dans une solide homogène et ductile déformé parallèlement à un plan* Boussinesq. *Compt. rend. LXXIV,* 450.

304. *Sur l'intensité des forces capables de déformer avec continuité des blocs ductiles cylindriques pleins ou évidés et placés dans diverses circonstances.* De Saint-Venant. *Compt. rend. LXXIV,* 1009.

305. *Equations du mouvement vibratoire d'une lame circulaire.* Resal. *Compt. rend. LXXIV,* 171.

306. *La pendule de Léon Foucault.* J. A. Serret. *Compt. rend. LXXIV,* 269.

307. *Méthode directe pour déterminer l'influence de la rotation de la terre sur la chute des graves.* Resal. *N. ann. math. XXXI,* 348.

308. *Sur les mouvements relatifs à la surface de la terre.* Tisserand. *Compt. rend. LXXIV,* 1567.

309. *Sur le calcul des volants des machines à vapeur à détente et à condensation.* Resal. *Compt. rend. LXXIII,* 1311.

310. *Des conditions de résistance d'un volant.* Resal. *Compt. rend. LXXIII,* 1434.

311. *Théorème sur le spiral réglant des chronomètres.* Phillips. *Compt. rend. LXXIII,* 1131; *LXXIV,* 581.

312. *Note relative à la non-symétrie des courbes terminales du spiral des chronomètres.* Rozé. *Compt. rend. LXXIII,* 1207.

313. *Sur les régulateurs isochrones dérivés du système de Watt.* Yvon Villarceau. *Compt. rend. LXXIV,* 1437.

314. *Théorie des réactions simples limitées par l'action inverse et application à la transformation du phosphore.* Lemoine. *Compt. rend LXXIII,* 990.

Vergl. Akustik. Capillarität. Elektrodynamik. Hydrodynamik. Optik. Potential. Trajectorie. Wärmelehre.

Methode der kleinsten Quadrate.

315. Ueber die Bestimmung des mittleren Fehlers durch Wiederholung der Beobachtungen. Jordan. Astr. Nachr. LXXIX, 219.

316. Ueber die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch die gegebenen Differenzen von *m* gleich genauen Beobachtungen einer Unbekannten. v. Andrae. Astr. Nachr. LXXIX, 257.

Mittelwerth.

317. *Limite du quotient de deux valeurs moyennes d'une fonction.* Moret-Blanc. *N. ann. math. XXXI*, 469.
318. *La racine* mième *du produit de* m *nombres et plus petite que la moyenne arithmétique entre ces nombres.* A. Transon. *N. ann. math. XXXI*, 257.

N.

Nautik.

319. *Sur le gyroscope marin.* Dubois. *Compt. rend. LXXIV*, 232.

Normalen.

320. *Sur la surface gauche lieu des normales principales de deux courbes.* Mannheim. *Journ. mathém. XXXVII*, 406.
321. *Conique passant par un point fixe et ayant pour normales deux droites données.* X.... *N. ann. math. XXXI*, 453.
322. *Sur le nombre des normales réelles que l'on peut mener d'un point donné a un ellipsoide.* Joachimsthal. *N. ann. math. XXXI*, 8, 149. [Vergl. Bd. XVI, Nr. 304.]
323. *Relation entre les positions des normales à une surface menées aux extrémités de deux arcs infiniment petits égaux.* Mannheim. *Journ. math. XXXVII*, 403.

O.

Oberflächen.

324. *Généralisation du théorème de Meunier.* Mannheim. *Compt. rend. LXXIV*, 372.
325. *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces.* Laguerre. *N. ann. math. XXXI*, 60.
326. *Sur la théorie des lignes de courbure.* Ribaucour. *Compt. rend. LXXIV*, 1489, 1570.
327. *Détermination des éléments de l'arète de rebroussement d'une surface développable définie par ses équations tangentielles.* Painvin. *Journ. mathém. XXXVII*, 177.
328. *Sur les développées des surfaces.* Ribaucour. *Compt. rend. LXXIV*, 1399.
329. *Rectification d'un théorème sur les surfaces.* Painvin. *N. ann. math. XXXI*, 376. [Vergl. Bd. XVII, Nr. 388.]
330. *Sur une propriété des focales des surfaces.* M. Levy. *Compt. rend. LXXIV*, 176.
331. *Sur une propriété remarquable des points où les lignes de plus grande pente d'une surface ont leurs plans osculateurs verticaux, et sur la différence qui existe généralement à la surface de la terre entre les lignes de faîte ou de thalweg et celles lelong desquelles la pente du sol est un minimum.* Boussinesq. *Compt. rend. LXXIII*, 1368. — C. Jordan *ibid. LXXIV*, 1457.
332. *Des courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface.* Darboux. *Compt. rend. LXXIII*, 733.
333. *Sur un point de la théorie des surfaces.* Combescure. *Compt. rend. LXXIV*, 1517.
334. *Recherches analytiques sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner.* Laguerre. *N. ann. math. XXXI*, 319, 337, 418.
335. *Sur une surface quartique aplatie.* Cayley. *Compt. rend. LXXIV*, 1393.
336. *Recherches géométriques sur les contacts du 3e ordre de deux surfaces.* Mannheim. *Compt. rend. LXXIV*, 856, 928.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 203. Krümmung 280, 281, 282, 283, 284. Normalen 320, 323.

Oberflächen zweiter Ordnung.

337. *Théorie des indices par rapport à une courbe et une surface du second degré.* Faure. *N. ann. math. XXXI*, 261, 385.
338. *Sur un réseau de courbes situées sur une surface du second ordre.* Guebhardt. *N. ann. math. XXXI*, 177.
339. *Surfaces de révolution du second degré.* Dostor. *N. ann. math. XXXI*, 362.

340. *Surfaces du second ordre passant par deux droites et satisfaisant à deux autres conditions.* Crosnier. *N. ann. math. XXXI,* 450.
341. *Etant pris trois diamètres conjugués d'une surface du second degré, si l'on projette chacun d'eux sur une droite perpendiculaire au plan des deux autres, la somme des valeurs inverses des carrés de ces projections est constante.* Ylliac de Goïsel. *N. ann. math. XXXI,* 465.
342. *Théorème sur une surface du second degré et un tétraèdre.* Genty. *N. ann. math. XXXI,* 139.
343. *Sur la courbe d'intersection d'une surface du second ordre et d'une sphère ayant pour centre un point d'un plan de symétrie de la surface.* Ducoing. *N. ann. math. XXXI,* 230.
344. *Droite coupent deux surfaces du second ordre de manière à ce que les plans tangents aux points de traversée se coupent en un même point.* Doucet. *N. ann. math. XXXI,* 512.
345. *Sur deux surfaces du second ordre qui se raccordent suivant une droite unique.* Doucet. *N. ann. math. XXXI,* 238.
346. *Plan défini indirectement par l'intersection de deux surfaces du second ordre.* Espanet. *N. ann. math. XXXI,* 461.

Vergl. Hyperboloid. Kugel. Normalen 322.

Optik.

347. *Sur la théorie de quelques phénomènes d'interférence.* Mascart. *Compt. rend. LXXIII,* 375.
348. *Sur les lois qui régissent à une première approximation les ondes lumineuses propagées dans un milieu homogène et transparent d'une contexture quelconque.* Boussinesq. *Journ. mathém. XXXVII,* 167.
349. *Sur le calcul de la vitesse de la lumière dans les corps en mouvement.* Boussinesq. *Compt. rend. LXXIV,* 1573.

P.

Parabel.

350. *Théorèmes sur les paraboles inscrites à un triangle rectangle.* Minn Phornton. *N. ann. math. XXXI,* 88.
351. *Une parabole et un point intérieur à cette courbe étant donnés faire passer par le point donné une circonférence doublement tangente à la parabole.* Moret-Blanc. *N. ann. math. XXXI,* 284.
352. *Lieux engendrés par une parabole restant toujours tangente à une droite fixe en un point déterminé.* Moret-Blanc. *N. ann. math. XXXI,* 500.

Philosophie der Mathematik.

353. *Sur l'emploi de l'infini en mathématiques.* A. Transon. *Compt. rend. LXXIII,* 367.

Planimetrie.

354. *Sur la bissectrice d'un angle et sur les bissectrices des angles d'un triangle.* Compagnon. *N. ann. math. XXXI,* 127.
355. *Trouver deux droites qui soient entre elles comme les puissances mèmes de deux droites données.* Burnier. *N. ann. math. XXXI,* 141. — Gérono *ibid.* 142.
356. *La différence des contours de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés supérieur à cinq, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, est moindre que le côté du polygone inscrit.* Lionnet. *N. ann. math. XXXI,* 78. — Durel *ibid.* 90.
357. *Démonstration du théorème fondamental relatif au pole et à la polaire dans le cercle.* Compagnon. *N. ann. math. XXXI,* 167.
358. *Somme des perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés du triangle.* Jamet. *N. ann. math. XXXI,* 35.

Potential.

359. *Sur la transformation du potentiel par rayons vecteurs réciproques.* Haton de la Goupillière. *Compt. rend. LXXIII,* 1438.



R.

Rectification.

360. *Deux limites entre lesquelles est compris le périmètre d'une ellipse.* *Mister.* *N. ann. math.* XXXI, 280.
   Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 185.

Reihen.

361. *Démonstration élémentaire des formules relatives à la sommation des piles de boulets.* *Brocard.* *N. ann. math.* XXXI, 169.
362. *Propriétés du coefficient de* λ^n *dans le développement en série de* $\frac{e^{\lambda}(1+x)-e^{-\lambda}(1-x)}{e^{\lambda}(1+x)+e^{-\lambda}(1-x)}$. *Callandreau.* *N. ann. math.* XXXI, 460.
363. *Trouver la somme de la série*
$$(\cos\varphi)^3-\frac{1}{3}(\cos 3\varphi)^3+\frac{1}{3^2}(\cos 3^2\varphi)^3-\frac{1}{3^3}(\cos 3^3\varphi)^3+\ldots$$
   Rumpen. *N. ann. math.* XXXI, 232.
364. *Sommation d'une série finie de produits des nombres entiers.* *Moret-Blanc.* *N. ann. math.* XXXI, 476.
365. m *étant entier positif on a:*
$$\tfrac{2}{1}.m-\tfrac{2}{1}.\tfrac{4}{3}.m(m-1)+\tfrac{2}{1}.\tfrac{4}{3}.\tfrac{6}{5}.m(m-1)(m-2)-\ldots=\frac{2m}{2m-1}.$$
   Moret-Blanc. *N. ann. math.* XXXI, 519.
366. m *et* n *étant des entiers positifs on a:*
$$\frac{1}{m}-\frac{n}{1}.\frac{1}{m+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1}{m+2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{m+3}+\ldots$$
$$=\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}.$$
   N. ann. math. XXXI, 520.
   Vergl. Convergenz der Reihen. Zahlentheorie 302.

S.

Stereometrie.

367. *Sur quelques relations entre les quantités angulaires des polyèdres convexe.* *Lalaune.* *Compt. rend.* LXXIV, 602.
   Vergl. Cubatur.

Substitution.

368. *Sur la classification des groupes primitifs.* *C. Jordan.* *Compt. rend.* LXXIII, 853. [Vergl. Nr. 158.]
369. *Recherches sur les substitutions.* *C. Jordan.* *Compt. rend.* LXXIV, 975. — *Journ. mathém.* XXXVII, 351.

T.

Tabellen.

370. *Table pour résoudre l'équation* $m.(\sin z)^4=\sin(z-q)$; m, q *positifs.* *De Gasparis.* Astr. Nachr. LXXVIII, 177.

Tetraeder.

371. *Théorème sur le tétraèdre.* *Padova.* *N. ann. math.* XXXI, 86. — *D'Ovidio ibid.* 183.
   Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 342.

Trajectorie.

372. *Sur la détermination de la trajectoire d'un point pour laquelle une certaine intégrale est minimum.* *Bresse.* *Compt. rend.* LXXIV, 1562.
   Vergl. Mechanik 296.

Trigonometrie.

373. $\frac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A \cdot \sin C} + \frac{\cos C}{\sin A \cdot \sin B} = 2$ *pourvu que* $A + B + C = 180^0$. *Helderman. N. ann. math. XXXI*, 92.

Vergl. Maxima und Minima 286. Planimetrie 356. Reihen 363. Tabellen.

W.

Wärmelehre.

374. *Essai sur la théorie des vapeurs. Resal. Compt. rend. LXXIII*, 325.
375. *Du coefficient économique dans la thermodynamique des gaz permanents. Bourget. Compt. rend. LXXIV*, 1230.
376. *Sur la chaleur dégagée par la dissolution des gaz dans les liquides. Moutier. Compt. rend. LXXIII*, 616.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

377. *On a* n *urnes renfermant chacune les* m *premiers numéros. On tire un numéro de chaque urne; quelle est la probabilité que la somme des nombres sortis* 1° *soit égale à un nombre donné,* 2° *soit comprise entre deux nombres donnés. Moreau. N. ann. math. XXXI*, 131.

Vergl. Methode der kleinsten Quadrate.

Z.

Zahlentheorie.

378. *Sur la détermination des limites entre lesquelles se trouve un nombre premier d'une forme donnée. Berton. Compt. rend LXXIV*, 1390.
379. *Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité de Legendre. Zolotareff. N. ann. math. XXXI*, 354.
380. *Sur les formes réduites des congruences du second degré. C. Jordan. Compt. rend. LXXIV*, 1093.
381. *Sur la forme canonique des congruences du second degré et le nombre de leurs solutions. C. Jordan. Journ. mathém. XXXVII*, 368.
382. *Sur l'équation* $Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p Z^2 = 4X$. *Zolotareff. N. ann. math. XXXI*, 539.
383. *Sur l'équation* $x^2 = y^4 + a y^2 z^2 + b z^4$. *Le Besgue. N. ann. math. XXXI*, 83.
384. *Sur l'équation* $x^3 + y^3 = z^3 + u^3$. *Hermite. N. ann. math. XXXI*, 5.
385. *Tout nombre impair est la somme de quatre carrés dont deux sont consécutifs. Le Besgue. N. ann. math. XXXI*, 516.
386. *Tout nombre entier est la somme de deux carrés et d'un nombre triangulaire. Le Besgue. N. ann. math. XXXI*, 516.
387. *Tout nombre entier est la somme d'un carré et de deux nombres triangulaires Le Besgue. N. ann. math. XXXI*, 516.
388. *Si l'on désigne par* a *et* n *deux nombres entiers quelconques supérieurs à l'unité, le quotient* $\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(na-1)}{a^n}$ *est fractionnaire si* a *est premier, entier si* a *n'est pas premier. André. N. ann. math. XXXI*, 314.
389. *Le produit de plusieurs nombres consécutifs ne peut être une puissance parfaite lorsqu'un de ces nombres est premier absolu. Moreau. N. ann. math. XXXI*, 172.
390. *Solutions en nombres entiers des deux équations indéterminées*
$$1+2+\ldots+n=(n+1)+(n+2)+\ldots p \quad et \quad 1+2+\ldots+n=p^2.$$
Moret-Blanc. N. ann. math. XXXI, 173.
391. *Sur une fonction numérique. Bougaer. Compt. rend. LXXIV*, 449.
392. *Sur les sommes de Gauss à plusieurs variables C. Jordan. Compt. rend LXXIII*, 1316. [Vergl. Nr. 174.]

Vergl. Reihen 364, 365, 366.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Beiträge zur Geschichte der Mathematik III. Programm zur öffentlichen Preisvertheilung an der Studienanstalt Hof. 1873. Von Dr. G. Friedlein, k. Rector und Professor.

In der Literaturzeitung des vorigen Jahrganges, S. 105—110, haben wir uns in etwas ausführlicher Weise mit dem Programme des Herrn Friedlein für 1872 beschäftigt. Derselbe Verfasser hat nun im Programme für 1873, ohne die von uns beigebrachten Belege zu entkräften, einen Theil der von uns bemängelten Ansichten wiederholt, und wenn wir heute wieder unsern Widerspruch, Herr Friedlein nächstes Jahr seine Behauptungen erneuern wollten, so müsste das schliesslich für den Leser recht unerquicklich werden, ohne dass irgend ein wissenschaftlicher Vortheil erwachsen dürfte. Wir erklären heute nur, dass wir und ebenso unser gelehrter, als Egyptolog bekannter Freund A. Eisenlohr die Schuld nicht tragen, wenn der Papyrus Rhind, dessen Uebersetzung in Heidelberg vollendet vorhanden ist, bis heute der Oeffentlichkeit nicht übergeben werden konnte; wir fügen bei, dass der im Programme für 1873 von H. Friedlein, S. 5 Note 8, für den niederen Stand egyptischer Bildung als Zeuge angeführte Eisenlohr, Verfasser des Werkes: „Das Volk Israel unter der Herrschaft der Könige", durchaus nicht mit dem soeben erwähnten Sachkenner gleichen Namens verwechselt werden darf; wir bitten schliesslich unsere Leser, ihr Urtheil über egyptische Mathematik aufzusparen, bis jenes Quellenwerk bekannt gegeben ist.

Neben dem antikritischen Theile und nach demselben enthält das uns vorliegende Programm der Hauptsache nach eine Würdigung Plato's als Mathematiker. Herr Friedlein hat die Werke dieses Schriftstellers offenbar sehr gründlich durchgearbeitet, und es ist ihm dabei gelungen, eine Anzahl von Stellen aufzufinden, welche Aussprüchen des Proclus in seinem Commentare zum ersten Buche der euklidischen Elemente als Grundlage gedient haben müssen und welche bisher den mathematischen Lesern entgangen waren. Dieses Verdienst ist ein unzweifelhaftes, und wir wollen

nicht versäumen, den Leser des Programmes auf die 5 hierher gehörigen Stellen S. 4 Note 6, S. 9 Z. 19, S. 10 Z. 11, S. 11 Z. 13, S. 17 Z. 28 besonders aufmerksam zu machen. Innerhalb der Besprechung platonischer Geometrie hat H. Friedlein fünfthalb Seiten (S. 11 bis S. 15) auf die berüchtigte Meno-Hypothese verwandt. Er benutzt dabei die Erklärung Benecke's (Elbinger Programm für 1867), von welcher er nur sehr unwesentlich abweicht, insbesondere durch die Lesart *παρατεῖναν*, welche er statt des ihm Schwierigkeiten bereitenden *παρατέιναντα* vorschlägt. Diese Streitfrage müssen Sprachforscher entscheiden; der geometrische Sinn bleibt davon unberührt. Weit wünschenswerther wäre es gewesen, wenn Herr Friedlein unsere Besprechung des Benecke'schen Programmes (Zeitschr. Math. Phys. Bd. XIII, Literaturzeitung S. 9—12) in seine Forschungen mit eingeschlossen und die Ausstellungen, welche wir damals begründeten, angenommen oder widerlegt hätte. Beides vermissen wir, wenn nicht die Note 17 (S. 12) eine Widerlegung sein soll. In diesem Falle sei kurz bemerkt, dass für einen Sclaven, der gar nichts vom Rechnen versteht, auch das Zusammenzählen von 4 gesehenen Quadraten ein Ausrechnen heissen kann. Im Uebrigen verweisen wir auf die erwähnte Besprechung.

CANTOR.

Dieci lettere inedite di Giuseppe Luigi Lagrange publicate dall Ing[re.] Giambattista Biadego. Roma 1873.

Die uns vorliegende, aus 42 Quartseiten bestehende Brochure ist ein Separatabdruck aus dem Märzhefte 1873 des bekannten *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche*, welches Prinz Boncompagni zur Freude aller Derer, die sich für die Geschichte der exacten Wissenschaften interessiren, nunmehr bereits im 6. Jahrgange herausgiebt. Wenn wir an der unserem Referate empfohlenen Abhandlung Etwas zu tadeln haben, so ist es die Ueberschrift, welche nicht entfernt errathen lässt, womit man es hier zu thun hat. Es ist freilich wahr, dass Herr Biadego 10 noch ungedruckte Briefe von Lagrange hier zum ersten Male veröffentlicht; aber wie diese Briefe nur den geringsten Raumtheil der Abhandlung (S. 31—42) in Anspruch nehmen, so ist auch die Aufmerksamkeit des Lesers sicherlich mehr durch die vorausgeschickte Auseinandersetzung gefesselt, und selbst beim Durchforschen der Briefe wird weniger für die Geschichte des Schreibers, als für die des Adressaten der Brief herauskommen, so dass vielleicht vorzuziehen gewesen wäre, der Abhandlung den Titel: „Zur Geschichte von Antonio Mario Lorgna" beizulegen. An ihn (geboren zu Verona 1730, gestorben ebenda den 28. Juni 1796) sind die Briefe Lagrange's gerichtet und ebenso an ihn Briefe von Malfatti, welche der Verfasser der Abhandlung gleichfalls zum ersten Male aus der Briefsammlung Lorgna's mittheilt, welche in

der Bibliothek zu Verona aufbewahrt wird und, wie diese Beispiele zeigen, einen schätzbaren Inhalt besitzt, der vielleicht noch weitere Veröffentlichungen lohnen dürfte. Ist doch auch die Persönlichkeit von Antonio Mario Lorgna, wenn schon einem Lagrange nicht zu vergleichen, immerhin eine in der Geschichte der italienischen Wissenschaft weit hervorragende, und wenn auch von allen seinen Arbeiten uns Nichts bekannt geworden wäre, so müsste doch, wie Lorgna's Lobredner Luigi Palcani im VIII. Bande der *Memorie di matematica e di fisica della società Italiana* mit Recht bemerkt, der Name des Mannes in Ehren gehalten werden, welcher in den Jahren 1781 bis 1782 eben diese Società Italiana gründete und damit einen nationalen Mittelpunkt für die an verschiedenen Orten thätigen gelehrten Bestrebungen schuf. Vielleicht liesse sich ein Zusammenhang nachweisen zwischen der Gründung dieser italienischen Gesellschaft und den wissenschaftlichen Widerwärtigkeiten, mit welchen Lorgna grade zu jener Zeit an der Academie zu Padua zu kämpfen hatte, wo Neid und Missgunst eines unwissenden Gegners es durchzusetzen vermochten, dass ihm ein wohlverdienter Preis nicht zugewiesen wurde. Die Preisfrage bestand in dem verlangten Nachweise, dass der sogenannte *casus irreductibilis* der cubischen Gleichungen mit Recht diesen Namen führe, d. h. dass keinerlei algebraische Umformung im Stande sei, die imaginäre Form der in Wahrheit reellen Wurzelwerthe zu beseitigen. Herr Biadego hat in seiner Abhandlung namentlich durch Abdruck eines Briefes von Stratico ein helles Licht auf diese Händel geworfen. Könnte er etwa den von uns oben vermutheten Zusammenhang mit anderen brieflichen Belegen stützen? Der irreductible Fall der cubischen Gleichungen bildete seit 1777 einen Kreuzungspunkt der verschiedenartigsten Untersuchungen für Lorgna. Bald waren es algebraische Betrachtungen, welche er daran knüpfte und in welchen er (vergl. S. 5 und 38) nicht immer glücklich war, bald suchte er die Schwierigkeit auf die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückzuführen, welche er alsdann Malfatti und Lagrange zur Behandlung vorlegte. Die Integration dieser Gleichung $(1+9z^2)y''+12zy'=2y+(1+3z)^{-5/3}+(1-3z)^{-5/3}$ bildet den Hauptinhalt der uns vorliegenden Mittheilungen, welche wir demnach unseren für den Gegenstand Interesse empfindenden Lesern als Quelle empfehlen. Wenn wir zu Beginne dieses Referates bemerkten, für die Lebensgeschichte des Lagrange böten die nun veröffentlichten Briefe nur Spärliches, so ist für einen Brief vom 25. Mai 1781 eine Ausnahme zu machen. Dieser Brief, dessen Inhalt auf die Gründung der Società Italiana Bezug hat, ist nämlich in italienischer Sprache abgefasst, während man bisher nur den Brief Lagrange's an den Grafen Fagnano vom 23. Juli 1754 in dieser Sprache kannte, von welchem in den letzten Jahren so vielfach die Rede war.

CANTOR.

Die sogenannten allgemeinen Eigenschaften der Körper, nach ihrem Zusammenhange entwickelt von Dr. Heinr. Baumhauer. Zugleich als erste Einleitung in das Studium der theoretischen Physik. Hildesheim, Gerstenberg'sche Buchhandlung. 1872.

Das vorliegende kleine, nur 40 Seiten gr. 8 umfassende Schriftchen, das übrigens von der Verlagsbuchhandlung vorzüglich ausgestattet ist, nimmt sich nicht wenig vor, es will die eine Eigenschaft aus der anderen ableiten und die geläufigen Begriffe klar und scharf fassen. Auf diese Weise soll das Schriftchen für Lehrer und Lernende von Nutzen sein. Sehen wir zu, wie dieser Zweck erreicht wird.

In vier einzelnen Abschnitten wird der Reihe nach behandelt das Volumen der Körper mit überwiegender Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse; die Constitution der Materie und Festigkeitsverhältnisse; Gravitation, Masse, Gewicht und Druck; endlich die Beziehung von Masse, Druck und Gewicht eines Körpers zu seinem Volumen. Was zunächst die Anordnung des ganzen verarbeiteten Stoffes anlangt, so lässt sich gegen die beiden ersten Abschnitte schon Vieles einwenden, indem man die Betrachtung der Festigkeitsverhältnisse an zwei räumlich ganz verschiedenen Stellen suchen muss; hieraus folgt aber auch mit Leichtigkeit der Schluss über die Art der „Ableitung der einen Eigenschaft aus der anderen". Vollkommen enttäuscht wird aber der Leser, wenn er, auf das prätentiös gehaltene Vorwort hin, Belehrung in dem Schriftchen sucht. Abgesehen nämlich von einigen geringeren Ungenauigkeiten des Ausdrucks, der doch, wie das Vorwort behauptet, durch seine Schärfe sich auszeichnen sollte, giebt es auch noch grobe Verstösse gegen Begriffe, die schon längst ins Klare gestellt sind.

Zu ersteren rechnen wir Verstösse wie die folgenden:

„Der Inhalt eines regelmässigen runden Körpers, der sich genau in ein rechtwinkliges Parallelepiped, resp. in einen Würfel einschreiben lässt." Was ist hier des Verfassers „regelmässiger runder Körper"? An einer anderen Stelle heisst es, dass das Meter der 40000000ste Theil des Erdumfanges ist, anstatt, wie es längst genauer festgestellt ist, der 10,000,856ste Theil des Erdquadranten. Von den gasförmigen Körpern heisst es, dass sie stets jeden ihnen dargebotenen Raum ausfüllen, während dies nur für Räume, die der Erdoberfläche verhältnissmässig nahe bleiben, in der Art gilt, wie der Verfasser meint. In dieser Weise enthält das Schriftchen eine grosse Anzahl Ungenauigkeiten, die alle aufzuzählen, zu langweilig sein würde.

Zu den gröberen Verstössen rechnen wir folgende:

Seite 13 Anmerkung 1 heisst es: „Bekanntlich zieht sich das Wasser beim Abkühlen so lange zusammen, bis es die Temperatur etwa 4° C. erreicht hat. Weiter abgekühlt, dehnt es sich wieder aus. Aehnliche

Unregelmässigkeiten zeigt das Jodsilber, welches sich nach Untersuchungen von H. Fizeau bei steigender Temperatur zusammenzieht und bei abnehmender ausdehnt, wenigstens zwischen den Temperaturgrenzen -10^0 und $+70^0$. Dasselbe hat einen negativen Ausdehnungscoefficienten, dessen Zahlenwerth entsprechend der Zusammenziehung mit steigender Temperatur mehr und mehr wächst.“ Der Verfasser hätte anführen sollen, dass ähnliche Unregelmässigkeiten wie beim Wasser sich auch bei anderen Körpern in der Regel in der Nähe der Temperatur finden, wo Aggregatsveränderungen vor sich gehen und dass die Anomalie am Jodsilber auf innere molekulare Aenderungen schliessen lasse.

An einer anderen Stelle wird deducirt, wenn M die Masse, Q der Druck eines Körpers auf seine Unterlage, A die Grösse der Anziehungskraft (auf die Masse M) ist, dass $M = \frac{Q}{A}$, und wenige Zeilen später, dass $M = \frac{Q}{g}$, wenn g die Beschleunigung der Schwerkraft ist. Daraus folgt aber der harte Schluss, dass $g = A$, also eine Grösse, die durch Längen- und Zeitmaass gemessen wird, gleich einer andern ist, die durch Gewichte gemessen werden kann. Der Verfasser macht dazu die äusserst witzige Bemerkung: „Beide (g und A) stehen in directester Beziehung zu einander.

Doch hiermit genug des grausamen Spieles mit ernster Wissenschaft.

Freiberg, den 12. October 1873.

Dr. Th. Kötteritzsch.

Physikalische Aufgaben zur elementar-mathematischen Behandlung. Für den Schulgebrauch bearbeitet von O. Burbach. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Gotha, Verlag von E. F. Thienemann. 1872.

„Die vorliegende Sammlung physikalischer Aufgaben soll für den Unterricht in der Physik ein ähnliches Hilfsmittel gewähren, wie dergleichen für den mathematischen Unterricht bereits längst in grosser Anzahl vorhanden sind.“ Sie ist berechnet für Gymnasien, Realschulen, Seminarien und ähnliche Bildungsanstalten. Die Aufgaben erfordern zur Lösung theils arithmetische und algebraische, theils geometrische Hilfssätze, erstere im Umfange bis zu den Gleichungen zweiten Grades, letztere im Umfange der Planimetrie und Stereometrie (ausschliesslich der Trigonometrie). Die Aufgaben lehnen sich an an die gebräuchlichsten Lehrbücher der Physik und sind, ein wesentlicher Vortheil gegenüber der ersten Auflage, meist für das metrische System umgearbeitet. Ein ausführliches Inhaltsverzeichniss erleichtert die Orientirung. Die Lösungen zu den Aufgaben sollen separat von der Verlagsbuchhandlung abgegeben werden. Die Aufgaben schliessen sich der Reihe nach an an die physikalischen Disciplinen, wie sie häufig in den Lehrbüchern abgehandelt werden, nämlich die allgemeinen mechanischen

Erscheinungen; mechanische Erscheinungen an festen, an flüssigen, an luftförmigen Körpern. Magnetismus, Elektricität, Akustik, Optik, Wärme. Sie endigen mit einem Abschnitt über stöchiometrische Aufgaben. Ein Anhang über das nöthigste Tabellenmaterial bildet den Schluss. Wir können mit dem Verfasser nur wünschen, dass sein Werkchen mit zur Vertiefung der Schüler in die physikalischen Disciplinen beitragen möge, wozu diese vorliegende zweite Auflage jedenfalls noch einen Schritt weiter fördert als die erste.

Freiberg, den 12. October 1873.

Dr. Th. Kötteritzsch.

Bibliographie

vom 1. November bis 15. December 1873.

Periodische Schriften.

Physikalische Abhandlungen der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Aus dem Jahre 1872. Berlin, Dümmler. 6⅔ Thlr.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie d. Wissenschaften zu Wien, mathematisch-naturwissensch. Classe. Wien, Gerold. 57. Bd.

I. Abtheilung,	1.—5. Heft	pro compl.	6⅔ Thlr.
II. „	1.—5. „	„ „	5⅓ „
III. „	1.—5. „	„ „	4 „

Journal für reine und angewandte Mathematik, begründet von CRELLE, fortges. von C. W. BORCHARDT. 77. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 4 Thlr.

Reine Mathematik.

DURÈGE, H., Elemente der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen. 2. Aufl. Leipzig, Teubner. 1 Thlr. 22 Ngr.

HERR, L., Lehrbuch der höheren Mathematik. 2. Aufl. Bd. II, Heft 3. Wien, Seidel & Sohn. pro compl. 8 Thlr.

SCHUMANN, H., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 2. Aufl. Berlin, Weidmann. ⅝ Thlr.

SCHÜLER, W. F., Die Arithmetik und Algebra in philosophischer Begründung. 1. Theil. Leipzig, Teubner. 1⅓ Thlr.

BARDEY, E., Methodisch geordnete Aufgabensammlung über alle Theile der Elementarmathematik. 3. Aufl. Leipzig, Teubner. 27 Ngr.

OHLERT, B., Lehrbuch der Mathematik. I, 1. 2. Aufl. Elbing, Neumann-Hartmann. 1 Thlr.

ASCHENBORN, K., Lehrbuch der Geometrie. 1. Abschn. 2. Aufl. Berlin, v. Decker's Geh. Oberhofbuchdruckerei. 2 Thlr. 8 Ngr.

REIDT, F., Die Elemente der Mathematik. 2. Theil: Planimetrie. 2. Aufl. Berlin, Grote. 16 Ngr.

SPIEKER, TH., Lehrbuch der ebenen Geometrie. 8. Aufl. Potsdam, Stein. ⅚ Thlr.

HELMES, J., Die Elementarmathematik. 2. Theil: Planimetrie. 1. Abth. 2. Aufl. Hannover, Hahn. ⅔ Thlr.

WITTSTEIN, Th., Lehrbuch der Elementarmathematik. II, 2: Stereometrie. 3. Aufl. Hannover, Hahn. 21 Ngr.

Angewandte Mathematik.

Müller, J., Die constructive Zeichnungslehre. 2. Aufl. 2 Theile nebst Atlas. Braunschweig, Vieweg. 4 Thlr.

Stück, H., Distanz- und Höhenmessung. Formeln und Tabellen. Hamburg, Meissner. 1½ Thlr.

Pinzger, L., Die geometrische Construction von Weichenanlagen für Eisenbahngleise. Aachen, Mayer. 2½ Thlr.

Albrecht, Th., Formeln und Tafeln für geographische Ortsbestimmungen. Leipzig, Engelmann. 3 Thlr.

Schanz, Die astronomischen Anschauungen des Nic. v. Cusa und seiner Zeit. Tübingen, Fues. 12 Ngr.

Baeyer, J., Astronomische Messungen für die europäische Gradmessung; aus den Jahren 1857—1866. Leipzig, Engelmann. 3 Thlr.

Holetschek, J., Bahnbestimmung d. 1. Cometen v. J. 1871. Wien, Gerold. 4 Ngr.

Vogel, H., Beobachtungen, angestellt auf der Sternwarte des Herrn v. Bülow zu Bothkamp. 2. Heft. Leipzig, Engelmann. 4 Thlr.

Röntgen, A., Die Grundlehren der mechanischen Wärmetheorie. 2. Thl. Jena, Costenoble. 3 Thlr. 14 Ngr.

Copernici, N., De revolutionibus orbium coelestium libri VI. Ex auctoris autographo recudi curavit societas Copernicana. Berlin, Weidmann. 10 Thlr.

Plantamour, E., Observations faites dans les stations astronomiques suisses. Basel, Georg. 2 Thlr. 4 Ngr.

Physik.

Meyner, M., Untersuchungen über den Bildungsgang des Sonnensystems. Weimar, Böhlau. 8 Ngr.

Müller, A., Die Einwirkung des Lichtes auf Wasser. Zürich, Schabelitz. 28 Ngr.

Dorner, H., Grundzüge der Physik. 2. Aufl. Hamburg, Meissner. 24 Ngr.

Mousson, A., Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. 3. Bd. 1. Lief. 2. Aufl. Zürich, Schulthess. 1⅘ Thlr.

Winkler, A., Probleme aus der Wärmelehre. Wien, Lehmann & Wentzel. 24 Ngr.

Airy, G. B., Ueber den Magnetismus. Berlin, Oppenheim. 1¼ Thlr.

Schmick, J., Das Fluthphänomen und sein Zusammenhang mit den säculären Schwankungen des Seespiegels. Leipzig, Scholtze. 2⅔ Thlr.

Dove, H. W., Das Gesetz der Stürme in seiner Beziehung zu den allgemeinen Bewegungen der Atmosphäre. 4. Aufl. Berlin, Reimer. 2 Thlr.

Preisaufgaben

der

Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.

Aus der Mathematik und Naturwissenschaft.

Für das Jahr 1874. Das Problem der elektrischen Vertheilung auf einem Conductor von gegebener Gestalt ist durch die bisher in Anwendung gebrachten Methoden nur in verhältnissmässig wenigen Fällen zur definitiven Lösung gelangt oder einer solchen zugänglich geworden. Um die genannten Methoden ihres speciellen Characters zu entkleiden und wo möglich auf ein allgemeineres Niveau zu erheben, scheint es zunächst wünschenswerth, wesentlich neue Fälle in den Kreis der Untersuchungen hereinzuziehen. Demgemäss stellt die Gesellschaft folgende Preisaufgabe:

> *Auf einem Rotationskörper, dessen Meridian durch die Lemniscate (Cassini'sche Curve)*
> $$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = b^4 - a^4$$
> *dargestellt ist, soll die Vertheilung der Elektricität unter dem Einflusse gegebener äusserer Kräfte ermittelt werden.*

Die Beantwortung des Specialfalles $a = b$ würde durch die Methode der reciproken Radien (Methode der sphärischen Spiegelung) auf den Fall eines Hyperboloids reducirbar, und für die Erlangung des Preises *unzureichend* sein. (Preis 60 Ducaten.)

Für das Jahr 1875 (prolongirt vom vorigen Jahre). Die Frage nach der Lage der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes ist trotz mannichfacher Bemühungen bis jetzt nicht entschieden worden. Die Gesellschaft stellt daher die Aufgabe:

> *Es ist durch neue Untersuchungen die Lage der Schwingungsebene des polarisirten Lichtes* **endgültig** *festzustellen.* (Preis 60 Ducaten).

Für das Jahr 1876. Trotz der meisterhaften Arbeiten Leverrier's über die Bewegung des Mercur kann die Theorie dieses Planeten noch nicht als endgültig abgeschlossen betrachtet werden. Die Gesellschaft wünscht eine ausführliche

Untersuchung der die Bewegung des Mercur bestimmenden Kräfte,

mit Rücksicht auf die von Laplace (in der Mécanique céleste), von Leverrier (in den Annales de l'Observatoire und den Comptes rendus de l'Académie des sciences), von Hansen (in den Berichten der Kön. Sächs. Gesellsch. d. W. vom 15. April 1863) und von Wilhelm Weber (vergl. Zöllner über die Natur der Cometen S. 333) angedeuteten Einwirkungen. Ausser der vollständigen Berechnung der Störungen ist eine Vergleichung mit den Beobachtungen unerlässlich, um zu zeigen, bis zu welchem Grade der Genauigkeit sich die eingehenden Constanten bestimmen lassen. Die Construction von Tafeln zur Ortsberechnung behält sich die Gesellschaft vor zum Gegenstand einer späteren Preisbewerbung zu machen. (Preis 700 Mark.)

Die Preisbewerbungsschriften sind in deutscher, lateinischer oder französischer Sprache zu verfassen, müssen deutlich geschrieben und paginirt, ferner mit einem Motto versehen und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, der auswendig dasselbe Motto trägt, inwendig den Namen und Wohnort des Verfassers angiebt. Die gekrönten Bewerbungsschriften bleiben Eigenthum der Gesellschaft. Die Zeit der Einsendung endet für das Jahr der Preisfrage mit dem Monat November; die Adresse ist an den Secretär der Gesellschaft (für das Jahr 1873 den Prof. Dr. F. Zarncke) zu richten. Die Resultate der Prüfung der eingegangenen Schriften werden jederzeit durch die Leipziger Zeitung im März oder April bekannt gemacht.





INHALT.

Kleinere Mittheilungen.

Literaturzeitung (besonders paginirt).

Recensionen:

Bibliographie vom 1. November bis 15. December 1873.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

